

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4} =$$

$$\frac{\times 16}{8} \\ 128$$

$$\frac{\times 128}{9} \\ 1152$$

$$\frac{1152}{7}$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_2 x} \leq 72$.
- ✓ 4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
- ✓ 5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$
 имеет ровно три решения.
- ✓ 6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~т.к. корни: $t=2$; $t=6$; оба корня подходят~~

$$\left[\begin{array}{l} 2^{\log_{\frac{1}{2}} x} = 2 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2^{\log_{\frac{1}{2}} x} = 6 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 6 \Rightarrow \log_2 x = -\log_2 6 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

$$\log_2 x = \log_2 6 \cdot \log_2 6 = (\log_2 3 + 1)^2$$

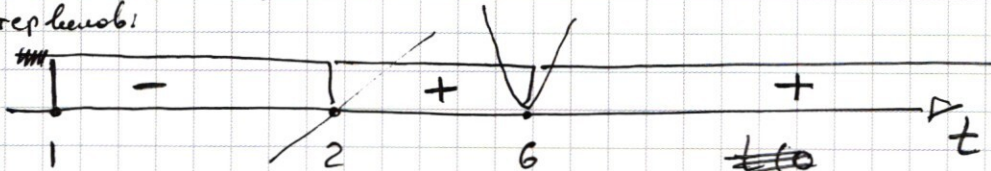
$$x = 2^{(\log_2 3 + 1)^2}$$

~~Воспользуемся методом интервалов:~~

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x} \geq 2 \quad \text{или} \quad \frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x} \leq -2$$

$$(t-2)(t-6)^2 \leq 0 \quad *: t \geq 1$$

метод интервалов:



$$t \in [\text{штрихи}; 2] \cup \{6\}$$

① $1 \leq t \leq 2$

$$1 \leq 2^{\log_{\frac{1}{2}} x} \leq 2$$

$$0 \leq \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x} \leq 1$$

$$0 \leq \log_2 x \leq 1$$

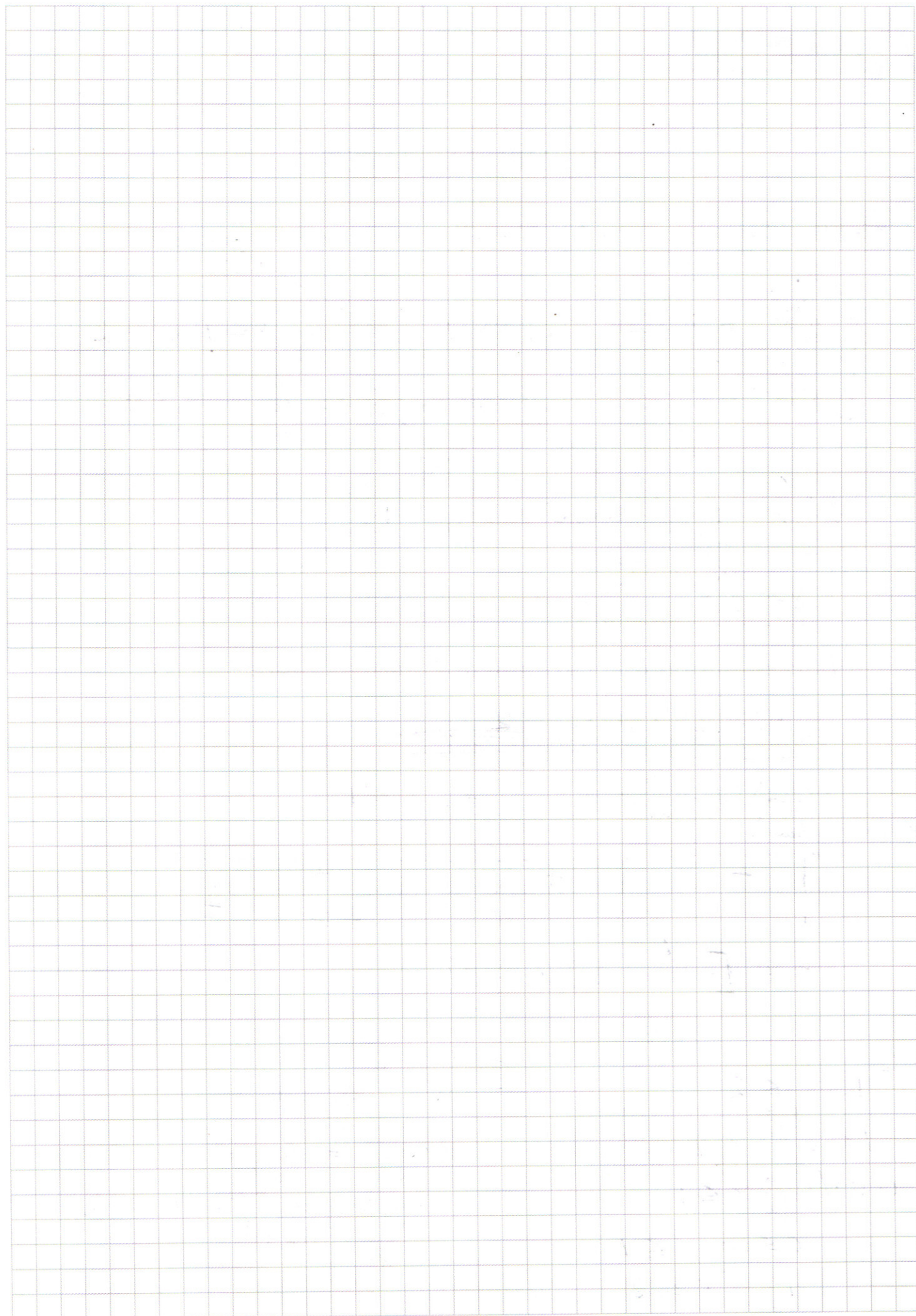
$$1 \leq x \leq 2$$

② $2^{\log_{\frac{1}{2}} x} = 6$

$$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 6$$

$$\log_2 x = (\log_2 6)^2 = (1 + \log_2 3)^2$$

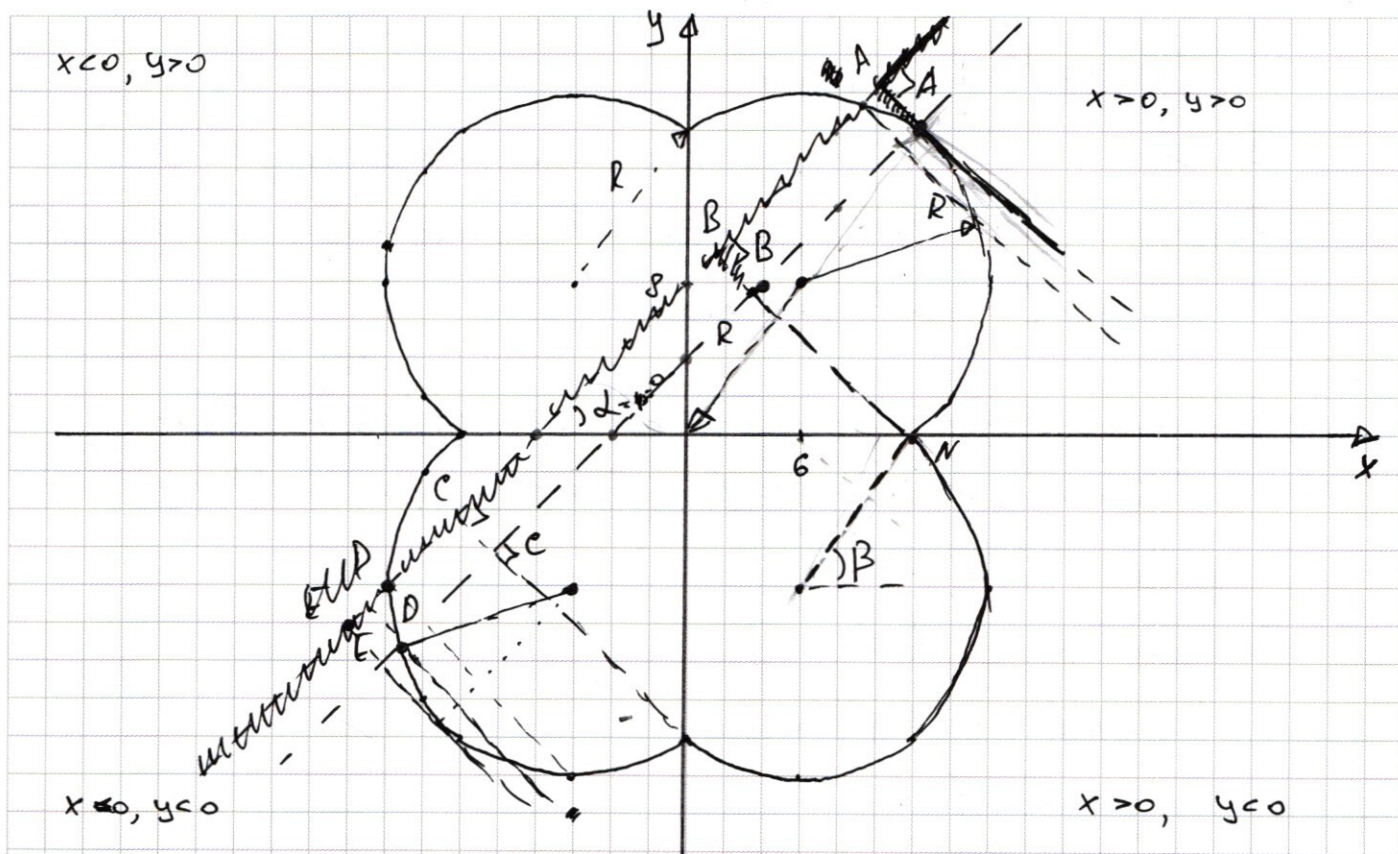
$$x = 2$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Расстояние от центров окружностей до касала координат равно R , т.к. $6^2 + 8^2 = 100 = R^2$

Построим $x = |y - 5a| + 5a - 4$ — представляет собой угол в 45° к прямым, расположенным под углом 45° ($k=1$) и -45° к оси x , причем вершина этого угла расположена в точке $(5a - 4; 5a)$
 $\Rightarrow$ вершина лежит на прямой $S(x) = x + 4$;

Из графика видно, что ~~есть~~ в точке A существует лишь одна точка пересечения графиков $\Rightarrow$ корень, после от A до B — 2 корня, в точке B тоже также 2 корня, поскольку $\angle B < \alpha \Rightarrow$ на прямой AB не

