

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p - q$
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 18$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 5$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 \cdot 8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2 \cdot \sqrt[4]{\log_2 x} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} \leq 18$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ 4 \log_2 x \geq 0 \\ \log_x 2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_x 2 > \log_x 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

2) Пусть $\sqrt{\log_2 x} = t, t \geq 0$; $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$
 $\log_2 x = t^2$
 $\log_2 x = \log_2 2^{t^2}$
 $x = 2^{t^2}$

$$\sqrt[4]{\log_2 2} = \frac{1}{\log_2 x} = \frac{1}{t}$$

$$3) \quad 8^t - 2^{3+2t} + 21 \cdot (2^{t^2})^{\frac{1}{t}} \leq 18$$

$$2^{3t} - 8 \cdot 2^{2t} + 21 \cdot 2^t \leq 18$$

4) Пусть $2^t = b, b > 0$
 $b^3 - 8b^2 + 21b - 18 \leq 0$

Обратим внимание, что при $b=2$ выражение $b^3 - 8b^2 + 21b - 18 = 0$

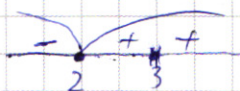
Тогда можно разложить выражение на множители

$$\begin{array}{r|l} b^3 - 8b^2 + 21b - 18 & b-2 \\ \hline b^3 - 2b^2 & b^2 - 6b + 9 \\ \hline -6b^2 + 21b & \\ -6b^2 + 12b & \\ \hline 9b - 18 & \\ 9b - 18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$b^3 - 8b^2 + 21b - 18 = (b-2)(b^2 - 6b + 9) = (b-2)(b-3)^2$$

$$5) (b-3)^2(b-2) \leq 0$$

$$(b-3)^2 \geq 0 \text{ при } b \in \mathbb{R}$$



$$b \leq 0 \text{ при } b \in (-\infty; 2] \cup \{3\}$$

$$6) \begin{cases} b \leq 2 \\ b = 3 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2^t \leq 2 \\ 2^t = 3 \\ t = \log_2 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t = \log_2 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \sqrt{\log_2 x} \leq 1 \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x = \log_2^2 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 1 < \log_2 x \leq \log_2 2 \\ x = 2^{\log_2^2 3} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x = 2^{\log_2 \log_2 3} = 3^{\log_2 3} \end{cases}$$

Все возможные ОДЗ:

$$\text{Ответ: } x \in (1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}$$

$$2) \frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$1) \text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 5x - \sin 5x \neq 0 \\ \cos 5x + \sin 5x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 5x \neq \sin 5x \\ \cos 5x \neq -\sin 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan 5x \neq 1 \\ \tan 5x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2) \frac{\cos 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x}{(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)} = -\sqrt{2} \quad x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x = \cos 9x$$

$$\cos 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x = \sin 9x$$

$$\cos^2 5x - \sin^2 9x = \cos 10x$$

$$\frac{\sin 9x + \cos 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 9x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right)$$

$$\sin 9x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) = 2 \sin \frac{9x + \frac{\pi}{2} - 9x}{2} \cdot \cos \frac{9x - \frac{\pi}{2} + 9x}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{2 \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 10x} = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 10x \Rightarrow \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 10x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

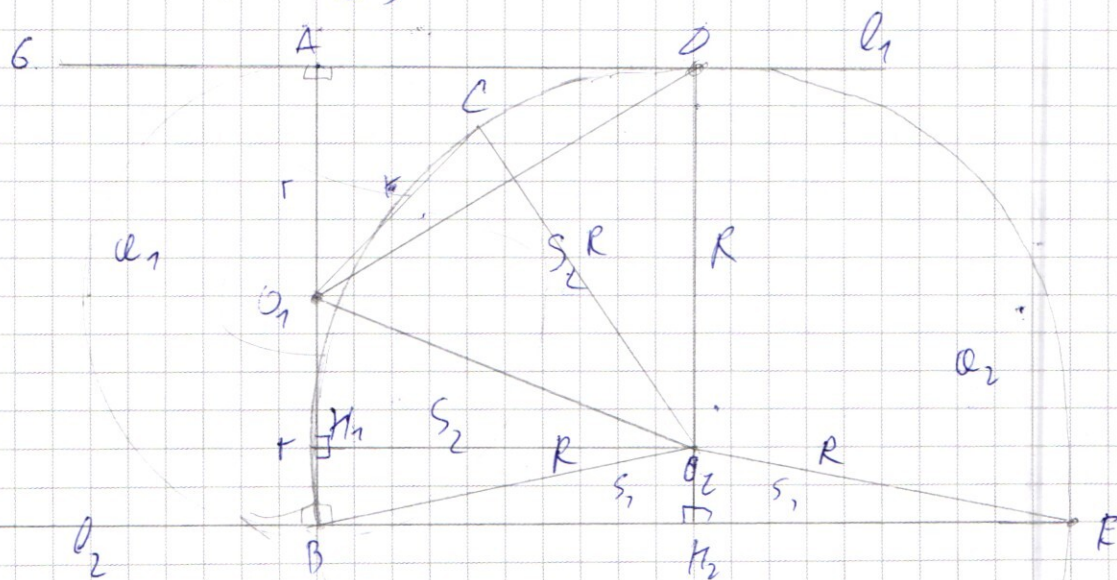
2.3) $\cos \alpha = \cos \beta$ или $\begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x - \frac{\pi}{4} = \pi - 10x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x - \frac{\pi}{4} = 10x - \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ считаем } \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} \text{ значение макс.}$$

