МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 16 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p-q$

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x-\sin 5x}+\frac{\sin 4x}{\cos 5x+\sin 5x}=-\sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}}-2^{\sqrt{4\log_2 x+3}}+21\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}}\leqslant 18$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO=\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO=18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x=-|y-\sqrt{a}|+6-\sqrt{a}, \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

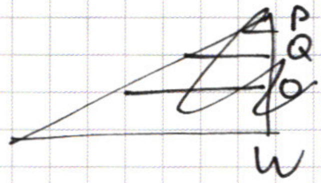
   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=5$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y\geqslant 70+x-4^{70}, \\ y\leqslant \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{4\log_2 x}+3} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \le 18,$



Пусть $t=\sqrt{\log_2 x}$, $t^2=\log_2 x$, $x=2^{t^2}$,

$8^t - 2^{2t+3} + 21 \cdot 2^{t^3} \le 18,$

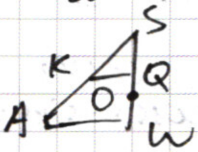
$2^{3t} - 8 \cdot 2^{2t} + 21 \cdot 2^{t^3} \le 18,$

Пусть $v=2^t$, $t=\log_2 v$,

$v^3 - 8v^2 + 21 \cdot 2^{v\log_2 v} \le 18,$

$7 \cdot 7 \cdot x^{\sqrt{\log_x 2}}$

$\sqrt{\log_x 2} = \sqrt{\frac{1}{\log_2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}},$



$8^t - 2^{2t+3} + 21 \cdot 2^t - 18 \le 0,$

$8-32+42-18=0,$

$2^{3t} - 8 \cdot 2^{2t} + 21 \cdot 2^t - 18 \le 0,$

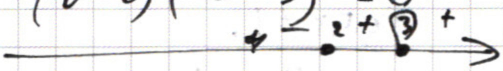
Пусть $v=2^t$,

$$\begin{array}{r|l} v^3-8v^2+21v-18 & v-2 \\ \hline -(v^3-2v^2) & v^2-6v+9 \\ -6v^2+21v & \\ -(-6v^2+12v) & \\ 9v-18 & \\ -(9v-18) & \\ 0 & \end{array}$$

$v^3 - 8v^2 + 21v - 18 \le 0,$

$(v-2)(v^2-6v+9) \le 0,$

$(v-2)(v-3)^2 \le 0$



~~SP=SO~~ ~~SP~~= SP=SQ

$v \le 2$, $v=3$,

$\left[\begin{array}{l} 2^t \le 2, \\ 2^t = 3, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t \le 1, \\ t=\log_2 3, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} \le 1, \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 x \le 1, \\ \log_2 x = \log_2^2 3. \end{array}\right.$

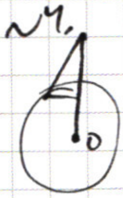
$\left[\begin{array}{l} x \le 2, \\ x = 2^{\log_2^2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 3} = 3^{\log_2 3} \end{array}\right.$

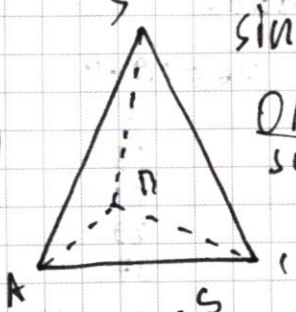
ОДЗ:

$x>0,$
$x\ne 1,$
$4\log_2 x \ge 0,$
$\log_2 x \ge 0,$
$\log_2 x \ge 1,$

$\log_x 2 \ge 0,$
$\frac{1}{\log_2 x} \ge 0,$
$\log_2 x \ge 0,$

№4.

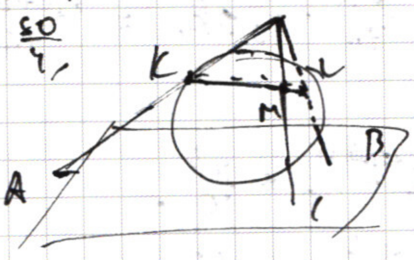


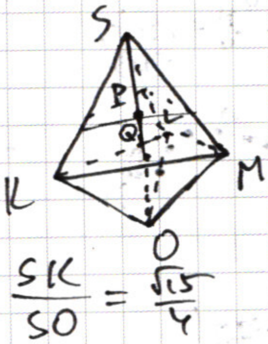


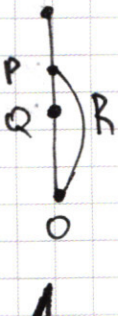
$\sin = \sqrt{1-\frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$

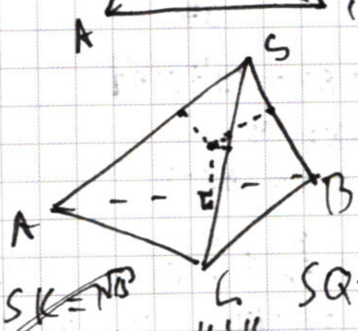
$\frac{OK}{SO} = \frac{1}{4},$

$R = \frac{SO}{4},$









~~KQ/KS~~ $\frac{SQ}{SK} = \frac{\sqrt{15}}{4},$ $\frac{SK}{SO} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

