МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p-q$.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x+\sin 3x}+\frac{\sin 8x}{\cos 3x-\sin 3x}=\sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $27^{\sqrt{\log_3 x}}-11\cdot 3^{\sqrt{4\log_3 x}}+40\cdot x^{\sqrt{\log_x 3}}\leqslant 48$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO=\arccos\frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO=36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=|x-\sqrt{a}|+\sqrt{a}-2, \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=25 \end{cases}$$

   имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y\geqslant 90+x-6^{90}, \\ y\leqslant \log_6 x. \end{cases}$$

   Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

p - орел ≥ 55 из 90 $\quad 2^{55} + 2^{56}$

2^{90}

$x = 3^{\log_3 4}$ $\quad \log_3 x = \log_3^2 4$

$3^{3\cdot\log_3^{\frac{1}{2}} x} - 11\cdot 3^{2\cdot\frac{1}{\log_3}}$ $\quad 11\cdot 3^{2\log_3^{\frac{1}{2}} x} + 40\cdot 3^{\log_3^{\frac{1}{2}} x} - 48 \leq 0$

$x^{\log_x^{\frac{1}{2}} 3}$

$\sqrt{x} \leq a$

$x^{\log_x 3} = 3$

$x \leq a^2$

$x^{\frac{\log_x^1 3}{\log_x^{\frac{1}{2}} 3}}$ $\quad \left(\frac{a}{a^{\frac{1}{2}}}\right) = a^{\frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{t = 3^{\log_3^{\frac{1}{2}} x}} =$

$= 3^{\frac{\log_3 x}{\log_3^{\frac{1}{2}} x}}$ $\quad x^{\log_3^{\frac{1}{2}} x}$

$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 = 0$

~~8 - 44 + 40 - 48~~ $\quad 9\cdot 11$

$t=3$

$27 - 99 + 120 - 48 = 0$ $\quad t = 3$ подход

$147 - 147 = 0$

$\cos 8x + \cos 3x - \cos 8x \sin 3x + \sin 8x \cos x + \sin x \sin x$

$(\cos^2 3x - \sin^2 3x)$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 11t^2 + 40t - 48 & t-3 \\ \hline -\;t^3 - 3t^2 & t^2 - 8t + 16 \\ -8t^2 + 40t & \\ -\;-8t^2 + 24t & \\ 16t - 48 & \\ -\;16t - 48 & \\ 0 & \end{array}$$

$t^2 - 8t + 16 = 0$

~~$\frac{D}{4} = 16 - 16$~~

$(t-4)^2 = 0$

$(t-4)^2(t-3) = \leq 0$

[illegible]

$\frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x}$

$\cos x - \sin x + \operatorname{tg} 6x (\sin x + \cos x) - \sqrt{3}$

$\cos 8$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\cancel{\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))}$

$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$x + y = 2\alpha$

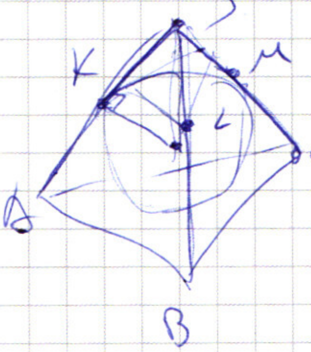
$x - y = -2\beta$

$\cos x - \cos y = -2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos 8x = \cos^2 4x - \sin^2 4x =$

$= (\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x)^2 - (\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x)^2 =$

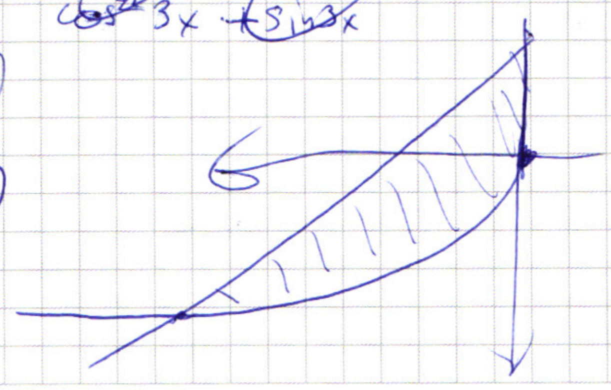
$= \cos^2 3x \cos^2 x - 2\cos 3x \cos x \sin 3x \sin x + \sin^2 3x \sin^2 x - (\sin^2 3x \cos^2 x + 2\cos 3x \cos x \sin 3x \sin x + \cos^2 3x \sin^2 x)$



$\cos^2 x(\cos^2 3x - \sin^2 3x) + \sin^2 x(\sin^2 3x - \cos^2 3x) -$

$- 4\cos 3x \cos x \sin 3x \sin x$

$\frac{\cos 3x \cos x \sin 3x \sin x}{\cos^2 3x + \sin 3x}$



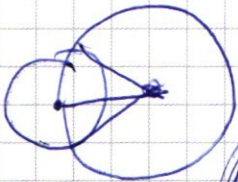
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