$$X = \frac{8\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Außerdem: $x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi k}{29}, k \in \mathbb{Z}$



1) Растворимые SO_2, CO_2 и

В O_2, BO_2 : они равны по 3 степеням

Нам $(O_1, O_2 - \text{из } \omega), O_4 (z_4 \beta = \gamma, O_2 \beta \neq O_2 \gamma = R)$

Значим из баланса равны $S_{\text{до } \text{CO}_2} = S_{\text{до } \text{BO}_2} = S_2$

2) Записав баланс O_2, H_2 в Δ RO_2, E ; $O_2 R^2 O, E = R^2$ $\Rightarrow S_{O_2, H_2} = S_{O_2, E, H_2} = S_7$

$$9) \frac{SO_2CO_2B}{SO_2B} = \frac{2S_2}{2S_1} = \frac{S_2}{S_1} = 3$$

4) Рассмотрим прямоугольник ABH (угол равен 90°)

$$AB = DH$$

$$AB = 2r$$

$$DH = R + O_2H$$

$$AB = DH = 2r = R + O_2H \Rightarrow O_2H = 2r - R$$

5) Рассмотрим прямоугольники BO_2H , O_2H_1

$$O_2H_1 = BH_1$$

$$S_{\Delta O_2HO_2} = \frac{r \cdot O_2H_1}{2} = S_2$$

$$S_{\Delta O_2BH} = \frac{BH_1 \cdot O_2H}{2} = S_2$$

$$\frac{S_2}{S_1} = 5 = \frac{r}{O_2H} = \frac{r}{2r-R}$$

$$10r - 5R = r$$

$$5R = 9r$$

$$R = \frac{9}{5}r$$

$$2r - R = \frac{r}{5}$$

$$8) BH_1^2 = (OH_1^2 + HO_2^2) = \frac{81}{25}r^2 - \frac{1}{25}r^2 = \frac{80}{25}r^2$$

$$OH_1^2 = (2R)^2 = \frac{81}{25} \cdot 4r^2$$

$$BO_2^2 = OH_1^2 + BH_1^2 = \frac{80}{25}r^2 + \frac{244}{25}r^2 = \frac{324}{25}r^2 = 25$$

$$r^2 = \frac{625}{324}$$

$$r = \frac{25}{18} = \frac{25}{18}$$

$$R = \frac{9}{5} \cdot \frac{25}{18} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Ответ: а) } R = \frac{9}{5}r$$