~~$SK=\sqrt{3}$~~

$SQ = \frac{\sqrt{15}SK}{4},$

$SK = \frac{4SQ}{\sqrt{15}},$ $SK = \frac{SO\sqrt{15}}{4},$

$SO = \frac{4SK}{\sqrt{15}},$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p = 0{,}5^{52}$ $\quad q = 0{,}5^{51}$ $\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2},$

$72 \cdot 4 = 288$ $\quad 81 + 64 = 145$ $\quad 289 - 145 = 144$ $\quad 289 + 288 = 577$

$\cos 5x = \cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x = (4\cos^3 x - 3\cos x)$

$\frac{\cos 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x - \cancel{\cos 4x \sin 5x}\ \sin 4x \sin 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2},$

$D = 289 + 288 = 577$

$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2},$ $\quad x = \frac{17 \pm 1}{2},$ $\quad \cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi \sin x = -\cos x$

$\cos 9x + \sin 9x = -\cos 10x \cdot \sqrt{2}, \quad | : \sqrt{2}$ $\quad \cos 5x \neq \sin 5x,$

$\cos\frac{\pi}{4}\cos 9x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 9x = -\cos 10x,$ $\quad \operatorname{tg} 5x \neq 1,$

$\cancel{\cos(9x}$ $\quad 19 \cdot 4 = 76$ $\quad 5x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k,$

$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 10x,$ $\quad x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{1}{5}\pi k,$

$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(10x - \pi),$ $\quad \cos 5x \neq -\sin 5x,$

$9x - \frac{\pi}{4} = \pm(10x - \pi) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$ $\quad 5x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{9x = 10x}\ 9x - \frac{\pi}{4} = 10x - \pi + 2\pi k, \\ 9x - \frac{\pi}{4} = -10x + \pi + 2\pi k, \end{array}\right.$ $\quad x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} = \frac{\pi + 2\pi k}{20}$

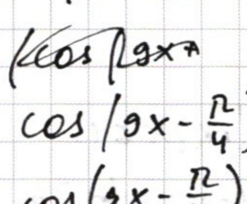
$25\pi + 40\pi l = 19\pi + 38\pi k,$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ 19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$ $\quad 6\pi = 40\pi l + 38\pi k,$ $\quad 3\pi = 20\pi l + 19\pi k,$ $\quad 20l + 19k = 3,$ $\quad 76 = 19 \cdot 4$

5, 13, 21, 29, 37

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$ $\quad x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi k, \left(= \frac{5\pi + 8\pi k}{76}\right)$

$\cancel{x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k},$ ОДЗ



$-\frac{\pi + 2\pi k}{4} = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10},$ $\quad 5 + 8x = 19k, x \in \mathbb{Z}$

$\cancel{8x = 14}$

$\frac{\pi k}{10} = -\frac{6\pi}{20},$ $\quad 8x = 19k - 5$

$\frac{\pi k}{10} = -\frac{3\pi}{20}$

$\frac{5\cdot \cancel{19}\pi + 8\cdot\cancel{19}\pi l}{2}$

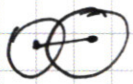
$\frac{5\pi + 8\pi l}{76} = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k, \quad |\cdot 19,$

$\frac{5\pi + 8\pi l}{2} = \frac{19\pi}{10} + \frac{19\pi}{5}$ $\quad \frac{5\pi + 8\pi l}{38} = \frac{\pi + 2\pi k}{10},$ $\quad \frac{5\pi + 8\pi l}{19} = \frac{\pi + 2\pi k}{5},$ $\quad \cancel{5\pi + 8\pi k}$ $\quad \frac{5\pi + 8\pi l}{38} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k,$

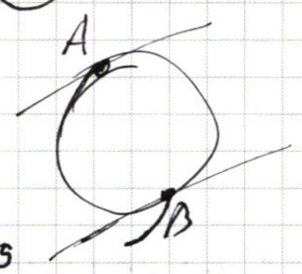
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{17}{2}+\frac{\sqrt{577}}{2}-8\right)^2+\left(y-15\right)^2=289,$



$\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt{577}}{2}\right)^2+y^2-30y+225=289,$



$y^2-30y-64+\frac{1+2\sqrt{577}+577}{4}=0,$

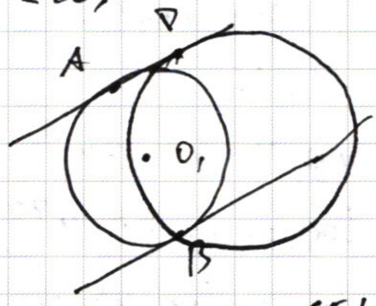
~~$>29-\leq 29$~~

$y^2-30y-64+\frac{578+2\sqrt{577}}{4}=0,$

~~≥ 51~~ $-\ >29$

$>51-\leq 29,$

$\frac{17+\sqrt{577}}{2}=-\frac{5+\sqrt{577}}{2}-\sqrt{a}+6-\sqrt{a},$



$\frac{17}{2}+\frac{\sqrt{577}}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{577}}{2}-2\sqrt{a}+6,$

