

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

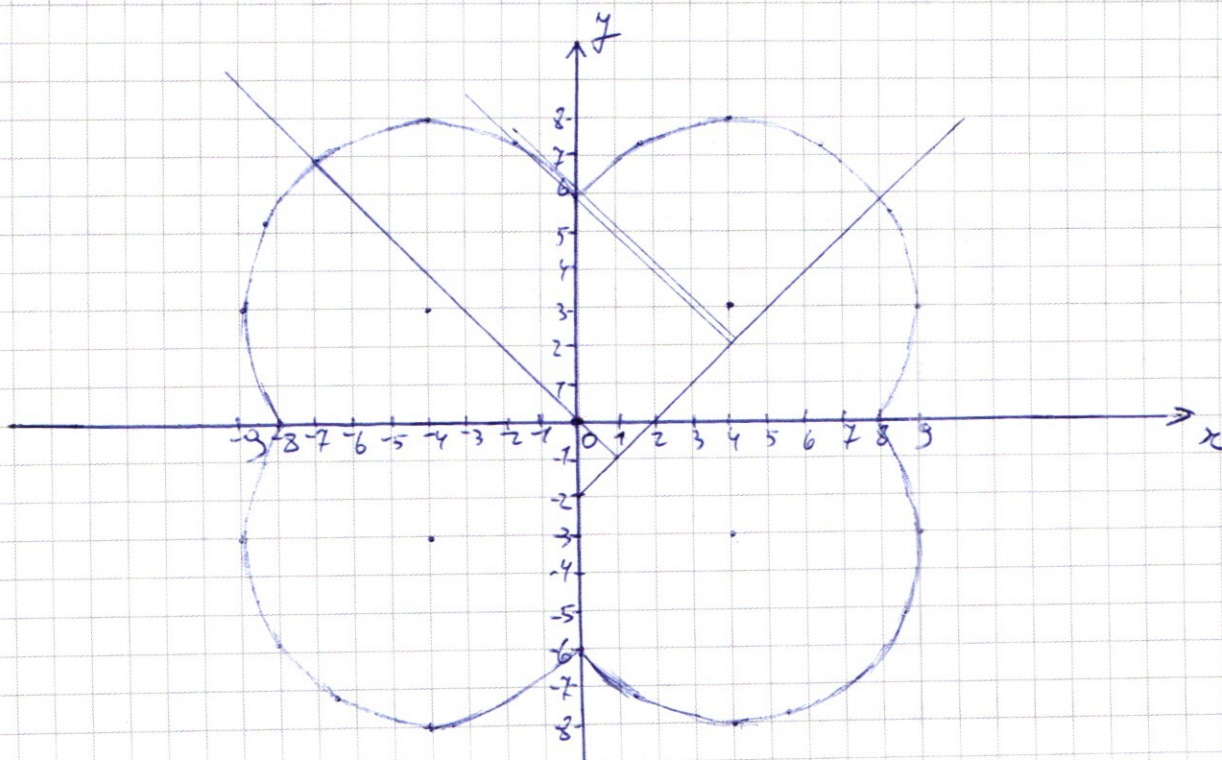
№5.

$$\begin{cases} y = |x - 5a| + 5a - 2 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 5^2 \end{cases}$$

$y = |x - 5a| + 5a - 2$ - график этой функции будет изображаться в виде некой "галочки", образованной 2-мя прямыми.

$$\begin{cases} y = x - 2, & \text{при } x \geq 5a \\ y = 25a - 2 - x & \text{при } x < 5a \end{cases}$$

Эти две прямые пересекаются они в точке $(5a; 5a - 2)$. Второе уравнение можно представить, как совокупность 4-х окружностей, ограниченных координатными четвертями.



$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 - 1\text{-я четверть} \quad x \geq 0; y \geq 0$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 - 2\text{-я четверть} \quad x < 0; y \geq 0$$

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 5^2 - 3\text{-я четверть} \quad x < 0; y < 0$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5^2 - 4\text{-я четверть} \quad x > 0; y < 0.$$

Точка $(0;0)$ явно является решением этого уравнения.

Вершина "галочки" лежит на прямой $y = x - 2$ и при увеличении "а" - "поднимается" по ней вверх. П.к. $5a \geq 0$, то мы рассматриваем $x \geq 0$.

Первый случай, когда мы имеем 3 решения - левая часть "галочки" пересекает окружность во 2-й четверти и проходит через $(0;0)$ - достигается при $a = 1$.