может иметь с полуокружностью более двух точек пересек.

Аналогично в точке C два реш.

от B до C - 2 реш

от (C до D) - 2 реш

В точке D - три решения (пересек. окр $x=0, y=0$ в двух точках)

В точке E - три решения (касание окружности $(x=0, y=0)$)

от D до E - 4 решения

Найдем точку D:

у радиуса $D(-16, -8)$

- приравняем окр $(\frac{x-8}{-6})^2 + (\frac{y-8}{-8})^2 = 100$

- при $S(x)$

Найдем точку D:

$$\begin{cases} (x^2+6)^2 + (y+8)^2 = 100 \\ y = x+4 \end{cases}$$

$$x^2 + 12x + 36 + x^2 + 24x + 144 = 100$$

$$2x^2 + 36x + 80 = 0$$

$$x^2 + 18x + 40 = 0 \quad D = 81 - 40 = 41$$

$$\begin{cases} x = -9 - \sqrt{41} \\ x = -9 + \sqrt{41} \end{cases}$$

$$x = -9 + \sqrt{41}$$

выбираем меньший корень $\Rightarrow$

$$x = -9 - \sqrt{41} \Rightarrow$$

$$-9 - \sqrt{41} = \sqrt{a} + 4$$

$$\sqrt{a} = -5 - \sqrt{41} \Rightarrow a = \sqrt{-5 - \sqrt{41}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2)

