

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ЩИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Вероятности благоприятного исхода (выпадение орла) и неблагоприятного (выпадение решки) равны по условию $= \frac{1}{2}$, т.к. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Пусть a - количество благоприятных исходов, b - неблагоприятных, n - количество всех, т.е. $n = a + b$.

Тогда при повторении эксперимента n раз вероятность того, что благоприятный исход случится равно a раз равна

$$C_n^a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^b = C_n^a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{a+b} = C_n^a \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ т.к.}$$

события равновероятны (с вероятностью $\frac{1}{2}$).

⇒ в данном случае чтобы найти p , нужно суммировать вероятности, при которых $a > 42$, $n = 70$, чтобы найти q , нужно суммировать вероятности, когда $a \leq 28$, $n = 70$.

$$p = C_{70}^{43} \left(\frac{1}{2}\right)^{70} + C_{70}^{44} \left(\frac{1}{2}\right)^{70} + C_{70}^{45} \left(\frac{1}{2}\right)^{70} + \dots + C_{70}^{69} \left(\frac{1}{2}\right)^{70}$$

$$q = C_{70}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{70} + C_{70}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{70} + \dots + C_{70}^{27} \left(\frac{1}{2}\right)^{70} + C_{70}^{28} \left(\frac{1}{2}\right)^{70} + \dots + C_{70}^{70} \left(\frac{1}{2}\right)^{70}$$

Помогает то $C_n^k = C_n^{n-k}$ ~~так~~ $\left(\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k-k)! \cdot (n-k)!}\right)$

⇒ при вычислении $p - q$ некоторые слагаемые взаимно уничтожаются, если их «коэффициенты» a в сумме будут давать 70.

Таким образом, в итоге останется $p - q = -C_{70}^{28} \left(\frac{1}{2}\right)^{70}$

$$= -\frac{70!}{28! \cdot (70-28)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{70} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{70} \cdot \frac{70!}{28! \cdot 42!}$$

Ответ: $-C_{70}^{28} \left(\frac{1}{2}\right)^{70} = -\frac{70!}{28! \cdot 42!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{70}$

$$\sim 3 \quad 8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} \leq 72, \text{ ОДЗ: } x > 1$$

Преобразуем выражение, приведем все к одному основанию (кроме свободного члена 72)

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{3\sqrt{\log_2 x}} = (2^{\sqrt{\log_2 x}})^3$$

$$7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} = 7 \cdot 2 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} = 14 \cdot (2^{\sqrt{\log_2 x}})^2$$

$$60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} = 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}}, \text{ т.к. } x^{\sqrt{\log_2 2}} = 2^{\log_2 x \cdot \sqrt{\log_2 2}}$$

$$\text{а } \sqrt{\log_2 x} \cdot \sqrt{\log_2 2 \cdot \log_2 x} = \sqrt{\log_2 x} \cdot \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2 2} = \sqrt{\log_2 x},$$

по св-ву логарифмов.

Введем замену $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$, $t \geq 1$, т.к. $\sqrt{\log_2 x} \geq 0$.

$\Rightarrow t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$, решим неравенство методом интервалов:

$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 = 0$, можно подобрать первый корень среди делителей свободного члена, при $t=2 \Rightarrow t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \mid t-2$

$$\begin{array}{r} t^3 - 14t^2 + 60t - 72 = \\ = (t-2)(t^2 - 12t + 36) = \\ = (t-2)(t-6)^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} t^3 - 2t^2 \\ -12t^2 + 60t - 72 \\ -12t^2 + 24t \\ 36t - 72 \\ 36t - 72 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} - & + & - & + \\ \hline & 2 & & 6 \end{array} \rightarrow t \Rightarrow t \in (-\infty; 2] \cup \{6\},$$

учитывая ОДЗ $\Rightarrow t \in [1; 2] \cup \{6\}$.