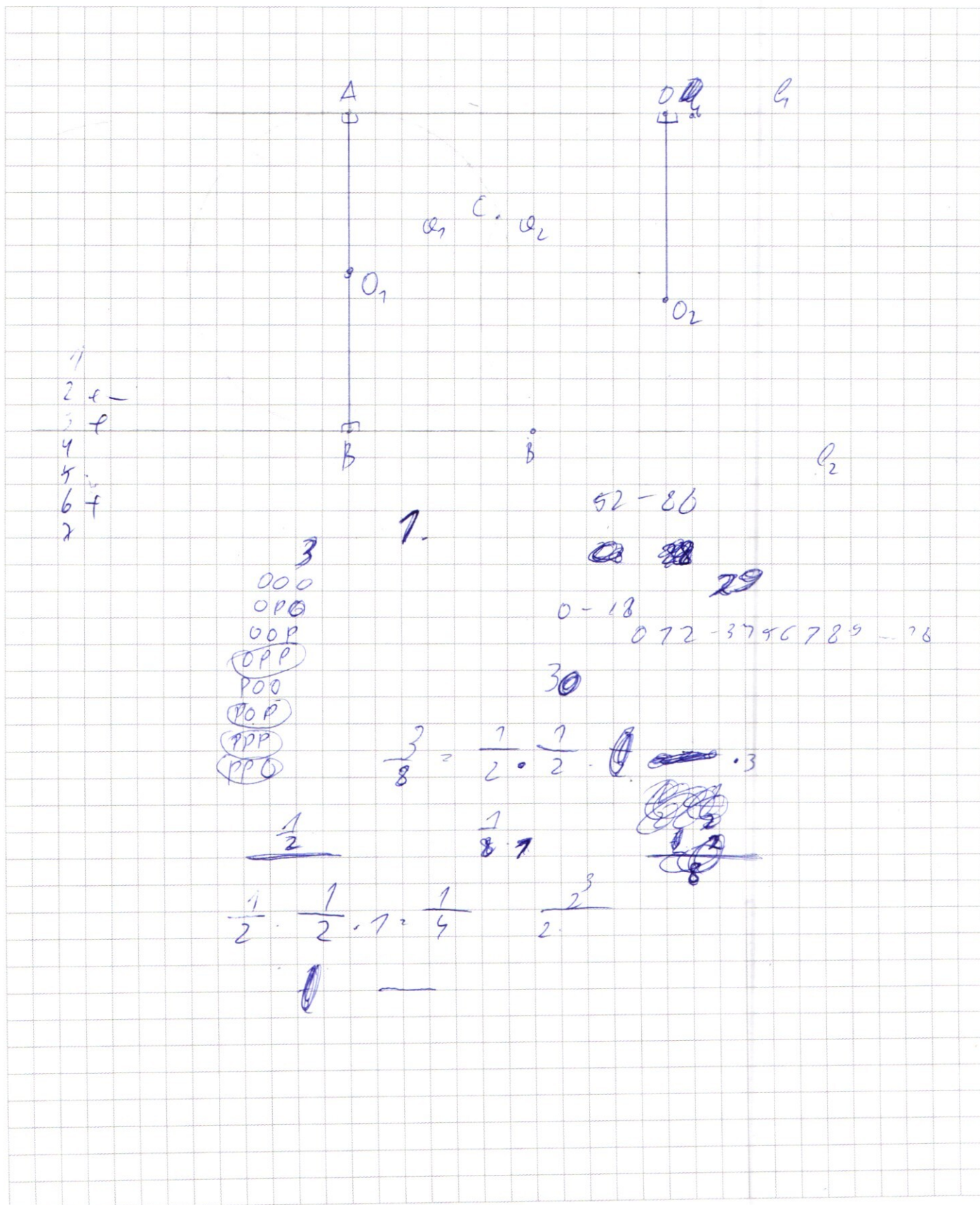
$$\text{б) } r = \frac{25}{18}$$

$$R = \frac{5}{2}$$

9. $(x-3)^2 + (y-15)^2 = 205$ представляет себе 9 усеченных ос-
кулисов



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

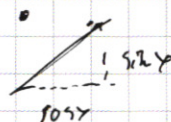
[illegible]

$$2. \cos 9x + \sin 4x$$

$$x = 70^\circ < 0 \quad x = 4^\circ < 1$$

$$\cos 9x \cdot \cos 9x + \cos 9x \cdot \sin 9x + \cos 9x \cdot \sin 9x \rightarrow \sin 9x + \sin 9x$$

$$\frac{\sin 9x + \cos 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$



$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin 9x + \cos 9x$$

$$\sin 9x + \cos 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$1 - 2 \sin 9x \cdot \cos 9x$$