$2\sqrt{a}=6-\frac{22}{2}-\frac{2\sqrt{577}}{2}<0,$

~~$\sqrt{a}$~~ $2\sqrt{a}=$ ~~7~~

0,5

$>29-\leq 51$

~~$>29-\leq$~~

$x=y-\sqrt{a}+6-\sqrt{a},$

$p-q=1-1+p-q=$

$y=x+2\sqrt{a}-6,$

$=$ ~~$(p-1)(1-p)$~~

~~$-8=2\sqrt{a}-6,$~~

$=1-q-(1-p)$

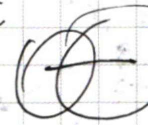
$0=-8+2\sqrt{a}-6$

$1-q$ — орёл больше 29 раз — d

$d-t \Rightarrow$ орёл выпадет

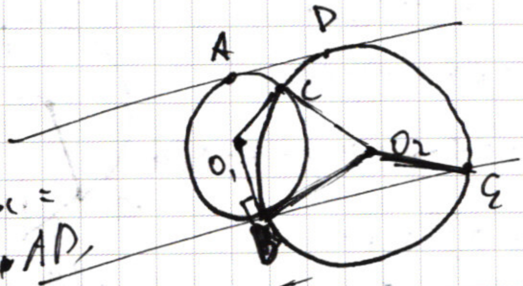
$1-p$ — орёл меньше или равно 51 — t

d — >29, t — ≤ 51



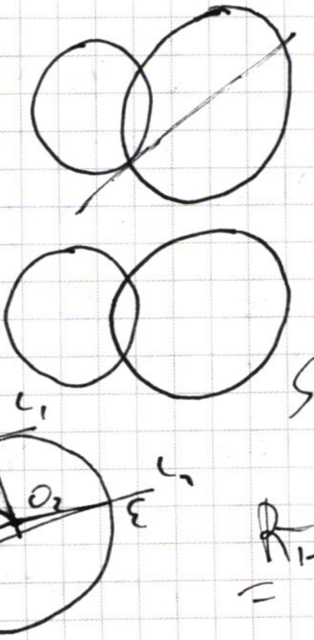
p — больше 51, d — ~~меньше~~ не больше 51

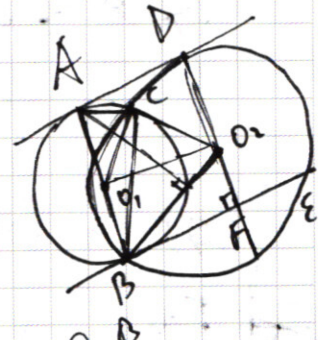
~~t — меньше~~ 29, ~~d не~~



$S_{BO_2Bc}=$

$=O_2F\cdot AD,$

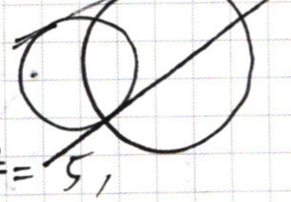




O_2B

$S_{O_1BO_2C}=$ ~~$\frac{CB\cdot O_1O_2}{2}$~~

$\frac{CB\cdot O_1O_2}{2},$



$\frac{CB\cdot O_1O_2}{2O_2F\cdot AD}=5,$

~~$R_1+R_2=(R_1-R_2)=$~~

$=$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70} \\ y \leq \log_4 x, \end{cases}$$