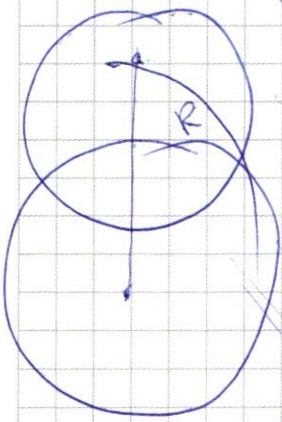
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

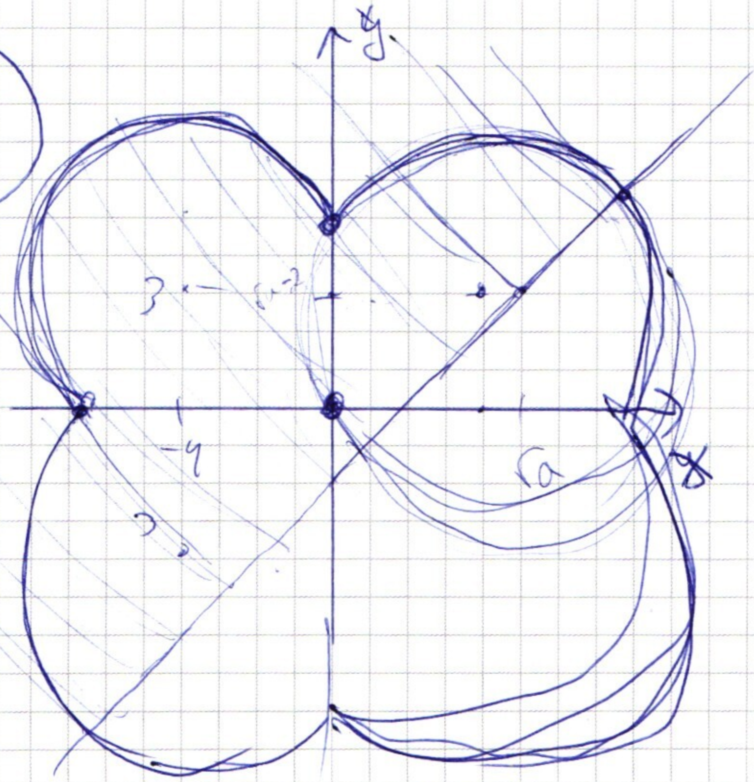
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$x \geq \sqrt{a}$