Второй вариант - левая часть "галочки" дважды касается ~~окружности~~ пересекает окр. из 2-й четверти. Такое произойдет, когда $y = 2.5a - 5 - x$ пройдет через $(0;6)$

$$0 = 2.5a - 5 - 6; \quad y = 5a; \quad a = 16.$$

Найдем "а", при котором левая часть "галочки" касается в последний раз окр. из 2-й четверти.

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ y = 2.5a - 2 - x \end{cases}$$

$$(x+4)^2 + (2.5a - 5 - x)^2 = 25$$

$$(x+4)^2 + ((2.5a - 5) - x)^2 = 25.$$

$$x^2 + x \cdot (8 - 2.5a) + 2a - 10.5a + 8 = 0$$

касание будет при $a = \frac{57 + 10\sqrt{2}}{4}$.

~~при дальнейшем увеличении "а"~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При любых других "а" уже не будет трёх решений.

П.к. перед x в $y = 2\cos x - x$ стоит постоянный коэф. $k = -1$, то мы можем просто двинуть левую часть "галочки" параллельно ей самой, т.к. от "а" зависит только коэф. в.

Ответ: $a = 1$, $a = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$; ~~$a = 16$~~ .

12

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}.$$

$$\text{ОДЗ: } \sin 3x \neq \pm \cos 3x \quad 3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\cos 8x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 8x (\cos 3x + \sin 3x)}{(\cos 3x - \sin 3x)(\cos 3x + \sin 3x)} = \sqrt{2}.$$

$$\frac{(\cos 8x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \sin 8x) + (\sin 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}.$$

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}; \quad \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(5x + \frac{\pi}{4})}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 6x$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos \sin(\frac{\pi}{2} - 6x)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - 6x) = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} + 6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}, \text{ ~~не подходит~~ } \\ x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ ~~не подходит~~ } \end{cases}$$

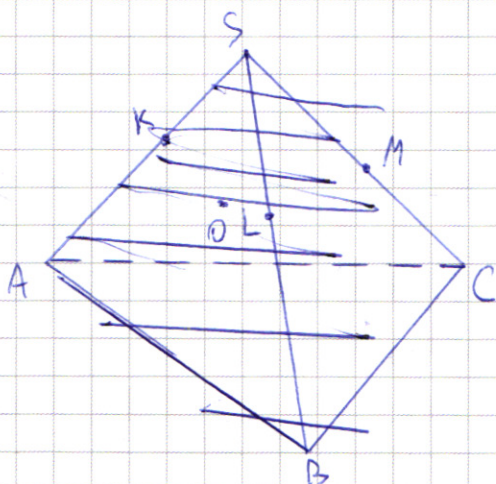
Ответ: $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}$

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 \sqrt{4 \log_3 x} + 40 \cdot x \sqrt{\log_3 x} = 48.$$

ОДЗ: $x > 1$.

$$3 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 \sqrt{4 \log_3 x} + 40 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 48.$$

~~Кроме того, проверим по условию 3:~~



14. $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$
 $S_{\text{сек}} = 5$
 $S_{\text{аклм}} = ?$
 $\log_3 x = 1; \quad \underline{x \leq 3}$

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 \sqrt{4 \log_3 x} + 40 \cdot x \sqrt{\log_3 x} = 48.$$

ОДЗ: $x > 1$;

$$x \sqrt{\log_3 x} = t; \quad \log_3 t = \sqrt{\log_3 x} \cdot \log_3 x; \quad \log_3 t = \sqrt{\frac{1}{\log_3 x}} \cdot \log_3 x.$$

$$\log_3 t = \sqrt{\log_3 x}$$

$$\frac{\log_3 t}{27} - 11 \cdot \frac{\log_3 t}{9} + 40 t = 48$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$t^3 - 14t^2 + 40t - 48 = 0;$$