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{\log_2 x}} \in [1; 2] \cup \{6\} \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0; 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (1; 2], \text{ т.к. по ОДЗ } x > 1.$$

$$\text{II решение } 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6 \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} = \log_2 6 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 6^2$$

$$\Rightarrow x = 2^{\log_2 6 \cdot \log_2 6} = 6^{\log_2 6}.$$

Ответ: $x \in (1; 2] \cup \{6^{\log_2 6}\}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $\begin{cases} x = |y - 6| + 6 - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$ $\text{где } a \geq 0$

первое уравнение
распишем как совокуп-
ность случаев (раскроем
модуль), а второе явля-
ется уравнением окруж-
ности, отнесенной отно-
сительно осей x и y . В I четверти.

Изобразим все на
графике координат-
ной системы xOy .

$\begin{cases} y > 6 \\ x = y - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y < 6 \\ x = 2 \cdot 6 - 4 - y \end{cases}$

$(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 10^2$

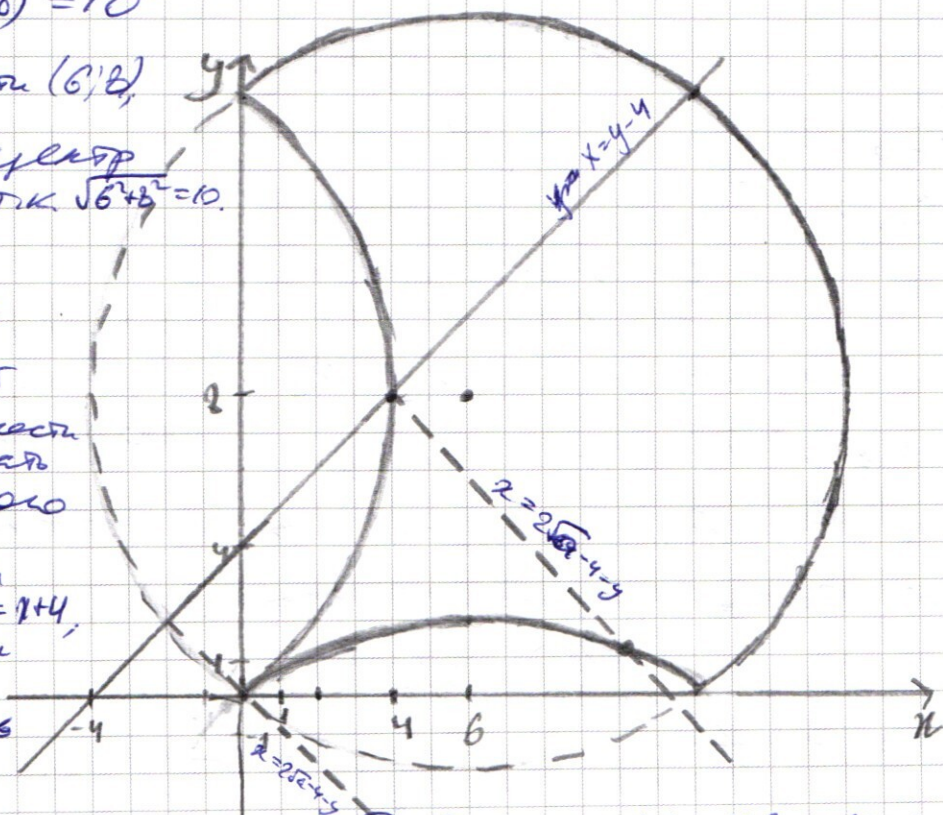
центр окружности $(6; 8)$,
радиус $= 10$.
пройдет через центр
координат, т.к. $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Система будет
иметь решение
в точках, где
график первого
уравнения совпадает
будет пересекать
график второго
уравнения.

Мы изобразим
тогда прямую $y = x + 4$,
но в зависимости
от a будем
учитывать лишь
определенную
ее часть.

$x = 2 \cdot 6 - 4 - y$ представляет собой прямую перпенди-
кулярную $y = x + 4$, которая благодаря параметру
будет «сдвигаться» по коорд. м-ти.
Таким образом, мы будем получать повернутую на
 90° и сменяющую «радиус» модулля.

