

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Всего возможных исходов подбрасывания монеты 2^{90}
 количество вариантов, в которых орёл выпадет
 не менее 55 раз равно количеству вариантов,
 в которых орёл выпадет 55 раз + число вариантов,
 в которых орёл выпадет 56 раз + и т.д.
 + количество вариантов, в которых орёл выпадет 90 раз.
 То есть $p = (C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + C_{90}^{57} + \dots + C_{90}^{90}) : 2^{90}$
 C_n^k — это n -число бросков k -число выпавших орлов
 будет соответствовать количеству вариантов,
 в которых орёл выпадет k раз т.к. количество вариантов
 соответствующим количеству возможных перестановок
 к орлов среди n -монет.

аналогично

$$q = (C_{90}^{34} + C_{90}^{33} + \dots + C_{90}^0) : 2^{90}$$

Так как $C_n^k = C_n^{n-k}$ ($C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$)

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

то $C_{90}^{34} = C_{90}^{56}$, $C_{90}^{33} = C_{90}^{57}$, $\dots$, $C_{90}^0 = C_{90}^{90}$, $C_{90}^0 = C_{90}^{90}$

$$\text{Значит } p - q = \frac{C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \dots + C_{90}^{90} - C_{90}^{34} - \dots - C_{90}^0}{2^{90}} = \frac{C_{90}^{55}}{2^{90}} =$$

$$= \frac{90!}{55! \cdot 35! \cdot 2^{90}}$$

Ответ: $\frac{90!}{55! \cdot 35! \cdot 2^{90}}$

$$2. \frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$$

Решение:

$$\frac{\cos 8x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 8x (\cos 3x + \sin 3x)}{(\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \cos 8x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) + \sqrt{2} \cdot \sin 8x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot (\cos 8x (-\sin(3x - \frac{\pi}{4})) + \sin 8x \cdot \sin(3x + \frac{\pi}{4}))}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

(т.к. $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha$) то:

$$\frac{-\cos 8x \cdot \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sin 8x \cdot \cos(3x - \frac{\pi}{4}) - \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\frac{\sin(8x - 3x + \frac{\pi}{4}) - \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\frac{\cos(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\begin{cases} \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 6x \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6} \end{cases}, n, k, l \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{4} - 2\pi n \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6} \quad | \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$-3 - 24n \neq 1 + 2l$$

$$-24n - 2l \neq 4 \quad | :2$$

$$-12n - l \neq 2 \quad (\text{Дисконтное уравнение})$$

$$n \neq f \quad f \in \mathbb{Z}$$

$$l \neq -2 - 12f$$

т.к.

нет такого n , при котором
есть решение

$$\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6} \quad | \cdot \frac{132}{\pi}$$

$$3 + 24k \neq 11 + 22l$$

$$24k - 22l \neq 8 \quad | :2$$

$$12k - 11l \neq 4$$

$$k \neq 4 + 11m$$

$$l \neq 4 + 12m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{44} + \frac{8\pi + 22\pi \cdot m}{11}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 4 + 11m$, $m \in \mathbb{Z}$.

3.

$$27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{\sqrt[4]{\log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leq 48$$

Перемножим:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$3^{3 \cdot \sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2 \cdot \sqrt[4]{\log_3 x}} + 40 \cdot 3^{\log_3 x \cdot \sqrt{\log_x 3}} - 48 \leq 0$$

(т.к. $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow \sqrt{\log_x 3} = \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}$)

$$3^{3 \cdot \sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2 \cdot \sqrt[4]{\log_3 x}} + 40 \cdot 3^{\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_3 x}}} - 48 \leq 0$$

$$3^{3 \cdot \sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2 \cdot \sqrt[4]{\log_3 x}} + 40 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} - 48 \leq 0$$

Пусть $3^{\sqrt{\log_3 x}} = t$, $t > 0$

$$t^3 - 11 \cdot t^2 + 40t - 48 \leq 0$$

(Заметим, что при $t=3$ выполняется равенство:

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 = 0$$

вынесем множитель $t-3$, получим:

$$(t-3)(t^2 - 8t + 16) \leq 0$$

$$(t-3)(t-4)^2 \leq 0$$

$\Rightarrow t \in (0; 3) \cup \{4\}$.