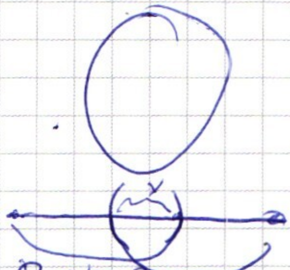
$y = x - 2$

$x \leq \sqrt{a}$

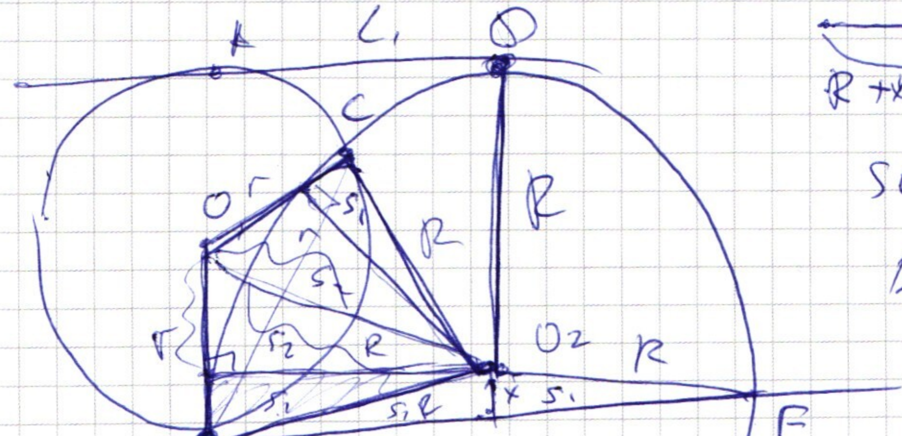
$y = 2\sqrt{a} - x - 2$

$R - x + r - x = R$

$x < 0$



$R + x = 2r$ R

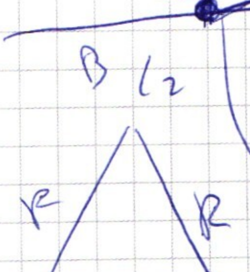


$S_{BO_2E} =$

$\frac{R(S_1 + S_2)}{\cancel{x} S_1} = 2$

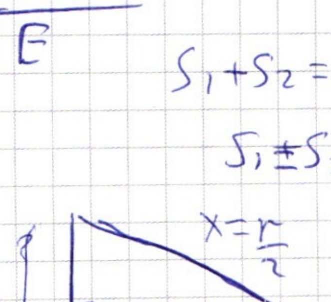
$S_1 + S_2 = 2S_1$

$S_1 \pm S_2$



$S_2 =$

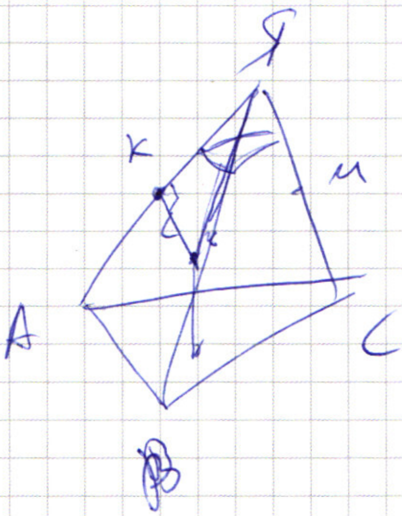
$x = \frac{r}{2}$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \sin\frac{2}{\sqrt{2}}\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$



$\sin(3x + \frac{\pi}{4})$

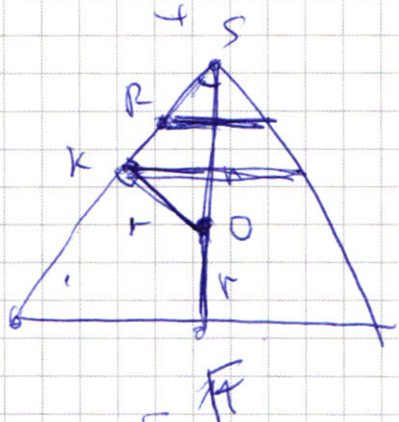
$\sin(3x - \frac{\pi}{4})$

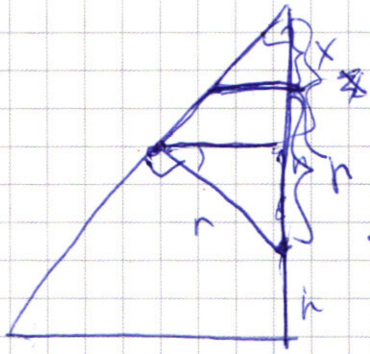
~~$\sin 2x \cos 6x$~~

$\frac{\cos^2 4x - \sin^2 4x}{\cos^2 3x + \sin^2 3x}$

$2\cos^2 4x - 1 \quad 2\sin 4x \cos 4x$

$\sin 3x = 2\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$





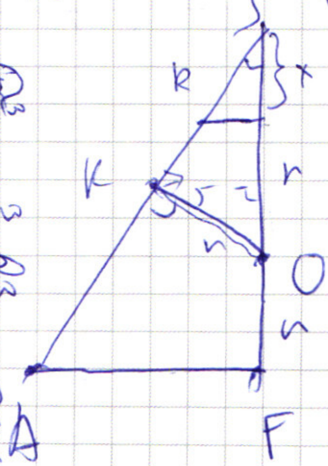
$4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x$

$4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$(\cos x - \sin x)$

$(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)$



$\frac{x}{r - r\sin\alpha}$

$(x + r)\sin\alpha = r$

$\cos 8x \cos 3x - \sin 3x \cos 8x + \sin 8x \cos 3x + \sin 8x \sin 3x$

$\cos 3x(\cos 8x + \sin 8x) + \sin 3x(\sin 8x - \cos 8x)$

~~$\cos^2 3x - \sin^2 3$~~

$\cos 5x \cos 3x - \sin 5x \sin 3x$

$3x + 2x$

$\cos 3x(\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x) - \sin 3x($

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

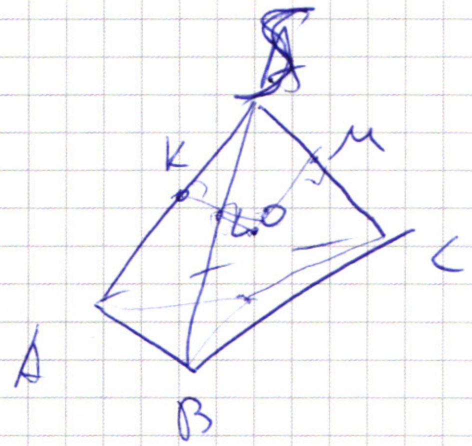
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 1 0 8 6 8

(заполняется секретарем)