Начиная двигаться вверх с $(-\infty)$ до точки
пересечения с точкой $(0; 0)$ система всегда будет
иметь 2 решения в т. $(4; 8)$ и $(12; 16)$.



при решении будет, когда $x = 2a - 4 - 4$ будет проходить через $(0; 0) \Rightarrow 0 = 2a - 4 - 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow$

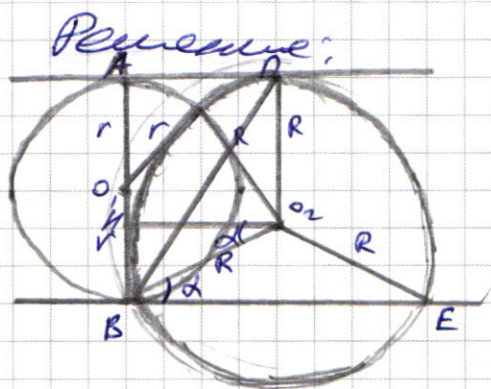
Далее эта прямая будет пересекать график второго уравнения еще в 2 точках $\Rightarrow$ будет 4 решения $\Rightarrow a = 4$.

Снова 3 решения будет когда $\Rightarrow$ центр галочки будет проходить через точку, которую ранее пересекала линия $\Rightarrow$ для прямой это точка $(4; 8) \Rightarrow 8 = 2a - 4 - 4 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow$

Далее до точки, в которой и первая $\Rightarrow a = 64$, прямая пересекает окр. будет 2 решения, в ней 1, а после — решений не будет.

$\Rightarrow$ Ответ: $a = 4$ и $a = 64$.

№ 6. Дано:
 $l_1 \parallel l_2$
 $\omega_1(O_1, r)$
 $\omega_2(O_2, R)$
 $l_1 \perp g$
 $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_1BE}} = 3$
 $\frac{R}{r} = ?$



$$\begin{aligned} \text{Дано: } S_{\triangle BO_1CO_2} &= \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha \\ S_{BO_1CO_2} &= Rr \sin(90^\circ - \alpha) \\ &= Rr \cos \alpha \\ \Rightarrow 3 &= \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_1BE}} = \frac{r}{R \sin \alpha} \end{aligned}$$

ω_1 касается l_1 в т. A, $\Rightarrow O_1A \perp l_1$
 ω_2 кас. l_2 в т. D $\Rightarrow O_2D \perp l_2 \Rightarrow O_1A \parallel O_2D$

$\Rightarrow$ опустим $O_2H \perp AB$ (ω_1 кас. l_2 в т. B, а $l_1 \parallel l_2$)
 $\Rightarrow \triangle ADO_2O_1$ — прямоугол. $\Rightarrow AB$ — диаметр

$\Rightarrow AH = R$, т.к. $DO_2 = R \Rightarrow HB = AB - AH = 2r - R$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{BH}{O_2B} = \frac{2r - R}{R} \Rightarrow \angle HO_2B = \angle O_2BE = \alpha$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{BH}{O_2B} = \frac{2r - R}{R}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{r}{R \sin \alpha} = \frac{r}{R \cdot \frac{2r - R}{R}} = \frac{r}{2r - R} \Rightarrow r = 6r - 3R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{5}{3}$$

б) $\triangle BAD: \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2$, $AD = HO_2$, т.к. $AD = HO_2 = \sqrt{R^2 - (2r - R)^2}$

$$\Rightarrow BD^2 = 4r^2 + R^2 - (2r - R)^2 = 4rR = \frac{4 \cdot 5r^2}{3} = \frac{20r^2}{3} = 3^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{9 \cdot 3}{20} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{15}}{10} = 0,3\sqrt{15}, R = \frac{5r}{3} = 0,5\sqrt{15}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) $\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$, б) $R = 0,5\sqrt{15}$, $r = 0,3\sqrt{15}$.