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x) - \sqrt{2} (\cos^2 3x - \sin^2 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = 0$$

$$\text{ОДЗ: } \cos^2 3x - \sin^2 3x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 3x \neq \sin 3x \\ \cos 3x \neq -\sin 3x \end{cases} \Rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{4};$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x) - \sqrt{2} \cos 6x = 0$$

$$\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x - \sqrt{2} \cos 6x = 0$$

$$\cos(4x + 3x) + \sin(3x + 4x) - \sqrt{2} \cos 6x = 0$$

$$\cos(7x) + \sin 7x - \sqrt{2} \cos 6x = 0$$

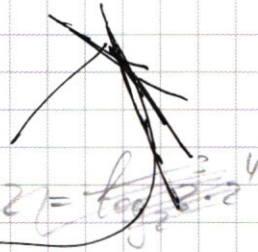
$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \sin x = \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \\ &= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x \\ \sin 3x &= \sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x = 2 \sin x \cos x \cdot \cos x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \\ &= 4 \sin^3 x + 3 \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4x (\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x) - \sqrt{2} \cos 6x &= \\ = \cos 7x + \sin 7x - \sqrt{2} \cos 6x &= 0 \end{aligned}$$

$$t=2 \quad \begin{array}{r} \times 14 \\ 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$8 - 56 + 120 - 72$$

$$\begin{array}{r} + 72 \\ 56 \\ \hline 128 \end{array}$$



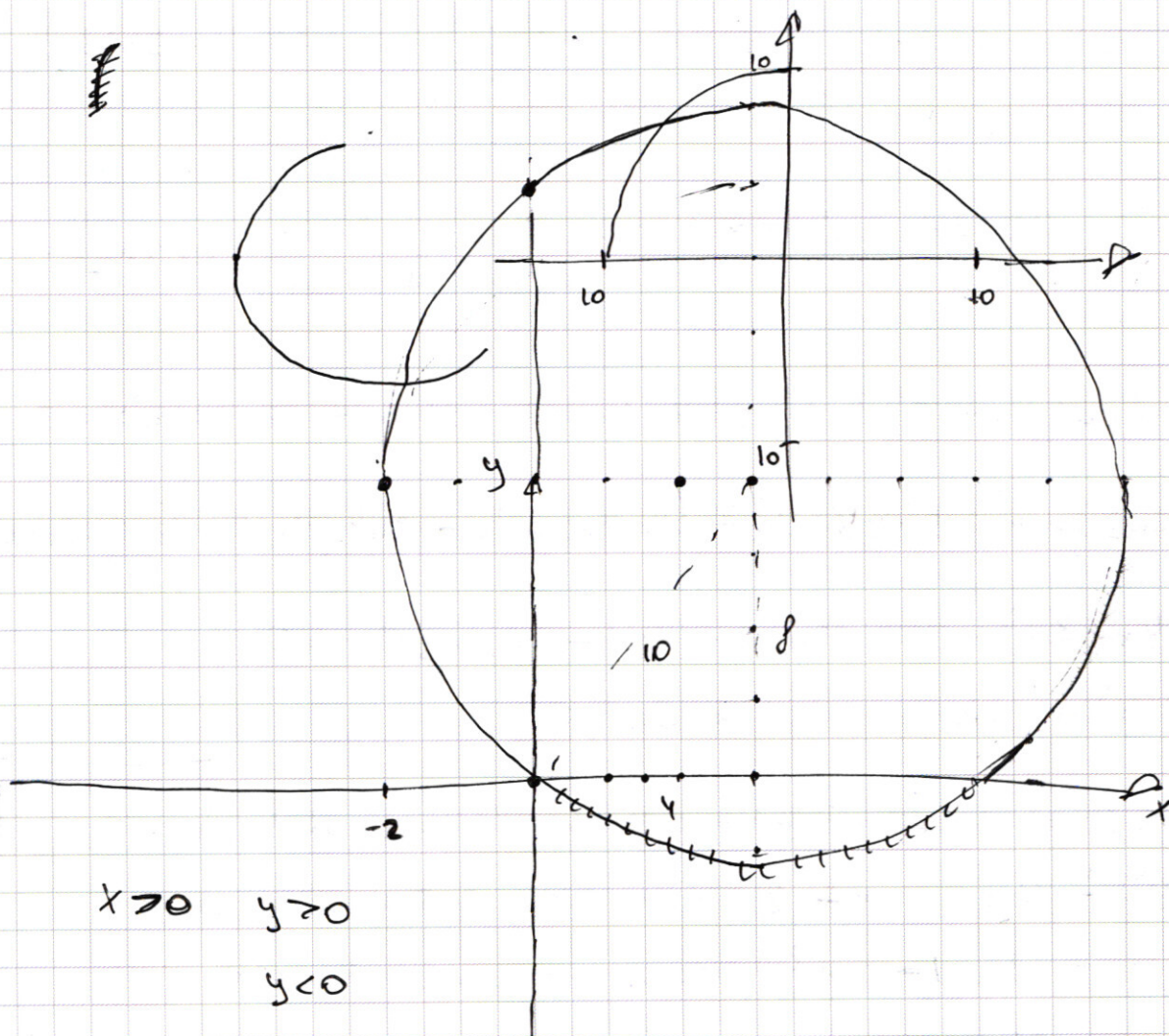
$$\log_2 8 \cdot \log_2 16 = 2 \cdot 4 = 8 = \log_2 2^4$$