$x \geq 1$,

$\log_4 x = 70 + x - 4^{70}$,

$\log_4 x - x = 70 - 4^{70}$,

$\log_4 x - \log_4 4^x = 70 - 4^{70}$,

$\log \frac{x}{4^x} = 70 - 4^{70}$,

$x = 4^{70}$, $70 = 70$,

b_1, qb_1, $q^2 b_1$, $q^3 b_1$ $\quad S_n a$

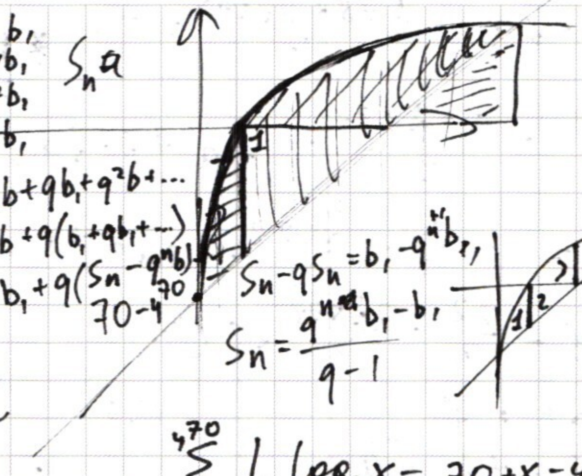
$S_n = b + qb_1 + q^2 b + \ldots$

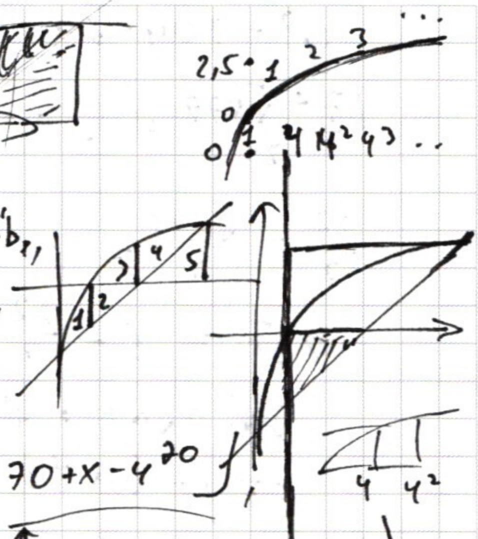
$S_n + b + q(b_1 + qb_1 + \ldots)$

$S_n = b_1 + q(S_n - q^n b_1)$

$S_n - qS_n = b_1 - q^{n+1} b_1$

$S_n = \frac{q^{n+1} b_1 - b_1}{q-1}$



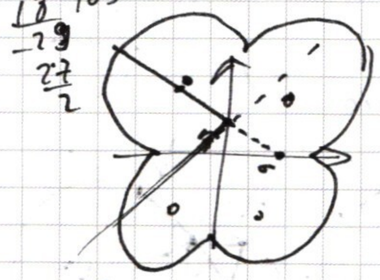


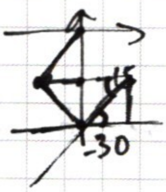
$\sum_{x=1}^{4^{70}} [\log_4 x - 70 + x - 4^{70}]$

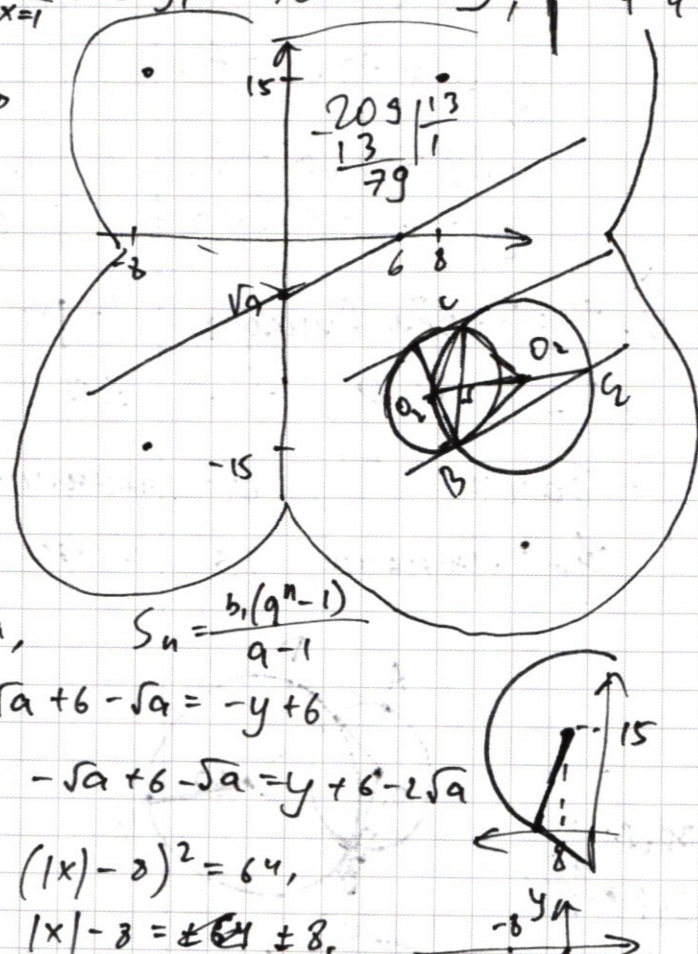
$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 17^2, \end{cases}$$

$\frac{-209}{\frac{13}{79}} \Big| \frac{13}{1}$

$\frac{-209}{\frac{18}{-29}} \Big| \frac{7}{69}$, $\frac{27}{2}$





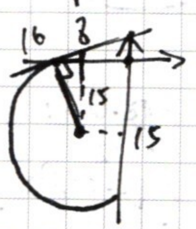


I. $y \geq -\sqrt{a}$, $\quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$

$x = -y + \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a} = -y + 6$

II. $x = y - \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a} = y + 6 - 2\sqrt{a}$

$\sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$



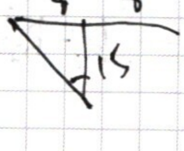
$(|y| - 15)^2 = 225$, $\quad (|x| - 8)^2 = 64$,