$$\sim 2. \cos 4x = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\sin 4x = 4\sin x \cdot \cos^3 x - 4\sin^3 x \cdot \cos x$$

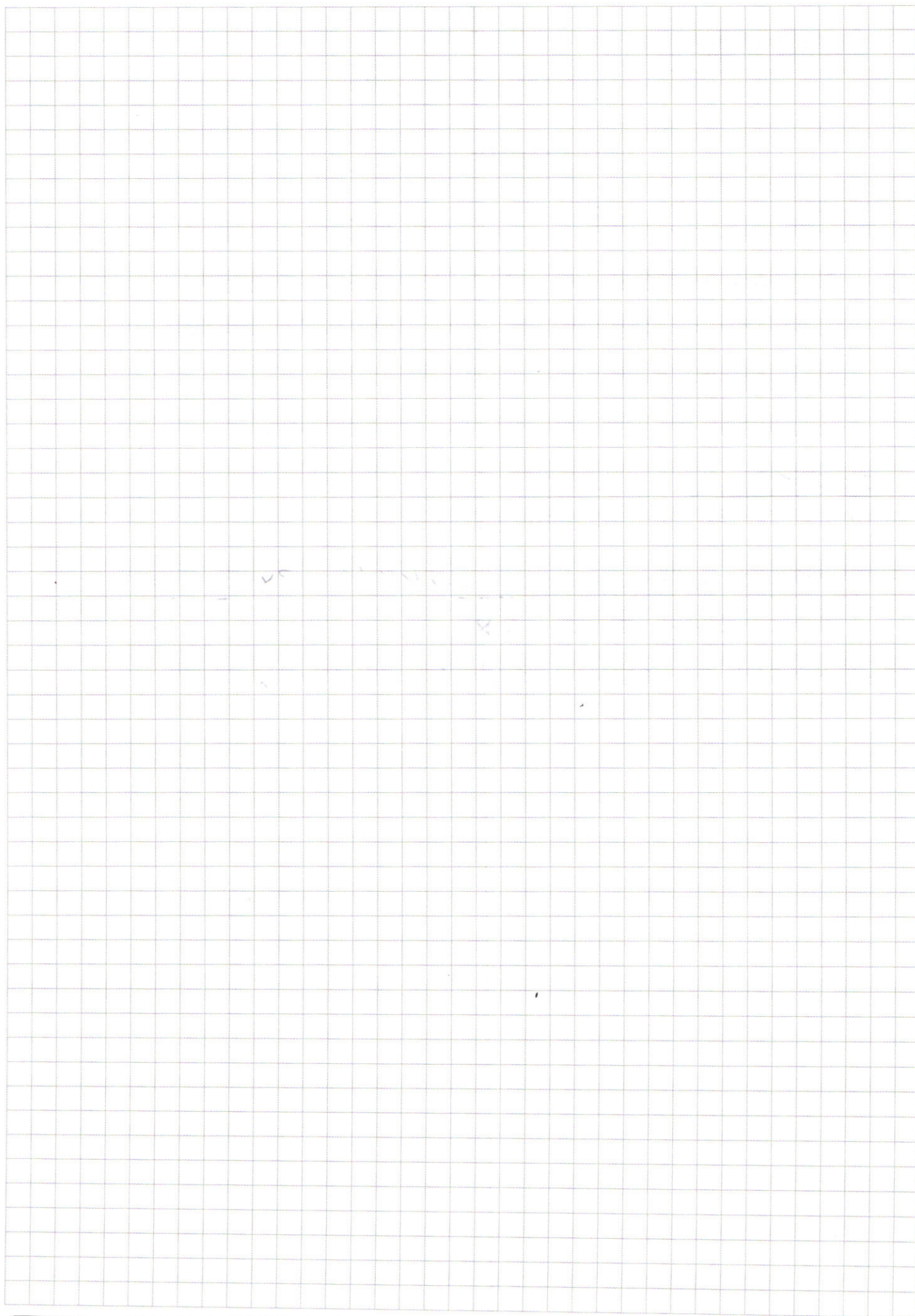
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\sin 3x = 3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$(\cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x \cdot \cos^2 x)(\cos^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x) \dots$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x} = \frac{\cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^3 x + \sin^3 x - 3 \sin x \cdot \cos x}$$