$$\log_2 x = \log_2 4 \log_2 4 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$x = 16$$

$$\frac{\log_2 6}{\log_2 2}$$

$$(\log_2 3 + \log_2 2)(\log_2 3 + \log_2 2) = (\log_2 3 + 1)^2$$



$$x > 0 \quad y > 0$$

$$y < 0$$

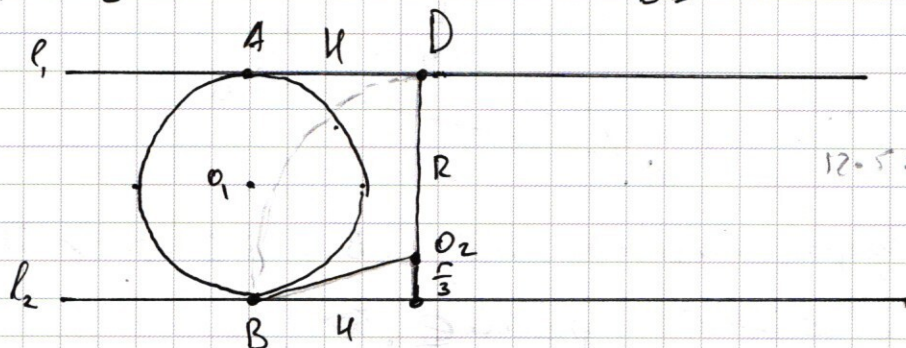
$$-y - 8$$

$$y + 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a) $\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$

$BD = 3$



$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4r^2 + u^2} \Rightarrow g = 4r^2 + u^2$$

$$\Rightarrow u^2 = g - 4r^2$$

$$R^2 = \frac{r^2}{g} + u^2$$

$$R^2 = \frac{r^2}{g} + g - 4r^2$$

$$R = \frac{5}{3}r$$

$$\frac{25}{9}r^2 = \frac{r^2}{g} + g - 4r^2$$

$$\frac{24r^2}{g} + 4r^2 = g$$

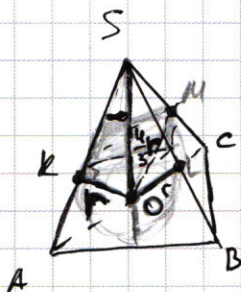
$$\frac{24r^2}{g} + \frac{36}{g}r^2 =$$

$$\frac{24r^2 + 36r^2}{g} = g$$

$$r^2 = \frac{g^2}{60} \Rightarrow r = \frac{g}{2\sqrt{15}} \Rightarrow R = \frac{5g}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $R = \frac{5}{2\sqrt{15}}$; $r = \frac{1}{2\sqrt{15}}$; $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$

4)



$$\sin d = \sqrt{\frac{16-7}{16}} = \frac{3}{4}$$

a)

1) Т.к. сфера касается AS , SB и SC , то $\angle SKO$,

$\angle SLO$ и $\angle SMO$ - прямые.