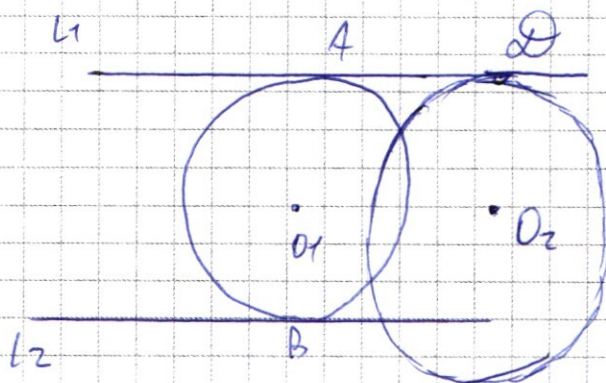
~~88~~

$$88 - 48 - 44 = 40 - 44.$$

$$8 + 80 = 48$$

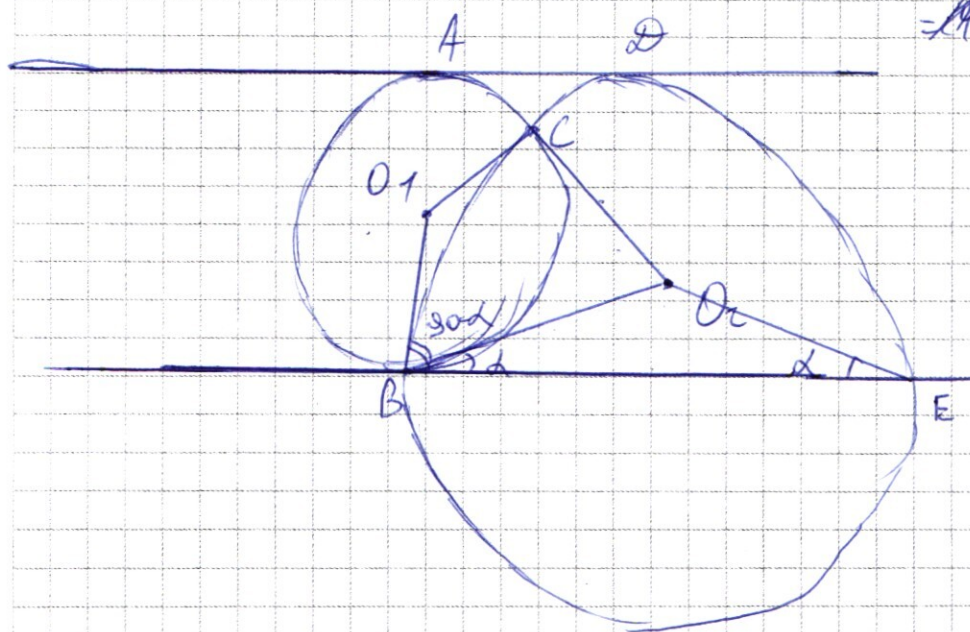
$$27 + 120 = 39 - 48$$

$$\begin{array}{r} 147 \\ - 48 \\ \hline 99 \end{array}$$



$$4^{\log_3 4} = 4^{\frac{1}{\log_4 3}} =$$

~~19~~



$$x^{\sqrt{\log_2 3}} = t$$

$$\log_3 t = \log_3 x^{\sqrt{\log_2 3}};$$

$$\log_3 t = \sqrt{\log_2 3} \cdot \log_3 x$$

$$\left(3^{\log_3 t}\right)^3 - 11 \cdot \left(3^{\log_3 t}\right)^2 + 40t = 48$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t = 48$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 = 0$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 = 0; \quad \text{корень } t=3 \quad (117 - 48 - 99 = 0)$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 11t^2 + 40t - 48 & t-3 \\ \hline t^3 - 3t^2 & \\ \hline \end{array}$$

$$-8t^2 + 40t - 48$$

$$-8t^2 + 24t$$

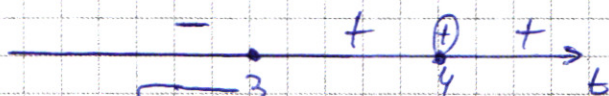
$$-16t - 48$$

$$-16t - 48$$

$$0$$

$$t^2 - 8t + 16 = 0;$$

$$t^2 - 2 \cdot 4t + 4^2 = 0; \quad t = 4 \quad (12)$$



$$t = x^{\sqrt{\log_3 x}} > 0$$

$$t = 4$$

$$x^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3 \quad - \text{логарифмируем по основанию 3}$$

$$\log_3 x \cdot \sqrt{\log_3 x} \leq \log_3 3$$

$$\log_3 x \cdot \sqrt{\log_3 x} \leq 1; \quad \log_3 x \cdot \sqrt{\frac{1}{\log_3 x}} \quad \log_3 x \cdot \sqrt{\frac{1}{\log_3 x}} = 1.$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$0 \leq \log_3 x \leq 1.$$

$$\begin{cases} \log_3 x \leq 1 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in (1; 3]$$

$$x^{\sqrt{\log_3 x}} = 4;$$

$$\sqrt{\log_3 x} \cdot \log_3 x = \log_3 4$$

$$\log_3 x = (\log_3 4)^2;$$

$$\log_3 x = \log_3 4^{\log_3 4}$$

$$x = 4^{\log_3 4};$$

$$\text{Ответ: } x \in (1; 3] \cup \left\{ 4^{\log_3 4} \right\}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~17.12.~~