$$\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 = 1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$6 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 6 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = 6 \sin^2 x - 6 \sin^4 x$$

$$\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\frac{1 - 2t^2 + t^4 + t^4 - 6t^2 + 6t^4}{(1 - t^2) \sqrt{1 - t^2} + t^3 - 3t \cdot \sqrt{1 - t^2} (t + \sqrt{1 - t^2})} = \frac{1 - 8t^2 + 8t^4}{(1 - t^2)^{3/2} + t^3 - 3t^2 \sqrt{1 - t^2} - 3t(1 - t^2)}$$

$$(1 - t^2)^{3/2} + t^3 - 3t^2 \sqrt{1 - t^2} - 3t(1 - t^2)$$

$$2^{3 \log_2 x} - 7 \cdot 2^{1/2 \log_2 x} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$x^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\log_2 x \cdot \sqrt{\log_2 x}}$$

$$\log_a b = \log_a c - \log_a b = \log_a b - \log_a d$$

$$\sqrt{\log_2 x} \cdot \sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2 x = \log_2 x \cdot \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2 x} = \log_2 x \cdot \sqrt{\log_2 x} \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6$$

$$(2^{\sqrt{\log_2 x}})^3 - 7 \cdot 2 \cdot (2^{\sqrt{\log_2 x}})^2 + 60 \cdot (2^{\sqrt{\log_2 x}}) - 72 \leq 0$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 = 0$$

решим $\log_2 x = \log_2 6$

$$\begin{array}{r} t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \quad | \quad t - 2 \\ \underline{t^2 - 2t^2} \\ -12t^2 + 60t - 72 \\ \underline{-12t^2 + 24t} \\ 36t - 72 \\ \underline{-36t + 72} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t=2: 8 - 56 + 120 - 72 = \\ = -48 + 120 - 72 = \\ = 0 \end{array}$$

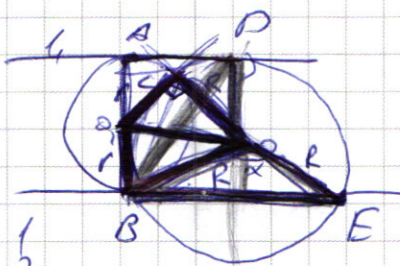
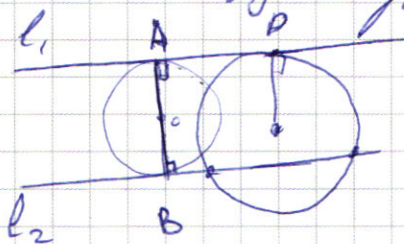
$$(t - 6)^2$$

ответ: $t = 2, t = 6$

$$t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$$

основание $> 1 \Rightarrow \sqrt{\log_2 x}, \log_2 \log_2 x > 0 \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0; 1]$

Сфера может быть вписана только в правильную пирамиду? г/д нет! в сечении окруж. в.д. модель



$$\frac{S_{BO,CO_2}}{S_{BO,OE}} = 3$$

$$S_{BO,OE} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

$$S_{BO,CO_2} = RR \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$RR \sin \frac{\alpha}{2}$$