2) Т.к. точка сферы, ^{через которую провед. плоскость} ближайшая к к-ой, то она лежит на отрезке SO . ($SR \perp$ сфере, $OR \perp$ сфере)

$$3) \cos d = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \sin d = \sqrt{1 - \frac{7}{16}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\text{Точка } SO = \frac{KO}{\sin d} = \frac{r}{\sin d} = \frac{4}{3} r$$

4) S равно удалена от K, M, L , т.к. $\triangle SKO, \triangle SMO, \triangle SLO$ равны $\Rightarrow SO \perp KML$

5) плоскость d также $\perp SO$ по усл $\Rightarrow$

$$\frac{S_d}{S_{KML}} = \frac{SR^2}{SO^2}, \quad SR - \text{расстояние до плоскости } d$$

$$SR = SO - r = \frac{1}{3} r$$

$$\frac{S_d}{S_{KML}} = \frac{\frac{1}{9} r^2}{\frac{16}{9} \cdot r^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow S_{KML} = 16 \cdot 2 = 32$$

$$SO = 9 - \frac{4}{3} r \Rightarrow r = \frac{27}{4}; \quad SK = \frac{4}{3} r + r = \frac{7}{3} r$$

$$S_{ABC} = S_{KML} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{r^2}{r^2} \quad (\text{из подобия}) = \frac{16}{49} \cdot 32$$

$$H = \frac{7}{3} r = \frac{7}{3} \cdot \frac{27}{4}; \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{16 \cdot 32}{49} \cdot \frac{7 \cdot 27}{4} = \frac{1152}{7}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Ответ на 4 задачу: $S = 32$ $V = \frac{1152}{7}$

Задача 1)

~~Вероятность того, что сред выигрывает ровно~~

~~35 раз против 50% 48 раз 42 раза = $\frac{42}{70.2}$~~

~~$p+q = 100\%$~~

~~РРРРРРРР~~

~~РРРРРРРР~~

50% 50% 50%

50%

50%

50%

50%

50%

50%

50%

0,5 · 0,5 =

0,5 · 0,5 =

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 = 100\%$

$\frac{1}{2}$

95
50% 50% 50%

К К К * * 50% 50% 50%

К * * К К 50% 50% 50%

К * * К К

0% - 0%

0,5 · 0,5 · 0,5 · 3

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 =$

$= \frac{3}{8}$

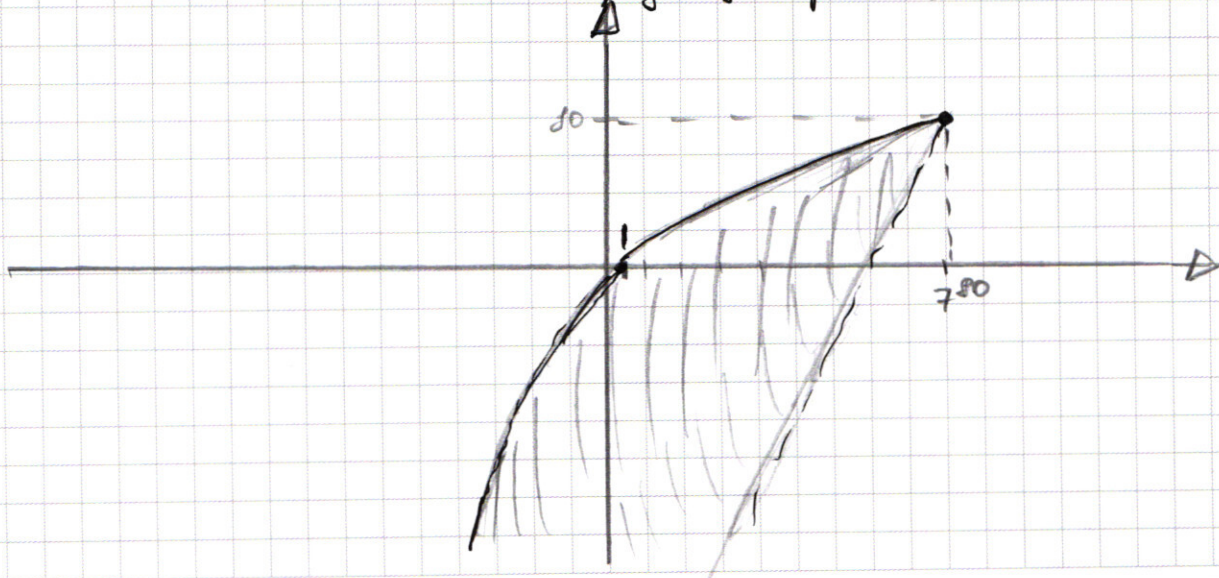
Задача 7)