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 4 \\ 0 < 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{\log_3 x} = \log_3 4 \\ \begin{cases} 3^{\sqrt{\log_3 x}} > 0 \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \log_3 x = (\log_3 4)^2 \\ \begin{cases} \sqrt{\log_3 x} > 0 \\ \sqrt{\log_3 x} \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3^{(\log_3 4)^2} \\ \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4^{\log_3 4} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \end{cases} \quad x \in (0; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}$$

Ответ: $(0; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}$

5. $y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25$$

График функции $y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$ это график функции $y = |x|$, сдвинутой вправо на $\sqrt{a}$, и сдвинутой вверх на $\sqrt{a} - 2$

То есть в зависимости от параметра a график функции $y = |x|$ сдвигается вдоль прямой $y = x - 2$ (т.е. координаты сдвига вверх и вправо равны)

График уравнения $(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25$

это часть окружности, заданной уравнением $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, при $x \geq 0, y \geq 0$, отрезанная относительно осей абсцисс и затем отражённая относительно осей ординат.

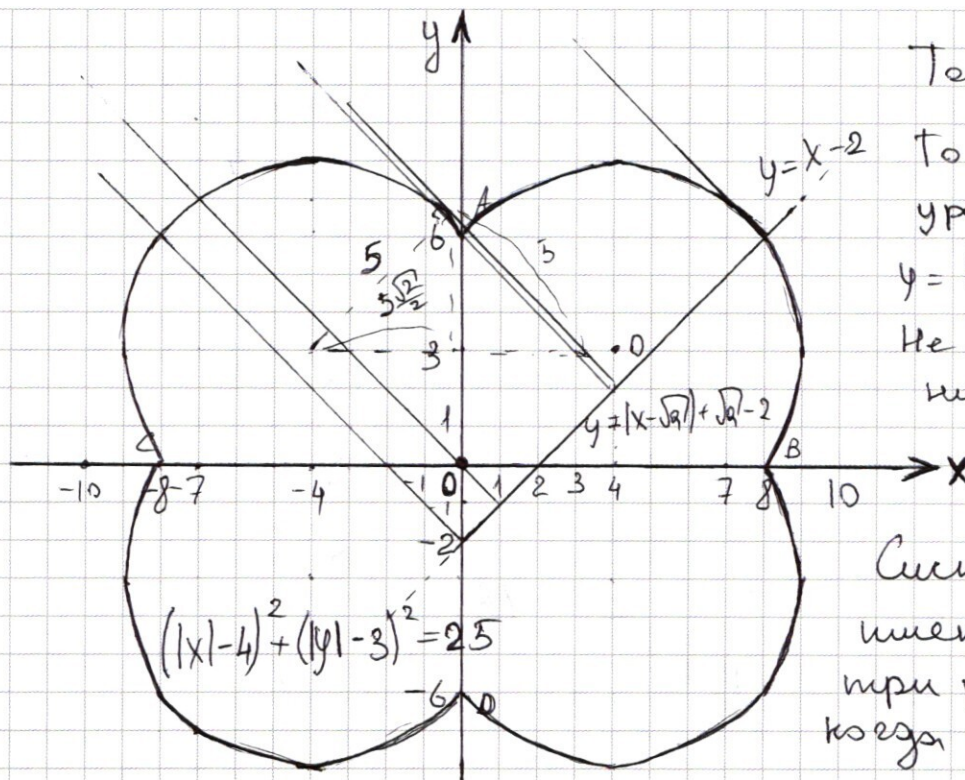
Построим графики уравнений и функции:

График уравнения $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ или $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$ - окружность, радиус 5,

с центром в точке $O(4; 3)$

Заметим, что точка $O(0; 0)$ будет принадлежать графику уравнения, а точки касания окружности с осью координат будут иметь координаты:
 $A(0; 6); B(8; 0); C(-8; 0); D(0; -6)$ т.к. $(3^2 + 4^2 = 5^2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Тем как $\sqrt{a} \geq 0$

То график
уравнения
 $y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$

Не опускается
ниже точки $(0; -2)$

Система будет
иметь ровно
три решения,
когда графики

уравнения и функции будут иметь ровно 3
точки пересечения.