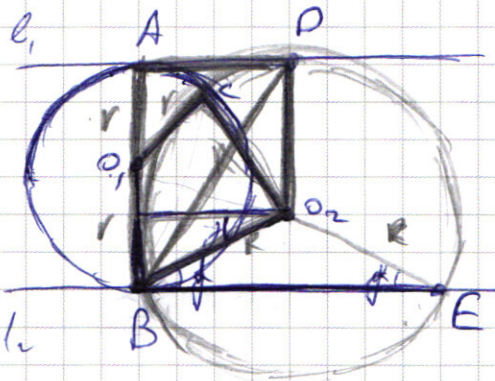
$$\frac{R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{R \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{R \cos \frac{\alpha}{2}} = 3$$

$$\angle O_2BE = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle O_2O_1 = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$S_{BO,CO_2} = \frac{1}{2} RR + \frac{1}{2} RR \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} RR (1 + \sin \frac{\alpha}{2})$$



$$RR \sin 90^\circ - \alpha = RR \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{r}{R \sin \alpha} = 3$$

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{2r - R}{R}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

$$\frac{r}{R \cdot \frac{2r - R}{R}} = \frac{r}{2r - R} = 3$$

$$r = 6r - 3R$$

$$3R = 5r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$$

$$R = \frac{5r}{3}$$

5) ~~ADD~~ ~~B~~ ~~треугольник~~ $\angle BAD = 90^\circ$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4r^2 + R^2 - (2r - R)^2 =$$

$$= 4r^2 + R^2 - 4r^2 + 4rR - R^2 = 4rR =$$

$$= \frac{4 \cdot 5r^2}{3} = \frac{20r^2}{3} = 9$$

$$r^2 = \frac{27}{20}, r = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{15}}{10} = 0,3\sqrt{15}, R = 0,5\sqrt{15}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{2} | 0 > 42 \text{ pay } p$
 $\frac{1}{2} | 0 \leq 28 \text{ pay } q$

$$p = 28 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$q = 28 \left(\frac{1}{2}\right)^{27}$$

$p - q = 0$

$$\log_2 x \in [0, 1] / \log_2 x = \log_2 6$$

$$x \in [1, 2] / x = 2^{\log_2 6 - \log_2 2}$$

$$= 6^{\log_2 6}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos 4x &= \cos(2x+2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \\ &= \cos 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \sin 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x = \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 4 \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= \underline{4 \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cdot \cos x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x+x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x \\ &= 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x \\ &= 2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x \\ &= 3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\cos 3x} &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \\ &= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cdot \cos x = \underline{\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x}\end{aligned}$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \frac{\cos 4x \cdot (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x \cdot (\cos 3x - \sin 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x}$$

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

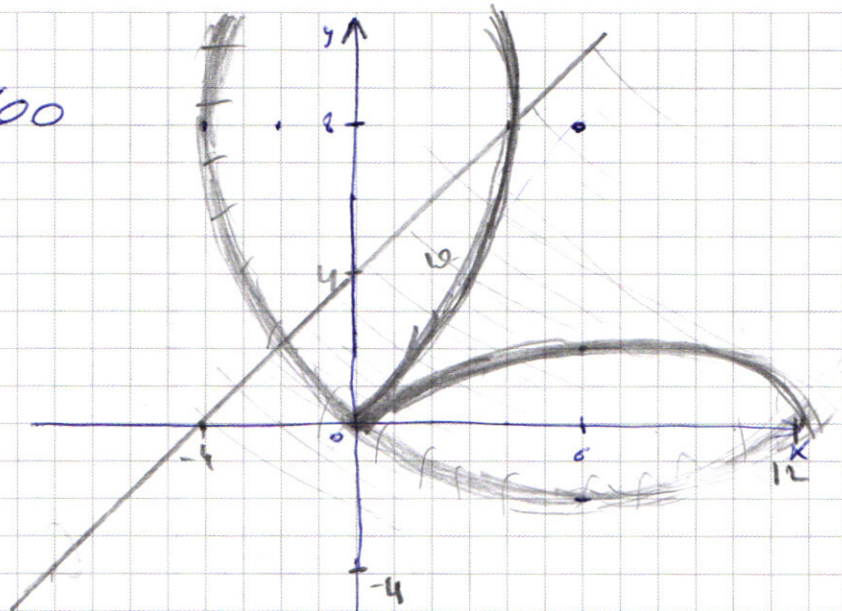
$$y > \sqrt{a}$$

$$x = y - 4$$

$$y < \sqrt{a}$$

$$x = 2\sqrt{a} - y - 4$$

$$y = 2\sqrt{a} - 4 - x$$



приближая вращая часть модуля уже пересекает два раза точку $\Rightarrow$ подвижная дуга имеет ровно одно пересечение $\Rightarrow$ точка (0, 0)