$y \geq 80 + x - 70^{80}$ - прямая

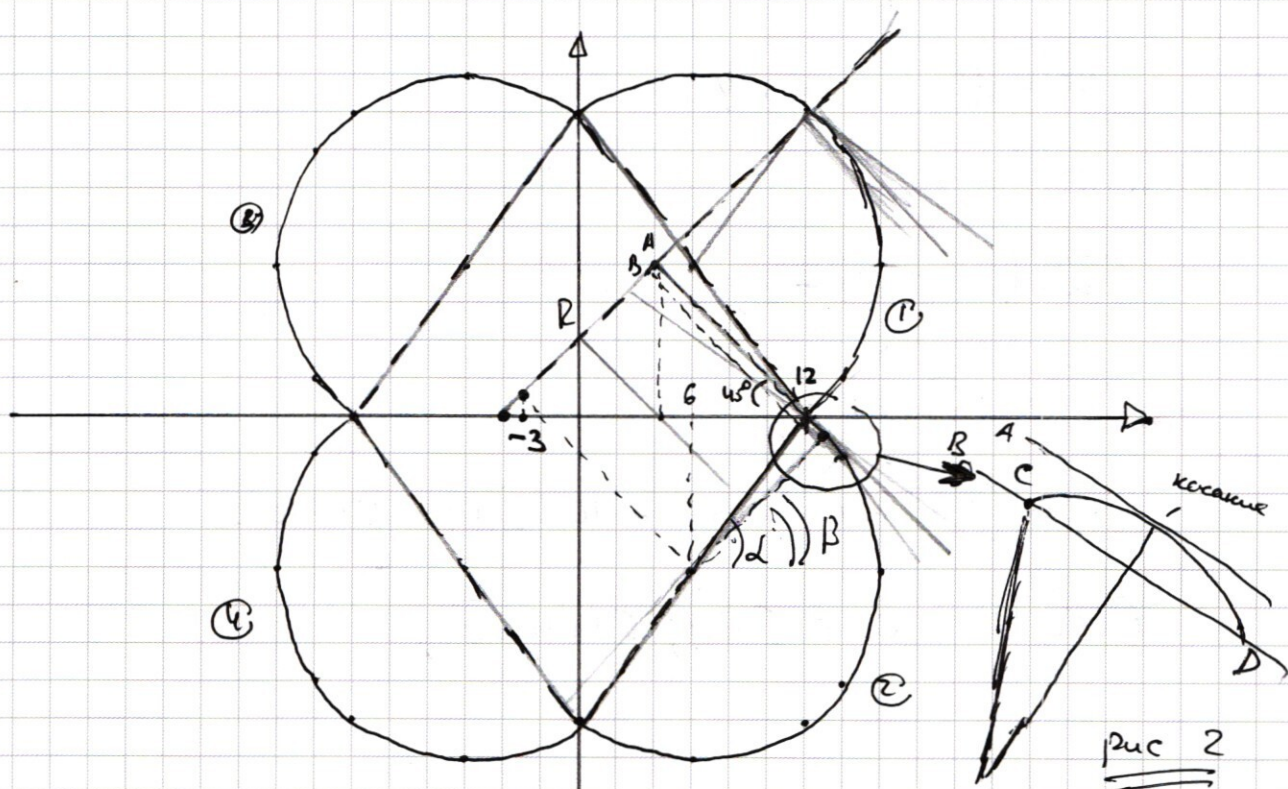
$y \leq \log_7 x$

точка $x = 80$

функции равны!