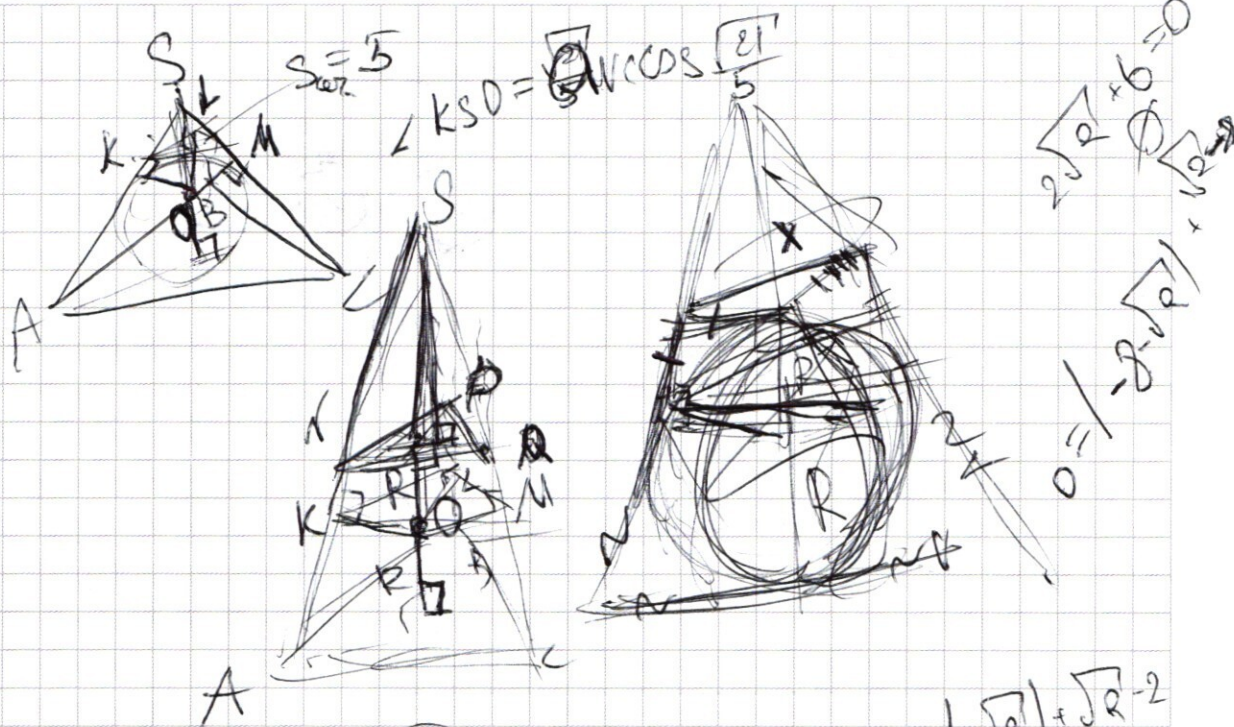
Это достигается когда график функции
проходит через точку $O(0;0)$, когда график
проходит через точку $A(0;6)$ и когда левый
ветвь графика функции будет касаться окружности (3)

(Эти точки, при которых левый ветвь графика функции
касается графика уравнения в 2-х точках т.е.
эти графики всегда имеют общую точку $(8;6)$
пока $\sqrt{a} \leq 8$) При $\sqrt{a} = 8$ две точки пересечения.

Также
3) По геометрическому построению абсциссы точки
касания находим $\sqrt{a}$ равна $(-4 + 5\frac{\sqrt{21}}{2})$,
а ордината равна $(3 + 5\frac{\sqrt{21}}{2})$
Подставляем эти значения в уравнение и
находим a :

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



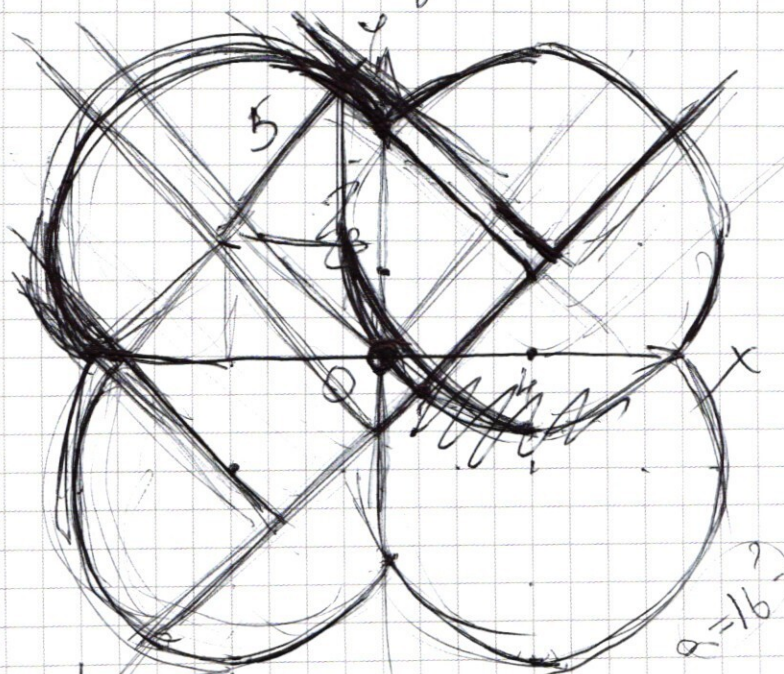
№ 5.