$|y| - 15 = \pm 15$, $\quad |x| - 8 = \cancel{\pm 64} \pm 8$,

$y = \pm 30$

$x = y + 6 - 2\sqrt{a}$,

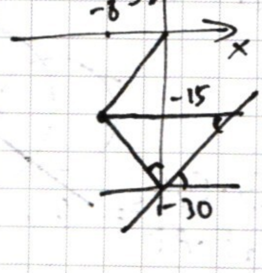
$y = x - 6 - 2\sqrt{a}$,



$tg = \frac{15}{8}$

$4^{70} - 4^{30}$, 4^{69}

$\frac{8}{15}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а точки, лежащие на кривой $y=\log_4 x$ не посчитали:

$T = F_1 + F_3 - F_2 - 4^{70} + 70 + 70 =$

$= 2\cdot 4^{139} - 138\cdot 4^{69} - 35\cdot 4^{70} + 69\cdot 35 + 71\cdot 4^{70} - 35\cdot 71 + \frac{4^{71}-1}{3} - 4^{70} + 140 =$

$= 2\cdot 4^{139} - 138\cdot 4^{69} + 35\cdot 4^{70} + \frac{4^{71}}{3} - \frac{1}{3} - 35\cdot 2 + 140 =$

$= 2\cdot 4^{139} - 138\cdot 4^{69} + 150\cdot 4^{69} + \frac{16}{3}\cdot 4^{69} + 70 - \frac{1}{3} =$

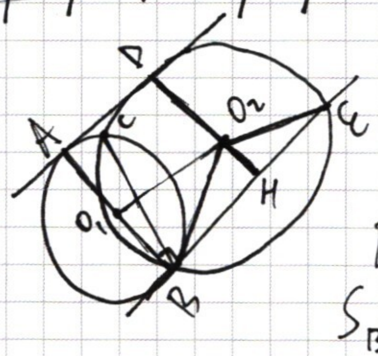
$= 2\cdot 4^{139} + \left(12+\frac{16}{3}\right)4^{69} + \frac{210}{3} - \frac{1}{3} = 2\cdot 4^{139} + \left(3+\frac{4}{3}\right)4^{70} + \frac{209}{3} =$

$= 2\cdot 4^{139} + \frac{13\cdot 4^{70}}{3} + \frac{209}{3}$

Ответ: $2\cdot 4^{139} + \frac{13}{3}\cdot 4^{70} + \frac{209}{3} = 2\cdot 4^{139} + 4\frac{1}{3}\cdot 4^{70} + 69\frac{2}{3}$

~~№1. $p-q = 1-1+p-q = 1-q-1+p$ $(1-q)-(1-p)$~~

№6.



$\S$. $O_1O_2 \perp BC$, так как это линия центров и точки пересечения окружностей,

$S_{BO_1CO_2} = \frac{BC\cdot O_1O_2}{2}\cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} BC\cdot O_1O_2$,

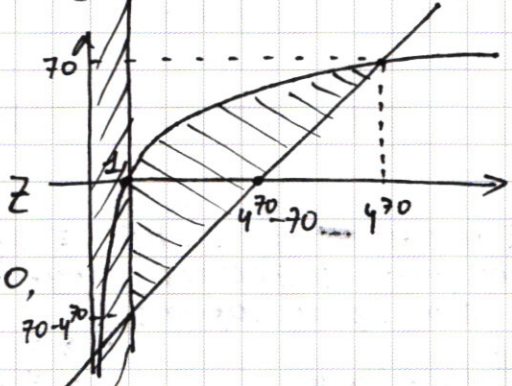
Пусть H – проекция O_2 на BE,

$S_{BO_2E} = \frac{O_2H\cdot BE}{2} = \frac{O_2H\cdot 2BH}{2} = BH\cdot O_2H$,

$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{BC\cdot O_1O_2}{2\cdot BH\cdot O_2H} = 5$

Однако, вершина „галочки" лежит на высоте $y=\sqrt{a}>0$, значит этот случай невозможен

Ответ: 9; 49



№7. $\begin{cases} y \geq 70+x-4^{70}, \\ y \leq \log_4 x, \quad x,y\in \mathbb{Z} \end{cases}$

Рассматриваем только $x>0$, тоесть $x\geq 1$.

Заметим, что при $x\geq 1$ прямая $y=x+70-4^{70}$ пересекает Ox в т. $(4^{70}-70;0)$, а кривую $y=\log_4 x$ — в т. $(4^{70};70)$, OY в т. $(0;70-4^{70})$

Посчитаем кол-во точек $(x;y)$ между прямыми $y=x+70-4^{70}$ $y=0$ и ~~y~~ $x=1$ включая принадлежащие этим прямым; эту фигуру назовём F_1

$\frac{1+4^{70}-70}{2}\cdot(4^{70}-70)=(4^{70}-69)(2\cdot 4^{69}-35)=$

$=2\cdot 4^{139}-138\cdot 4^{69}-35\cdot 4^{70}+69\cdot 35,$

Далее рассмотрим фигуру, ограниченную линиями $y=70$, $x=1$ и $y=\log_4 x$, далее F_2.