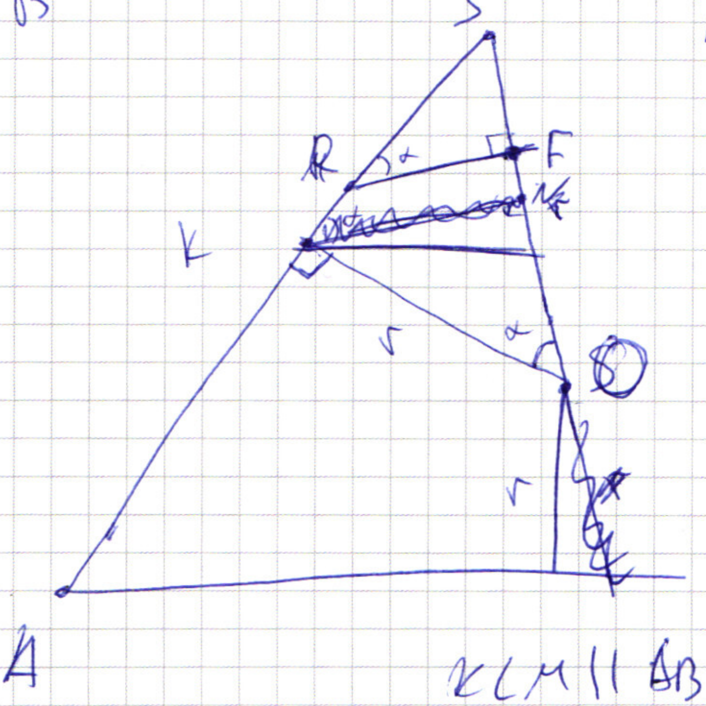
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



~~Заметим, что точка O равноудалена от прямых AS, CS, BS. также~~

Нарисуем сечение KSO:



F - ближайшая сферы точка ~~касания~~ KS

OF = r - радиус сферы

OK = r

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$

KLM || ABC и

(2)

cos.

$\sin 3x + \cos 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - 3\cos x =$

$= 4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x) =$

$= 4\left((\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x\sin x + \sin^2 x)\right) - 3(\cos x - \sin x) =$

$= (\cos x - \sin x)\left(4(1 + \cos x\sin x) - 3\right) = (\cos x - \sin x)(1 + 4\cos x\sin x)$

$\cos 3x - \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 4\sin^3 x - 3\sin x =$

$= 4(\cos^3 x + \sin^3 x) - 3(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)\left(4(1 - \cos x\sin x) - 3\right) =$

$= (\sin x + \cos x)(1 - 4\sin x\cos x)$

② продолжение:

$$\frac{\cos 2x(\cos 3x+\sin 3x)+\sin 2x(\cos 3x-\sin 3x)}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}=\sqrt{2}$$

числитель:

$\cos 3x(\cos 3x\cos 2x-\sin 3x\sin 2x)-\sin 3x(\sin 3x\cos 2x+\cos 3x\sin 2x)$

$\cos^2 3x\cos 2x-2\cos 3x\sin 3x\sin 2x-\sin^2 3x\cos 2x$

$\cos 6x\cos 2x-\sin 6x\sin 2x$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 5x+\cancel{\cos x}+\sin 5x+\cancel{\sin x}+\sin 5x+\cancel{\sin(-x)}-\cancel{\cos x}-\cancel{\cos 5x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 5x$$

$$\frac{\sin 5x}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sin 6x\cos x-\cos 6x\sin x}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}=\sqrt{2}$$

$$\frac{\cancel{2\sin 3x\cos 3x\cos x-\sin x(\cos^2 3x-\sin^2 3x)}}{}$$

$\sin x-\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{2}}-\sin x=$

$tg\,6x\cos x-\sin x=\sqrt{2}$ $=$

$$\frac{\sin 6x}{\cos 6x}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$$

$2(\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x)\cdot\cos$

$3\sin x$

$=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=$

$=(3\cos^2 x-\sin^2 x)\sin x+2\sin x\cos^2 x=$

$\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=$

$3\sin x-4\sin^3 x$

$\cos^3 x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x-2\sin^2 x\cos x=$

$\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x$

$\cos^3 x-3\cos x(1-\cos^2 x)=$

$=4\cos^3 x-3\cos x$

$\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=$

$=\cos 3x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5) продолжение.

$a \geq 0$

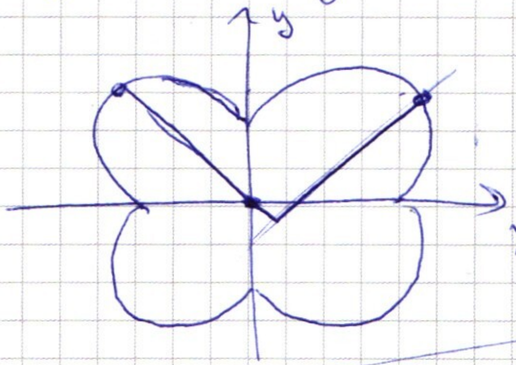
$a=0 \Rightarrow y=|x|-2$, у нас 2 точки пересечения фигуры и ~~графика~~ прямы.

при увеличении a кол-во точек пересечен не меняется.