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 6x$$

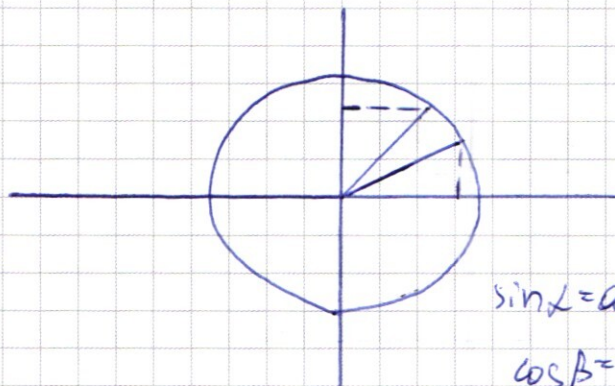
$$\sin 5x +$$

$$\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{77} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2k}{77} + \frac{1}{44};$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{44} = \frac{2k}{77};$$

$$k = \frac{5}{4}$$



$$\sin \alpha = a$$

$$\cos \beta = a.$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{44} = 2k; \quad \frac{10}{4} = 2k$$

$$k = 18.$$

$$3x = -\frac{3\pi}{4} - 6\pi k;$$

$$\alpha = -\frac{3\pi}{4} - 6\pi k.$$

$$\frac{3\pi}{44} + \frac{6\pi k}{77} = \frac{3\pi + 24\pi k}{44} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad \frac{44}{-8} \quad \frac{36}{36}$$

$$3 + 24k = 11 + 22n;$$

$$\frac{36}{144}$$

$$k = \frac{22n - 8}{24} = \frac{11n}{12} - \frac{2}{3} = \frac{11 - 1}{3}$$

$$\frac{55 - 1}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

$$\frac{44}{-8} \quad \frac{36}{36}$$

$$\frac{145}{132} \quad \frac{13}{13}$$

$$\frac{\pi}{44} + \frac{36\pi}{77} = \frac{145\pi}{44} =$$

$$\frac{x}{44} + \frac{8xk}{44} = \frac{x}{4};$$

$$1 + 8k = 11; \quad 8k = 10.$$

$$\frac{x}{44} + \frac{8xk}{44} = \frac{3x}{4}$$

$$1 + 8k = 32;$$

$$8k = 32; \quad k = 4;$$

$$x = \frac{x}{44} +$$

$$\frac{x}{44} + \frac{8xk}{44} = \frac{3x}{44};$$

$$1 + 8k = 11$$

$$\frac{3x}{44} + \frac{6xk}{11} = -\frac{x}{4};$$

$$3 \left| \frac{x}{44} + \frac{2xk}{11} \right| = \frac{3x}{4};$$

$$1 + 8k = 11;$$

$$3(1 + 8k) = 11;$$

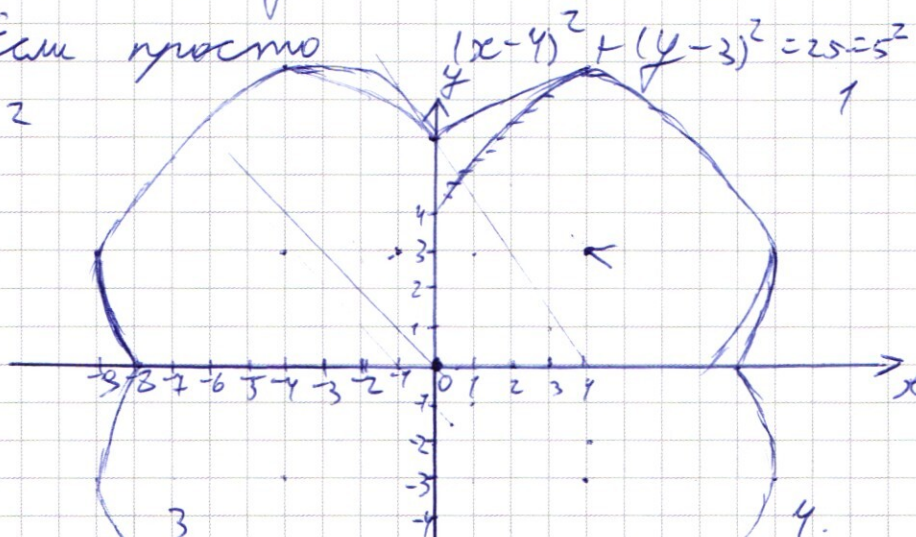
$$3 + 24k = 11;$$

$$24k =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

Если просто



$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2; & x \geq 0; y \geq 0; \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 & x < 0; y > 0; \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = 5^2 & x > 0; y < 0; \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = 5^2. & x < 0; y < 0. \end{cases}$$