~~При $x=x_0$ внутри неё на~~ Для $x=x_0$ она содержит 4^{x_0} точек с целыми координатами (учитывая точки, лежащие на ~~пр~~ линиях).

Значит всего в ней $4^0+4^1+4^2+\ldots+4^{70}=\frac{1\cdot(4^{71}-1)}{4-1}$ таких точек.

Посчитаем такие точки в фигуре между $y=x+70-4^{70}$, $y=0$, $y=70$, $x=1$, далее F_3,

$\frac{(4^{70}-70)+4^{70}}{2}\cdot 71=(4^{70}-35)\cdot 71=71\cdot 4^{70}-35\cdot 71$

Пусть F_4 — фигура, ограниченная $y=0$, $y=70+x-4^{70}$ и $y=\log_4 x$.

Нам нужно найти кол-во точек с целыми координатами между $y=x+70-4^{70}$ и $y=\log_4 x$, назовём эту фигуру T.

~~Тогда~~ Далее под F_1, F_2, F_3, F_4, T подразумевается количество точек с целыми координатами внутри соответствующих фигур (включая границы): Тогда

$T=F_1+(F_4)=F_1+(F_3-F_2)$

Учтём, что при таком подсчёте точки с $x=0$ посчитаны дважды,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

То есть его тангенс $-\frac{8}{15}$. Значит прямая с наклоном 1, проходящая через $(-8;0)$ пересечет окружность дважды. Найдём a, при котором это происходит:

$0 = -|-8-\sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}$,

$-8-\sqrt{a}+6-\sqrt{a}=0$,

$-2\sqrt{a}=2$,

$\sqrt{a}=-1$, $a \in \varnothing$ — этот случай невозможен

$-8 = -|0-\sqrt{a}|+6-\sqrt{a}$,

$-8 = -2\sqrt{a}+6$,

$2\sqrt{a}=14$,

$a=49$,

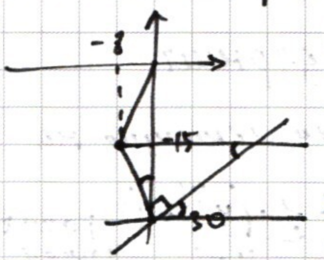
II. Галочка пересекает окружности в 2 точках и начало координат,

$0 = -|0-\sqrt{a}|+6-\sqrt{a}$,

$6-2\sqrt{a}=0$,

$a=9$

III. Рассмотрим точку $(0;-30)$. Из рисунка видно, что её угол наклона равен углу между точками $(-8;-15)$ и $(0;-15)$ с вершиной в ~~$(-30;0)$~~ $(0;-30)$.



Его тангенс $-\frac{8}{15}$. Значит, прямая с тангенсом угла наклона 1 не может, пройдя через $(0;-30)$ пересечь окружность из III четверти в какой-либо другой точке.

IV. 3 решения существуют, когда „галочка" пересекает окружность из IV четверти дважды. Это начинается, когда её вершина лежит на окружности, а заканчивается, когда нижняя ветвь её касается

Т.к. вершина лежит на прямой $x=-y+6$, то есть $y=-x+6$, то:

1) $(+x-8)^2+(-(-x-6)-15)^2=17^2$,

$(x-8)^2+(x-9)^2=17^2$,

$x^2-16x+64+x^2-18x+81=289$,

$2x^2-34x-144=0$,

$x^2-17x-72=0$,

$D=17^2+4\cdot 72=577$

$x=\frac{17\pm\sqrt{577}}{2}$,

Т.к. мы рассматриваем IV четверть, то $x \geq 0$,

$x=\frac{17+\sqrt{577}}{2}$,

Тогда

$y=-\frac{17+\sqrt{577}}{2}+6=$

$=\frac{-5-\sqrt{577}}{2}=-\frac{5+\sqrt{577}}{2}$

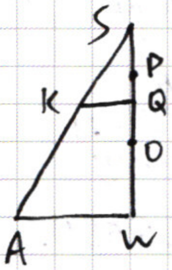
$\cancel{S_{\triangle K_1L_1M_1} = \frac{4}{5} S_{\triangle KLM}}$ $S_{\triangle KLM} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 S_{\triangle K_1L_1M_1} = \cancel{\frac{5}{4}\cdot 4 = 5} \; \frac{25}{16}\cdot 4 = \frac{25}{4}$

б) $KLM \parallel ABC$, значит $SO \perp ABC$, т.к. $SO \perp KLM$.

Пусть ω касается ABC в т. W, $W \in SO$ т.к. $OW \perp ABC$ и $SO \perp ABC$.

Тогда OW – радиус ω, $OW = OP = \frac{1}{4} SO$,

$SW = SO + OW = \frac{5}{4} SO = \frac{5}{4}\cdot 18 = \frac{45}{2}$.



$KQ \parallel AW \Rightarrow \triangle SKQ \sim \triangle SAW$ по двум углам.