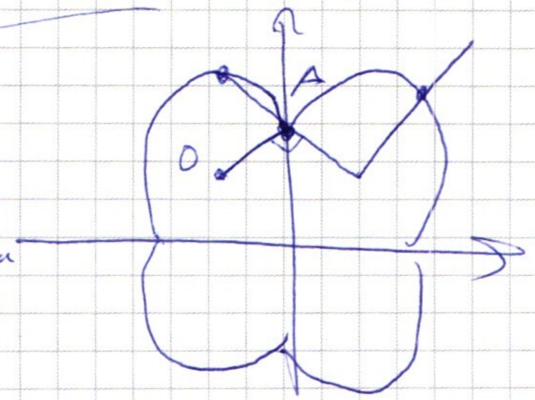
(увеличив параллельно прямую $y=-x-2$)

при $a=1$ есть 3 решения $(0;0)$ и 2 точки на фигуре

при дальнейшем увеличении a ~~...~~ 3-х реш нет.



могут возникнуть 3 решения, когда ~~...~~ пересекаем 1 окружность 2 раза (пример).



но такого не может быть, т.к. прямая $y=-x-2+\sqrt{2}$ перпендикулярна радиусу $OA \Rightarrow$ эта прям в точке A касается окружности.

Ответ:

$a=1$

(2) $\dfrac{\cos 8x^{\cos 3x-\sin 3x}}{\cos 3x+\sin 3x}+\dfrac{\sin 8x^{\cos x+\sin 3x}}{\cos 3x-\sin 3x}=\sqrt{2}$

$$\frac{\cos 8x(\cos 3x-\sin 3x)+\sin 8x(\cos 3x+\sin 3x)}{\cos^2 3x-\sin^2 3x}=\sqrt{2}$$

$\cos\alpha\cos\beta$
$\sin\alpha\sin\beta$
$\cos\alpha\sin\beta$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 8x\cos 3x-\cos 8x\sin 3x+\sin 8x\cos 3x+\sin 8x\sin 3x}{\cos 6x}\right)=\sqrt{2}$$

$\cos 6x\neq 0$

$$\frac{1}{2}\cdot\Big(\cancel{\cos 11x}+\cos 5x-(\cancel{\sin 11x}+\overset{-\sin(5x)}{\sin(-5x)})+$$
$$+\cancel{\sin 11x}+\sin 5x+\cos 5x-\cancel{\cos 11x}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos 5x+2\sin 5x)=\cancel{\cos 5x+\sin}\ \cos 5x+\sin 5x$$

$\cancel{\cos(6x-x)}\ \cancel{\sin(6x-x)}$

$\cos 5x+\sin 5x=\sqrt{2}\cos 6x$

$2x+3x\quad 2x+3x$

$\cancel{\cos 6x\cos x+\sin 6x\sin x+\sin 6x\cos x-\cos 6x\sin x=\sqrt{2}\cos 6x}$

$\cancel{\cos 6x(\cos x-\sin x)+\sin 6x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\cos 6x}$

$\cos 2x\cos 3x-\sin 3x\sin 2x+\sin 2x\cos 3x+\sin 3x\cos 2x=$
$=\sqrt{2}\cos 6x$

$\cos 2x(\cos 3x+\sin 3x)-\sin 2x(\sin 3x-\cos 3x)=$
$=\sqrt{2}\cos 6x$

$\cos 2x(\cos 3x+\sin 3x)+\sin 2x(\cos 3x-\sin 3x)=\sqrt{2}(\cos 3x-\sin 3x)(\cos 3x+\sin 3x)$

$\frac{3}{2}r\quad \dfrac{\cos 2x}{\cos 3x-\sin 3x}+\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x+\sin 3x}=\sqrt{2}$

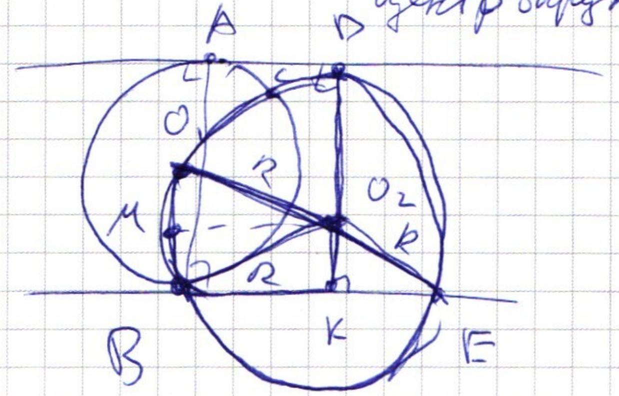
$4r^2+R^2-\frac{R^2}{4}\quad \frac{9}{4}\quad 4\cdot 2r\quad 6r$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. ΔBO_2O_1 - равнобедр, то $O_1O_2 = R$