$$f = (x - \sqrt{a}) + \sqrt{a} - z;$$

Если $x \geq \sqrt{a}$:

$y = x - 2$

Если $x < \sqrt{a}$:

$$y = 2.5x - 2 - x.$$

$$\underline{y = \sqrt{a-z}}$$

$$d \geq 0.$$

$$2\sqrt{x} - 2 \quad \text{vs} \quad 0$$

$$2\sqrt{a} \quad N \quad S \quad 2$$

Σ vs ∂

$$f_\theta = \sqrt{a} - z; \quad \kappa_\theta = \sqrt{a}.$$

$$a = \frac{1}{4}, \quad \sqrt{a} = \frac{1}{2}$$

$$y = -1 - x$$

~~$x^2 = 25x$~~

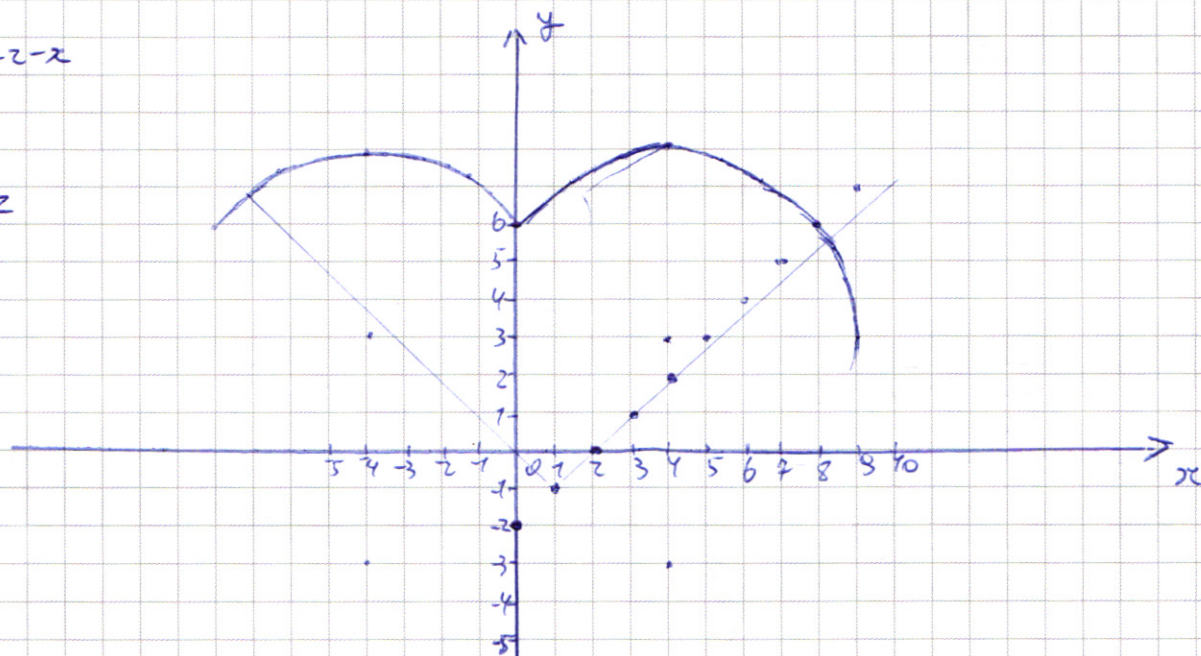
$$\alpha = \frac{1}{4}$$

$$y = x - 2 \quad \sqrt{a} = 6.$$

$$y = 2\sqrt{a} - 2 - x$$

$$x_0 = \sqrt{a}$$

$$y_0 = \sqrt{a} - 2$$



$$y = x - 2$$

$$y = 2\sqrt{a} - 2 - x$$

$$x_0 = \sqrt{a}$$

$$y_0 = \sqrt{a} - 2$$

$$\sqrt{a} = 1, \quad \sqrt{a} = 2;$$

$$(2\sqrt{a} - 5)^2 = 4a - 20\sqrt{a} + 25$$

$$x^2 + 8x + 16 + 4a - 20\sqrt{a} + 25 - 2x(2\sqrt{a} - 5) + x^2 = 25$$

$$2x^2 + 8x - 2x(2\sqrt{a} - 5) + 16 + 4a - 20\sqrt{a} = 0$$

$$x^2 + x(4 - 2\sqrt{a} + 5) + 2a - 10\sqrt{a} + 8 = 0.$$

$$D = (8 - 2\sqrt{a})^2 - 4(2a - 10\sqrt{a} + 8) = 0$$

$$(8 - 2\sqrt{a})^2 = 4(2a - 10\sqrt{a} + 8)$$

$$81 - 36\sqrt{a} + 4a = 8a - 40\sqrt{a} + 32$$

$$4\sqrt{a} - 4a + 81 - 36 = 0$$

$$4\sqrt{a} + 45 = 4a;$$

$$4(\sqrt{a})^2 - 4\sqrt{a} - 45 = 0;$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 45 = 16 \cdot 46 = 16 \cdot 46$$

$$\sqrt{a} = \frac{4 \pm 4\sqrt{46}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{46}}{2}$$

$$a = \left(\frac{1 + \sqrt{46}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{46} + 46}{2} = \frac{47 + 2\sqrt{46}}{2} = 23,5 + \sqrt{46}.$$

$$8 - x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}.$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = 2 = \frac{1}{\log_4 2} = 2.$$

умм:

$$\begin{aligned} & \cos 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x + \sin 8x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \sin 8x \\ & (\cos 8x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \sin 8x) + (\sin 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x) \\ & \cos(8x - 3x) + \sin(8x - 3x) = \cos 5x + \sin 5x. \end{aligned}$$