8.7

$$\sin 9x = \sin (10x - x) = \sin 10x \cdot \cos x - \cos 10x \cdot \sin x$$

$$\sin 10x \cdot \cos x - \cos 10x \cdot \sin x$$

$$\cos (10x - x) = \cos 10x \cdot \cos x + \sin 10x \cdot \sin x$$

$$2 \sin 9x + 2 \cos 9x$$

$$\cos 4^\circ$$

$$y \leq 71$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$y \geq 70 = 3 \cdot 4^\circ$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 4 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2$$

$$1 - 6 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 - 2 \sin 10x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin 9x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 9x \right)$$

$$2 \sin \frac{9x - \frac{\pi}{2} + 9x}{2} \cdot \cos \frac{9x - \frac{\pi}{2} + 9x}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{0}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$2 \sin \frac{9x - \frac{\pi}{2} + 9x}{2} \cdot \cos \frac{9x - \frac{\pi}{2} + 9x}{2}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\sin \frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2} = -\cos 10x$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 10x \right)$$

$$9x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 10x + 2\pi k$$

$$19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 70x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos(x-x) = 1$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(70x - x) = \cos 70x \cdot \cos x + \sin 70x \cdot \sin x$$

$$\sin(70x - x) = \sin 70x \cdot \cos x - \cos 70x \cdot \sin x$$

$$\cos 70x \cdot \cos x + \sin 70x \cdot \sin x + \sin 70x \cdot \sin x - \cos 70x \cdot \cos x$$

$$\frac{2 \sin 70x \cdot \sin x}{\cos 70x} = -\sqrt{2}$$

$$2 \sin 70x \cdot \sin x = -\sqrt{2} \cos 70x$$

$$2 \sin 70x \cdot \sin x = -\sqrt{2}$$

$$\cos 5x \neq \sin 5x$$



$$\cos 5x \neq \sin 5x$$

$$5x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$$

$$\sin 70x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 4x \cdot \cos 8x + \cos 9x \cdot \cos 5x + \sin 9x \cdot \cos 5x = \sin 5x \cdot \sin 9x$$

$$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 70x$$

$$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} (\cos 9x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x)$$

$$\cos 9x (1 + \sqrt{2} \cos x) + \sin 9x (1 - \sqrt{2} \sin x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. p-d

$\frac{1}{2}$

52 - 80
0 - 28

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(4x+5x) = \sin 4x \cdot \cos 5x + \dots$$

$$2. \frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x + \sin 4x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x(\cos 5x - \sin 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 5x \neq \sin 5x$$

$$\cos 5x \neq -\sin 5x$$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x$$

$$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 9x \cdot \cos x + \sqrt{2} \sin 9x \cdot \sin x$$

$$\cos 9x(1 + \sqrt{2} \cos x) = \sin 9x(\sqrt{2} \sin x - 1)$$

$$0 < \frac{x}{h}$$

$$\frac{x}{e^{h-x}} \geq e^h$$

$$\frac{x^h}{e^{h-x}} \geq e^{h-x} \log x$$

$$x = x^{h \log x}$$

$$x^{h \log x} = h^{h \log x} + x^{h \log x} \Rightarrow x^{h \log x} = h^{h \log x}$$

$$x = e^h + x^{h \log x} \Rightarrow e^h$$

$$x^{h \log x} \Rightarrow e^{h-x} + x$$

$$e^h \geq h$$

$$e^h \leq h$$

$$e^{h-x}$$

$$x^{h \log x} \geq h$$

$$e^{h-x} + x \leq h \quad t$$

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{9 \log_2 x + 5}} = 2^{1-x} \sqrt{\log_2 x + 2}$$

$$\log_2 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$x > 1$$

$$\begin{aligned} x > 0 & \Rightarrow x > -3 \\ 4 \log_2 x + 3 \geq 0 & \Rightarrow x + 3 \geq 1 \end{aligned}$$

$$x \neq 1 \quad x > 0$$

$$\log_x 2 > 0$$

$$\log_x 2 > 0$$

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$\log_x 2 = \frac{1}{2 \log_2 2} = \frac{1}{2}$$

$$2 > 1$$

$$\log_x 2 = -1$$

$$x > 1$$

$$\log_x 2 = \log_x \frac{1}{x}$$

$$x < 1$$

$$2 = \frac{1}{x}$$

$$8^{\log_2 x} = \frac{1}{x}$$

$$\sqrt{(\log_2 x)^2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$8^{\log_2 x} = \frac{1}{x}$$

$$8^{\log_2 x} = \frac{1}{x}$$

$$\sqrt[8]{\log_2 x}$$

$$\sqrt[2]{3 \log_2 x}$$

$$2^{\frac{3}{2} \log_2 x} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$x^{\frac{3}{2}}$$

$$x = 16$$

$$64$$

$$x = 2^9$$

$$2^9$$

$$x = 2^{16}$$

$$2^{72}$$