окружность ω_2 проходит через центр окружности ω_1



Т.к. $AB = DK$ (расстояние между l_1 и l_2) и $AB = 2r$

$DK = R + O_2K$, $O_2K = MO_1 = \frac{1}{2}r$

$2r = R + \frac{r}{2}$

$\frac{3}{2}r = R$

отношение радиуса ω_2 к радиусу ω_1 $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$

$BD = 2$

$BD^2 = DK^2 + BK^2$, $DK = 2r$

$R = \frac{3}{2}r$

$BK = \sqrt{BO_2^2 - O_2K^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}r^2}$

$BD^2 = (2r)^2 + (R^2 - \frac{1}{4}r^2)$

$BD^2 = 4r^2 + (\frac{9}{4}r^2 - \frac{1}{4}r^2) = 4r^2 + 2r^2 = 6r^2$

$4 = 6r^2$ $\quad r = \sqrt{\frac{2}{3}}$

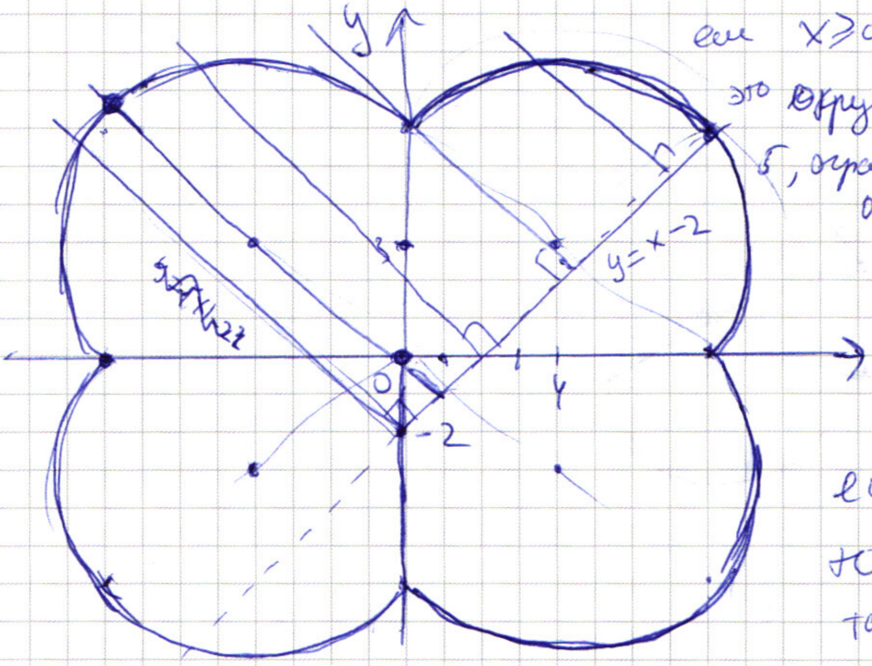
$R = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Ответ:

$\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$, $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$

⑤
$$\begin{cases} y = |x-\sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 25 \end{cases}$$

Пар. $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 25$



если $x \geq 0, y \geq 0$, то это окружность радиуса 5, ограниченная осями координат. с центром $(4;3)$

если $x \leq 0, y \leq 0$, то это тоже окружность, но с центром в $(-4;-3)$

т.к. $(-x-4)^2 = (x+4)^2$
$(-y-3)^2 = (y+3)^2$

если $x \leq 0, y \geq 0$, то окружность радиуса 5 с центром $(-4;3)$, т.к. $(-x-4) = (x+4)$

если $x \geq 0, y \leq 0$, то окружность радиуса 5 с центром $(4;-3)$

$$y = |x-\sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$$

если $x \geq \sqrt{a}$, то $y = x - 2$

если $x < \sqrt{a}$, то $y = 2\sqrt{a} - x - 2$

это перпендикулярные прямые.

тогда $y = |x-\sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$

$a \geq 0$

это 2 прямые, пересекающиеся под $90°$ в точке $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{a} - 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) продолжение

q - когда орлов менее 35

По той же логике (как можно расставить n орлов в 90 местах) это C_{90}^{n}, при этом $0 \le n \le 35$

$$q = \frac{C_{90}^{0} + C_{90}^{1} + \ldots + C_{90}^{34}}{2^{90}}$$

$$p - q = \frac{C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \ldots C_{90}^{90} - \overbrace{(C_{90}^{0} + C_{90}^{1} + \ldots + C_{90}^{34})}^{2^{34}}}{2^{90}} =$$