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2};$$

$$\text{Значит: } \cos^2 3x - \sin^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2} - \frac{1 - \cos 6x}{2} = \cos 6x.$$

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \sin 5x + \cos 5x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 5x \right) \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos 6x} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) &= \cos 6x - \text{немного подумав.} \\ \sin \alpha &= \cos \beta, \text{ когда } \pi - \alpha = \beta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{aligned}$$

и. далее.

$$\sin \alpha = \cos \beta.$$

$$\text{т) } \alpha \text{ и } \beta = 45^\circ.$$

$$\text{т) } \alpha = 45^\circ, \cos \beta = -45^\circ.$$

$$1) \text{ при } \alpha = 45^\circ \quad \beta = \pm 45^\circ$$

2)

нз.

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 \sqrt{4 \log_3 x} + 40 \cdot x \cdot \sqrt{\log_3 x} \leq 48.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \log_3 x > 0$$

$$\text{ОДЗ: } x > 1.$$

$$\frac{\sqrt{\log_3 x}}{x \sqrt{\log_3 x}} = x \sqrt{\frac{1}{\log_3 x}} = \frac{1}{x \sqrt{\log_3 x}}$$

$$\frac{81}{32} \cdot \frac{1}{48}$$

$$\sqrt{\log_3 x} = t \geq 0$$

$$27^t - 11 \cdot 3^t + 40 \cdot x^{\frac{1}{t}} \leq 48.$$

$$3^t (3^t - 11)$$

$$x^{\sqrt{\log_3 x}} = x^{\sqrt{\frac{1}{\log_3 x}}}$$

$$\log_x (a \cdot b) = \log_x a + \log_x b$$

$$81 - 36\sqrt{a} + 4a = 8a - 40\sqrt{a} + 32$$

$$4a - 4\sqrt{a} - 48 = 0$$

$$4(\sqrt{a})^2 - 4\sqrt{a} - 48 = 0,$$

$$D = 16^2 + 4 \cdot 4 \cdot 48 = 16 \cdot 50 = 16 \cdot 25 \cdot 2.$$

$$\sqrt{D} = 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{a} = \frac{4 + 20\sqrt{2}}{2 \cdot 4} = \frac{1 + 5\sqrt{2}}{2}$$

$$a = \frac{1 + 10\sqrt{2} + 50}{4} = \frac{51 + 10\sqrt{2}}{4}$$

$$\log_2 16 = 4;$$

$$\log_3 27 = 3$$

$$2^4 = 16 = \sqrt{16};$$

$$3^3 = 27 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$