+ точка (4, 8)

все совпадение решений

$$0 = 2\sqrt{a} - 4$$

$$4 = 2\sqrt{a}$$

$$2 = \sqrt{a}$$

$$\underline{a = 4}$$

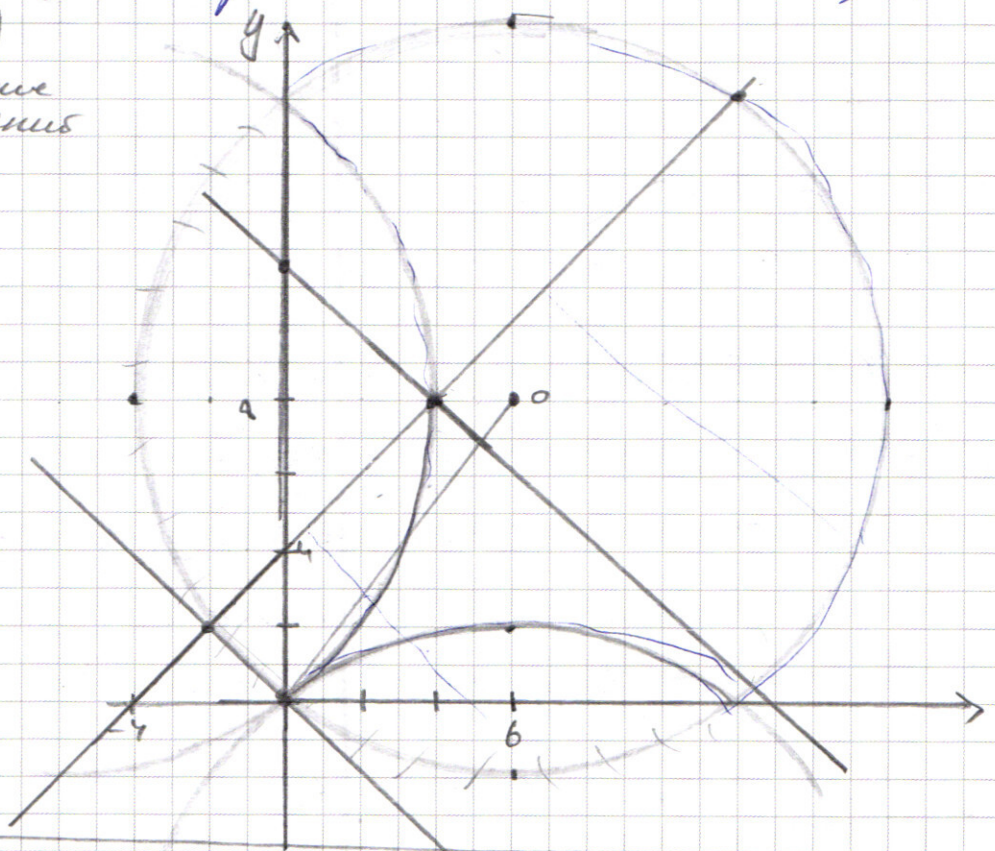
$$8 = 2\sqrt{a} - 4 - 4$$

$$8 = 2\sqrt{a} - 8$$

$$16 = 2\sqrt{a}$$

$$8 = \sqrt{a}$$

$$\underline{a = 64}$$



$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{\log_7 x} \\ y \leq \log_7 x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 80 + x - 7^{\log_7 x} &< \log_7 x \\ x &\leq y - 80 + 7^{\log_7 y} \\ y &\leq \log_7 (y - 80 + 7^{\log_7 y}) \end{aligned}$$