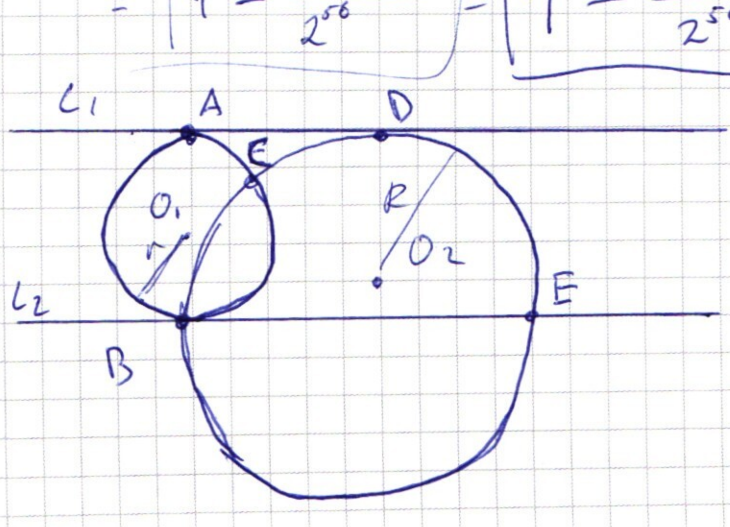
т.к. $C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \ldots + C_{90}^{90} = \overbrace{C_{90}^{0} + C_{90}^{1} + \ldots + C_{90}^{90}}^{2^{90}} - (C_{90}^{0} + C_{90}^{1} + \ldots + C_{90}^{54}) =$

$$= 2^{90} - \underbrace{(C_{90}^{0} + C_{90}^{1} + \ldots C_{90}^{54})}_{2^{54}}$$

$$p - q = \frac{2^{90} - 2^{54} - 2^{34}}{2^{90}} = 1 - \frac{2^{34}(2^{20} - 1)}{2^{90}} =$$

$$= 1 - \frac{2^{20} - 1}{2^{56}} = \boxed{1 - \frac{2^{20} - 1}{2^{56}}} \text{ - Ответ.}$$

6)

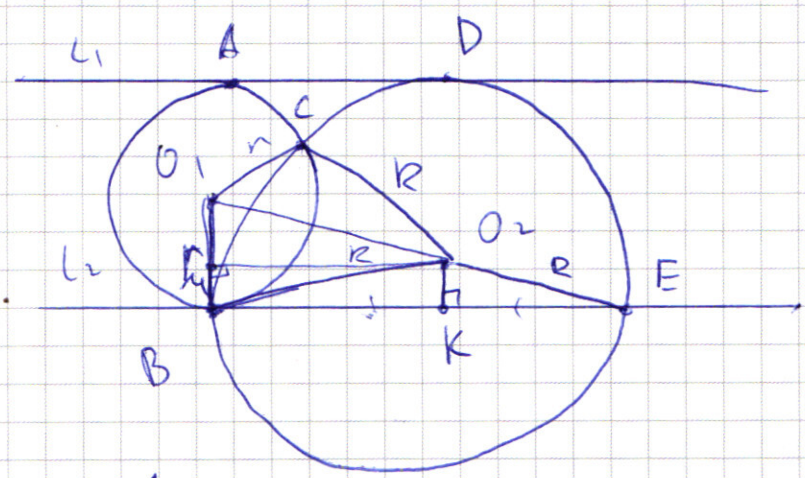


$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = 2$$

$\cancel{\frac{R}{r} = 2}$

$BD = 2$

Пусть радиус окружности $\omega_1 = r$,
а радиус окружности ω_2 R



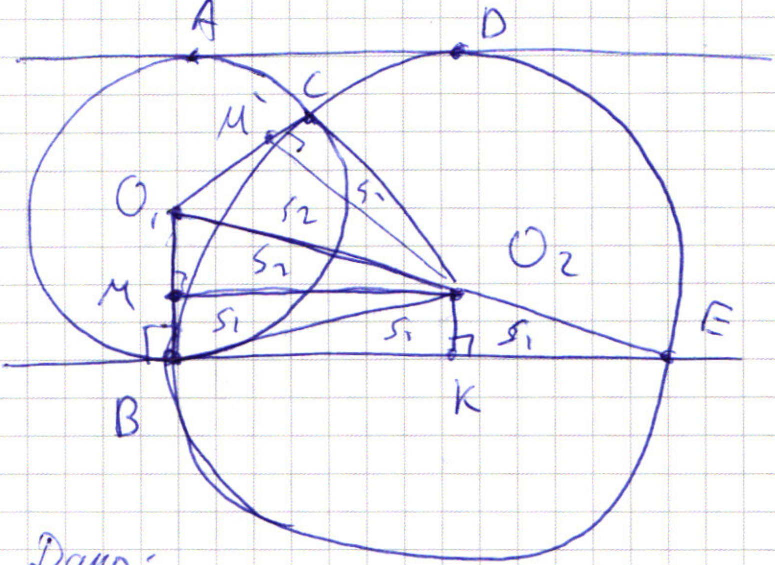
$O_1C = O_1B = r$

$CO_2 = O_2E = O_2B = R$

Опустим перпендикуляр ~~в тр~~ в $\triangle BO_2E$ на BE (O_2K)