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{9}| + \sqrt{9} - 2 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

3 решения

$$\begin{aligned} \sqrt{9} &= 4 \\ a &= 16 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

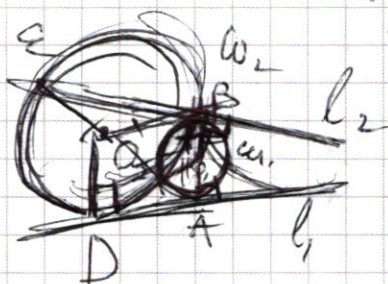
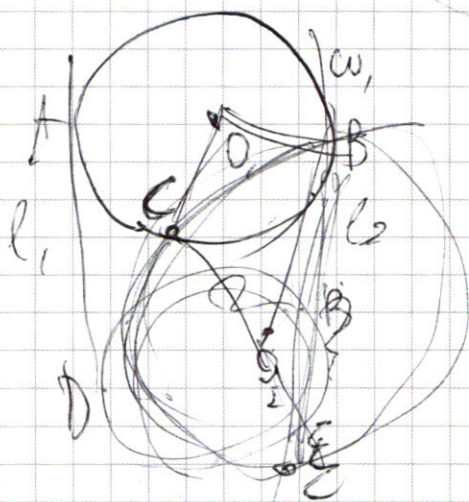
$$x > \sqrt{9}$$



$$7 = -1 - \sqrt{9} + \sqrt{9} - 2$$

$$8 = 2\sqrt{9}$$

$$\begin{aligned} y &= x - 2 \\ &\text{прямая} \\ y &= |x - \sqrt{9}| + \sqrt{9} - 2 \\ y &= |x| - \\ &\text{сдвигаем на} \\ &\sqrt{9} - \text{вправо} \\ &\text{и на } \sqrt{9} - 2 \\ &\text{вверх} \end{aligned}$$



$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{2R_1 - R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{2R_1 - R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\gamma + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$R_2^2 \sin \gamma$$

$$R_2^2 \sin \beta + R_1^2 \sin \alpha$$

$$2 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot \sin \gamma$$

$$R_2^2 \sin \gamma = R_1 R_2 \sin \gamma$$

$$R_2^2 \sin \gamma = R_1 R_2 \sin \gamma$$

$$R_2^2 \sin \gamma = R_1 R_2 \sin \gamma$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma} = \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{R_2}{R_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma} = \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{R_2}{R_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma} = \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{R_2}{R_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{2R_1 - R_2}{R_1}}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{2R_1 - R_2}{R_1}}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{2R_1 - R_2}{R_1}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. p не меньше 55

q не меньше 35

$$C = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

всего — 2^{90} возможных вариантов

$$p = C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + C_{90}^{57} + \dots + C_{90}^{90}$$

$$q = C_{90}^{34} + \dots + C_{90}^{35} + \dots + C_{90}^{90}$$

$$p - q = \frac{C_{90}^{55}}{55! \cdot 35!} = \frac{90!}{55! \cdot 35!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot \dots \cdot 56}{35! \cdot 2^{90}}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$18 + 9 + 6 + 5 + \dots$$

$$2. \frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 8x (\cos 3x - \sin 3x) + (\cos 3x + \sin 3x) \sin 8x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 3x (\cos 8x + \sin 8x) + \sin 3x (\sin 8x - \cos 8x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos 3x \sin \left(8x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 3x \sin \left(8x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos \left(8x - 3x - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos 6x} = 1 \Rightarrow \frac{\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6} \end{cases} \quad n, k, l \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{4} - 2\pi n \neq \frac{\pi}{12} + \pi l \quad | \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$12l + 24n \neq -4 \quad | : 4$$

$$3l + 6n \neq -1 \quad \emptyset$$

$$l \neq -3 + 8f \quad + \cdot a \ 3, 6 : 3 \quad -1 : 3$$

$$\frac{\pi}{12} + \pi l \neq \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \quad | \cdot \frac{132}{\pi}$$

$$11 + 132l \neq 3 + 24k$$

$$24k - 132l \neq 8 \quad | : 4$$

$$6k - 33l \neq 2$$

$$6 : 3, 33 : 3 \quad 2 \not\div 3 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} - 2\pi n, \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, n, k \in \mathbb{Z}$$

ДЗ.

$$27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4 \log_3 x} + 40 - x\sqrt{\log_3 3} \leq 48$$

$$\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 x}$$

$$8 \log_3 3 \log_3 x$$

$$t = \sqrt{\log_3 x}$$

$$27t^3 - 11 \cdot 9t^2 + 40 \cdot 3t \leq 48$$

$$3^{3t} - 11 \cdot 3^{2t} + 40 \cdot 3^t \leq 48$$

$$k^3 - 11k^2 + 40k - 48 \leq 0$$

$$(k-3)(k^2-8k+16) \leq 0$$

$$(k-3)(k-4)^2 \leq 0$$

$$\sqrt{\log_3 x} = 3$$

$$\sqrt{\log_3 x} = 4$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 3$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$