$KLM \parallel ABC$, значит, очевидно, $\triangle KLM \sim \triangle ABC$,

$k = \frac{KQ}{AW} = \frac{SQ}{SW} = \frac{15/16 \cdot SO}{45/2} = \frac{15\cdot 2\cdot 18}{16\cdot 45} = \frac{3}{4}$,

$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \frac{9}{16}$, $S_{ABC} = \frac{16 S_{KLM}}{9} = \frac{25\cdot 16}{4\cdot 9} = \frac{100}{9}$,

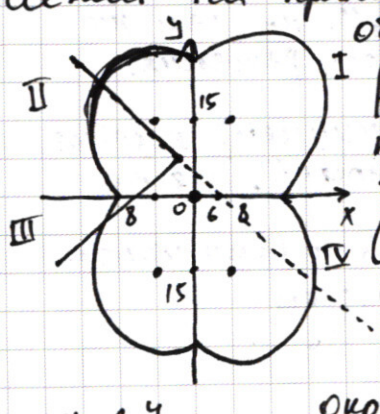
$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}\cdot SW = \frac{1\cdot 100\cdot 45}{3\cdot 9\cdot 2} = \frac{250}{3}$

Ответ: а) $\frac{25}{4}$ б) $\frac{250}{3}$

№5. $\begin{cases} x = -|y-\sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 17^2, \end{cases}$

Второе уравнение системы задаёт окружность с центром в ~~обрез~~ т. $(8;15)$ и радиусом 17, обрезанную осями OX и OY, а так же ~~её~~ 3 симметричные ей окружности относительно осей OX и OY и начала координат. Кроме того, ему удовлетворяет начало координат.

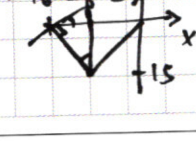
Относительно оси OX первое уравнение задаёт „галочку", правый конец которой (угол) находится на $y = \sqrt{a}$. При этом он лежит на прямой $x = -y + 6$. Коэффициенты наклона обеих прямых „галочки" – 1 и –1.



Рассмотрим случаи, когда „галочка" пересекает окружности или начало координат в 3 точках.

Отметим, что окружности пересекают координатные оси в точках $(16;0)$; $(-16;0)$; $(30;0)$ и $(-30;0)$

I. Рассмотрим точку $(-16;0)$ и часть окружности из III четверти плоскости. Угол



наклона касательной в этой точке равен углу между точками $(-16;0)$ и ~~(-8)~~ $(-8;0)$ с вершиной в $(-8;-15)$,

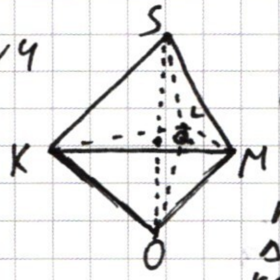
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

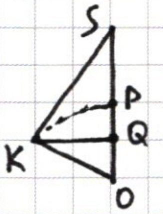
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

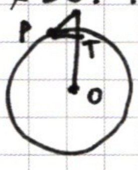
№4



Заметим, что $SK=SM=SL$ как касательные из одной точки, $OK=OL=OM$ как радиусы сферы.

Пусть H_1 и H_2 - проекции точек S и O на плоскость KLM. Заметим, что $\triangle SKH_1=\triangle SLH_1=\triangle SMH_1$ и $\triangle OKH_2=\triangle OLH_2=\triangle OMH_2$ по гипотенузе и общему катету. Значит $KH_2=LH_2=MH_2$, $KH_1=LH_1=MH_1$, то есть $H_1=H_2=Q$ - центр описанной окружности $\triangle KML$, $Q\in SO$.





Пусть P - точка сферы, ближайшая к S. Предположим, $P\notin SO$. Тогда опустим перпендикуляр PT на SO. Очевидно, T лежит внутри окружности. Тогда в $\triangle SPT$ $SP>ST>SP_1$, где $P_1=ST\cap\omega$, ω - данная сфера. Противоречие $\Rightarrow P\in SO$, OP - радиус ω.

Рассмотрим $\triangle SKO$. $OK\perp SK$ (ω касается ~~SK~~ SA в т. K), $SQ\perp QK$. Пусть R - радиус ω.

По условию. $\angle KSO=\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\angle KSO=\frac{\sqrt{15}}{4}\Rightarrow\sin\angle KSO=\frac{1}{4}$,

$\cancel{\frac{SK}{SO}=\frac{\sqrt{15}}{4}}$, $\frac{OK}{SO}=\frac{R}{SO}=\frac{1}{4}$, ~~KQ~~ $R=\frac{1}{4}SO=OP$,

$SP=OS-OP=SO-\frac{1}{4}SO=\frac{3}{4}SO$

Пусть α - плоскость, касающаяся ω в т. P. $\alpha\perp SO$, $SO\perp KLM\Rightarrow KLM\parallel\alpha$.

Пусть $\alpha\cap SK=K_1$, $\alpha\cap SL=L_1$, $\alpha\cap SM=M_1$.

$K_1P\parallel KQ$, P - центр описанной окружности $\triangle K_1L_1M_1$ по тем же соображениям, что и в начале ~~доказательства~~ решения.