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



т.к. Δa всегда > 0 ,
и минимальная x координата
«уголка» $= -4$

Три решения будет в промежутке от A до B , где A точка вершина уголка, касающегося окружности σ_2 ; а B - вершина уголка, который проходит через точку $(12; 0)$. Почему три решения? Первое - пересечение окружности σ_1 , второе - два остальных - пересечение окр. σ_2 . ~~Ведь будет образовываться жора~~
см рис 2. ~~Все~~ Такое возможно, т.к. $\angle \alpha = \angle \beta$.
Найдем соотв точки A и B : $B(4; 8)$;

~~Точка~~ Точка A:

$$x_A = -3 + R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45^\circ = -3 + 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{5\sqrt{2} - 3}$$

Для B:

$$\sqrt{a} - 4 = 4$$

$$\sqrt{a} = 8 \quad a = 64$$

Для A:

$$\sqrt{a} - 4 = 5\sqrt{2} - 3$$

$$\sqrt{a} = 5\sqrt{2} + 1$$

$$a = (5\sqrt{2} + 1)^2 = 50 + 10\sqrt{2} + 1 = 51 + 10\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } a \in [64; 51 + 10\sqrt{2})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3)

$$8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$2^{3 \cdot \log_2^{\frac{1}{2}} x} - 7 \cdot 2 \cdot 2^{2 \cdot \log_2^{\frac{1}{2}} x} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2 x} \leq 72$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1) \cup \underline{\underline{x \in (1; +\infty)}}$

$$2^{3 \cdot \log_2^{\frac{1}{2}} x} - 14 \cdot 2^{2 \cdot \log_2^{\frac{1}{2}} x} + 60 \cdot 2^{\frac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}} \leq 72$$

$$2^{\log_2^{\frac{1}{2}} x} = t \quad * \quad t \geq 1, \quad \text{т.к. } \sqrt{\log_2 x} \geq 0$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t \leq 72$$

~~Найдем корни~~

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

$t = 2$ - корень $\Rightarrow t^3 - 14t^2 + 60t - 72$
($8 - 14 \cdot 4 + 60 \cdot 2 - 72 = 0$) $\frac{t^3 - 14t^2 + 60t - 72}{t - 2} = t^2 - 12t + 36$ - делится нацело

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 14t^2 + 60t - 72 & t - 2 \\ - t^3 + 2t^2 & \\ \hline -12t^2 + 60t & \\ - -12t^2 + 24t & \\ \hline 36t - 72 & \\ - 36t + 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36t - 72 \\ - 36t + 72 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(t - 2)(t^2 - 12t + 36) \leq 0$$

$$(t - 2)(t - 6)^2 \leq 0$$

$$x \in [1; 2] \cup \left\{ 2^{(1+\log_2 3)^2} \right\} \quad 2^{(1+\log_2 3)^2} > 2, (\log_2 3 > 1)$$

с учетом ОДЗ:

$$x \in (1; 2] \cup \left\{ 2^{(1+\log_2 3)^2} \right\}$$

Ответ: $x \in (1; 2] \cup \left\{ 2^{(1+\log_2 3)^2} \right\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5)

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

Построим график: $(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100$

а) при $x > 0$ и $y > 0$ — это окр с центром $O_1(6; 8)$ и радиусом $R = 10$

б) при $x > 0$ $y < 0$ координаты центра окружности изменяются $O_2(6; -8)$

в) $x < 0$, $y > 0$ $O_3(-6; 8)$

г) $x < 0$, $y < 0$ $O_4(-6; -8)$