Т.к. $\triangle BO_2E$ - равнобедр ($BO_2 = O_2E$), то $BK = KE$

Также $O_1B \perp l_2$ (l_2 - касательная для ω_1)



Опустим перпендикуляр O_2M на O_1B

$MO_2 = BK$ (~~Теорема Фалеса~~, $MBKO_2$ - прямоугольник) ~~$O_1B \parallel O_2K$, $MO_2 \parallel BK$~~

O_2M' - высота на O_1C

Дано:

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = 2$$

Пусть $S_1 = S_{O_2KE}$

$\Downarrow$

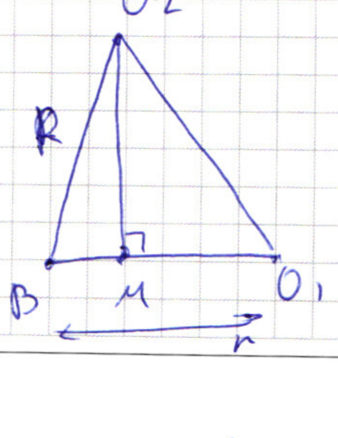
$S_{O_2BK} = S_1 \Rightarrow S_{MBO_2} = S_1$

$\Downarrow$

$S_{M'CO_2} = S_1$

Пусть $S_2 = S_{O_1MO_2}$

т.к. $\triangle O_1BO_2 = \triangle O_1O_2C$ (по трем сторонам)



то $\frac{2(S_1+S_2)}{2S_1} = 2$

$S_1 + S_2 = 2S_1 \Rightarrow \boxed{S_1 = S_2}$

Т.к. $S_1 = S_2$, то $S_{BO_2M} = S_{O_2MO_1} \Rightarrow BM = MO_1$ и $\triangle BO_2O_1$ - равнобедр

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11\cdot 3^{\sqrt{4\log_3 x}} + 40\cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leq 48$

ОДЗ:
$x>0$
$x\neq 1$
$\log_3 x \geq 0$
$\log_x 3 \geq 0$

$3^{3\cdot\sqrt{\log_3^{\frac{1}{2}} x}} - 11\cdot 3^{2\cdot\sqrt{\log_3^{\frac{1}{2}} x}} + 40\cdot x^{\sqrt{\log_x^{\frac{1}{2}} 3}} \leq 48$

$x^{\sqrt{\log_x^{\frac{1}{2}} 3}} = x^{\frac{\log_x 3}{\sqrt{\log_x 3}}} = 3^{\frac{1}{\sqrt{\log_x 3}}} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$

замена: $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$, $t>0$

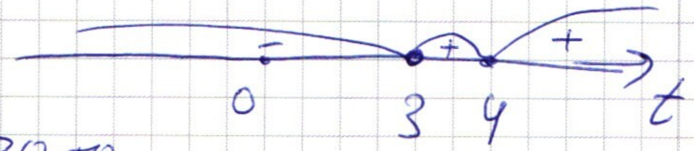
$\Downarrow$

$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 0$

Найдем корни многочлена: заметим, что $t=3$ подходит

$(t-3)(t^2-8t+16)\leq 0$

$(t-3)(t-4)^2 \leq 0$



Т.к. $t>0$, то

$t\in(0;3]\cup[4]$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>0 \\ t\leq 3\end{cases} \\ t=4 \end{array}\right.$

$3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{\log_3 x} \leq 1$ т.к. $\log_3 x \geq 0$

$\Updownarrow$

$\log_3 x \leq 1 = \log_3 3$

$\Downarrow$

$x\leq 3$

$3^{\sqrt{\log_3 x}} = 4 = 3^{\log_3 4}$

$\sqrt{\log_3 x} = \log_3 4$

$$\sqrt{\log_3 x} = \log_3 4$$

т.к. $\log_3 x \geq 0$

$$\log_3 x = \log_3^2 4$$

$$x = 3^{\log_3^2 4} = 4^{\log_3 4}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \log_3 x \geq 0 \\ \log_x 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \log_3 x \geq \log_3 1 \Rightarrow x \geq 1 \\ \log_x 3 \geq \log_x 1 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \end{cases}$$

Ответ:

$\cancel{x \in (1, 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}}$

$\cancel{x \in (1, 3] \cup \{\log_4^{\log}}$

$x \in (1, 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}$

(1) вероятность – отношение в „хороших" случаев ко всем возможным.

если монетку подбрасывают 90 раз, то всего возможных случаев $\boxed{2^{90}}$

p – когда орел выпал не менее 55 раз, ~~n - кол-во орлов возможных расстановок~~

~~p =~~ Пусть n – количество выпавших орлов. Тогда расстановок орлов C_{90}^{n}, а т.к. $55 \leq n \leq 90$

то $$p = \frac{C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + C_{90}^{57} + \dots + C_{90}^{90}}{2^{90}}$$