Т.К. $\alpha\parallel KLM$, очевидно, $\triangle K_1L_1M_1\sim\triangle KLM$. Коэффициент подобия равен отношению радиусов описанных окружностей. Так же заметим, что $k=\frac{K_1P}{KQ}=\frac{SP}{SQ}$, т.к. $\triangle SK_1P\sim\triangle SKQ$ по двум углам.

$\frac{SK}{SO}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $SK=\frac{\sqrt{15}\,SO}{4}$, $\frac{SQ}{SK}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $SQ=\frac{\sqrt{15}}{4}S\cancel{K}=\frac{15\,SO}{16}$,

$k=\frac{SP}{SQ}=\frac{3/4\,SO}{15/16\,SO}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{16}^{4}}{{}_{5}\cancel{15}\cdot\cancel{4}}=\frac{4}{5}$, $\frac{S_{\triangle K_1L_1M_1}}{S_{\triangle KLM}}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$,

№3. $8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{4\log_2 x}+3} + 21x^{\sqrt{\log_x 2}} \le 18,$

Пусть $t = \sqrt{\log_2 x}$, тогда $t^2 = \log_2 x$, $x = 2^{t^2}$,

$\sqrt{4\log_2 x} + 3 = 2\sqrt{\log_2 x} + 3 = 2t + 3$, $\sqrt{\log_x 2} = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} = \frac{1}{t}$,

$8^t - 2^{2t+3} + 21\cdot 2^{t^2\cdot\frac{1}{t}} - 18 \le 0,$

$2^{3t} - 8\cdot 2^{2t} + 21\cdot 2^t - 18 \le 0,$

$$\begin{array}{r|l} v^3-8v^2+21v-18 & v-2 \\ \cline{2-2} -\ v^3-2v^2 & v^2-6v+9 \\ \hline -6v^2+21v & \\ -\ -6v^2+12v & \\ \hline 9v-18 & \\ -\ 9v-18 & \\ \hline 0, & \end{array}$$

Пусть $v = 2^t$,

$v^3 - 8v^2 + 21v - 18 \le 0,$

$(v-2)(v^2-6v+9) \le 0,$

$(v-2)(v-3)^2 \le 0,$

$-\quad 2 \quad + \quad 3 \quad +$

$\left[\begin{array}{l} v \le 2, \\ v = 3, \end{array}\right.$

Вернёмся к переменной t:

$\left[\begin{array}{l} 2^t \le 2^1, \\ 2^t = 3, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t \le 1, \\ t = \log_2 3, \end{array}\right.$

Вернёмся к переменной x:

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} \le 1, \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le 1, \\ \log_2 x = \log_2 3\cdot\log_2 3, \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x \le 2 \\ x = 2^{\log_2 3\cdot\log_2 3} = 3^{\log_2 3}, \end{array}\right.$

ОДЗ:

1. $x > 0,$
2. $x \ne 1$
3. $\log_2 x \ge 0$ $(\Rightarrow 4\log_2 x \ge 0)$
   $x \ge 1,$
4. $\log_x 2 \ge 0,$
   $\frac{1}{\log_2 x} \ge 0,$
   $x \ge 1,$

Значит $\left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}, \\ x \in (1; \infty), \end{array}\right. \Rightarrow x \in (1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}$

Ответ: $x \in (1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$,

ОДЗ:

$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x \neq 0, \\ \cos 5x + \sin 5x \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 5x \neq \sin 5x, \\ \cos 5x \neq -\sin 5x, \end{cases}$

$\Downarrow$

$5x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z,$

$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k;$

$x \neq \frac{\pi + 2\pi k}{20}$

$\frac{\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x(\cos 5x - \sin 5x)}{(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)} = -\sqrt{2}$,

$\frac{\cos 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$

$\frac{\cos(5x+4x) + \sin(5x+4x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$,

$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$,

$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2}\cos 10x, \quad \Big| : \sqrt{2}$,

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 9x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 9x = -\cos 10x$,

$\cos 9x \cos\frac{\pi}{4} + \sin 9x \sin\frac{\pi}{4} = \cos(10x - \pi)$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) = \cos(10x - \pi)$,

$\left[\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{4} = 10x - \pi + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 9x - \frac{\pi}{4} = -10x + \pi + 2\pi l,\ l \in Z, \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ 19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi l, \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ — не удовлетворяет ОДЗ} \\ x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi}{19}l = \frac{5\pi + 8\pi l}{76}, \end{array}\right.$

$\frac{5\pi + 8\pi l}{76} = \frac{\pi + 2\pi k}{20}, \quad \Big| \cdot 4, : \pi, \cdot 19 \cdot 5$

$25\cancel{\pi} + 40\cancel{\pi}l = 19\cancel{\pi} + 38\cancel{\pi}k$,

$20l - 19k = -3$,

Никакие l и k не удовлетворяют этому равенству, значит $x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi}{19}l$ удовлетворяет ОДЗ

Ответ: $x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi}{19}l,\ l \in Z$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)