

Рег. №: М11-НО-0079Класс участия: 11Место проведения: НовосибирскДата проведения: 22 февраля 2020 г.Время начала (местное): 10:00

ШК

(заполняется секретарём)



Олимпиада школь

по математике

Название предмета

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

<u>Чиботарев</u>	<u>Данил</u>	<u>Владимирович</u>	<u>78.02.2002</u>	<u>78</u>
Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст
<u>Россия</u>	<u>Новосибирская область</u>	<u>г. Новосибирск</u>		
Страна	Регион	Населенный пункт		
<u>паспорт</u>	<u>50 15</u>	<u>510 185</u>	<u>24.03.2016</u>	<u>540-003</u>
Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения
<u>Россия</u>	<u>Новосибирская область</u>	<u>г. Новосибирск</u>		
Страна школы	Регион школы	Населенный пункт школы		
<u>11</u>	<u>МБОУ "Гимназия №4"</u>			
Класс обучения	Полное название образовательного учреждения			
<u>+7-957-385-25-29</u>		<u>dani1-ch02@mail.ru</u>		
Мобильный телефон	Доп. телефон	E-mail		

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограничено доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«27» февраля 2020 г.

Подпись участника олимпиады

Чиботарева Татьяна Александровна
ФИО законного представителямать
Степень родства

Подпись законного представителя

Анкета без подписи недействительна.

Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

р-вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз $\Rightarrow$ вероятность того, что решка выпадет не более 35 раз $\Rightarrow$ вероятность того, что орёл выпадет не более, чем 35 раз (т.к. вероятность выпадения орла и решки одинакова). Значит, р-р-это вероятность того, что орёл (или решка) выпадет ровно 35 раз. Число исходов, при которых выпадает орёл 35 раз равно числу сочетаний из 90 элементов по 35: $\frac{90!}{35! \cdot 55!}$ общее число исходов:

$$2^{90} \quad p-q = \frac{90!}{35! \cdot 55! \cdot 2^{90}}$$

Ответ: $p-q = \frac{90!}{35! \cdot 55! \cdot 2^{90}}$

№2.

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$$

~~$$\cos 8x \cdot (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 8x \cdot (\cos 3x + \sin 3x) = \sqrt{2} (\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x)$$~~

$$\cos 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x + \sin 8x \cdot \cos 3x + \sin 8x \cdot \sin 3x = \sqrt{2} (\cos^2 3x - \sin^2 3x)$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\frac{\cos 7x + \cos 5x - \sin 7x + \sin 5x}{2(1 - 2\sin^2 3x)} = \sqrt{2} \quad \sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}$$

$$\frac{\cos 7x + \cos 5x - \sin 7x + \sin 5x}{2(1 - 2\sin^2 3x)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2} \quad \begin{matrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

$$\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{\sqrt{2} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 6x$$

$$\sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 6x$$

$$\sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 6x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 6x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 6x + 2\pi n \right)$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \pm \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)$$

$$5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n - \frac{\pi}{4}$$

$$5x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$5x = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 6x \right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} - 6x + 2\pi n \quad \text{или} \quad 5x = -\frac{3\pi}{4} + 6x + 2\pi n$$

$$11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \quad \text{или} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

№3.

$$22 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 \sqrt{4 \log_3 x} + 40 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 48$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 1, x \neq 3. \quad x \in (1; +\infty).$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 + 40 \cdot 3 \sqrt{\log_3 x} \leq 48$$

$$\text{Есть } x^a = b \text{ то } x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{b}$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 + 40 \cdot 3 \sqrt{\log_3 x} \leq 48$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} = t$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 48$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 0$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 = 0$$

$t=3$ является корнем

Схема Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -11 & 40 & -48 \\ 3 & 1 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

$$t^2 - 8t + 16 = 0$$

$$(t-4)^2 = 0$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 = (t-3)(t-4)^2$$

$$(t-3)(t-4)^2 \leq 0$$

$$t \in (-\infty; 3] \text{ и } t=4$$

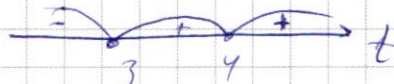
$$\sqrt{\log_3 x} \leq 3$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\log_3 x \leq 1$$

$x \leq 0$ - не
подходит
из-за
ОДЗ?

Ответ: $x=4$



$$\sqrt{\log_3 x} = 4$$

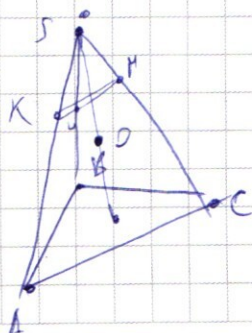
$$\sqrt{\log_3 x} = \log_3 4$$

$$\log_3 x > 0 \leftarrow x > 1$$

$$\begin{cases} \log_3 x = \log_3 4^2 \\ \log_3 x = \log_3 16 \\ x = 16 \end{cases}$$

$$\log_3 4$$

и 4



Дано:

$\triangle ABC$ - тетраэдра

$(O; r)$ - сфера

$(O; r)$ касается SA , SB и SC и ABC .

N - ближайшая точка сферы к S

OPQ - касается $(O; r)$ $N \in OPQ$ $O \in SA \cap SB \cap SC$.

$$r_{\text{сфера}} = 5$$

$$\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Найти: $r_{\text{вклм}}$

Решение:

$SK = SL = SM$ - как срезно перпендикулярны

Пусть SN - высота из S в KLM . Тогда она перпендикулярна в центр описанной окружности.

$OK = OL = OM = R$, где R - радиус сферы.

Пусть SN - высота из S в KLM . Тогда она перпендикулярна в центр описанной окружности.

Но вокруг тетраэдра можно описать только одну окружность $\Rightarrow N$ и N_0 - одна точка. $OS \perp KLM$

Точка N лежит на отрезке OS (так как N в этой плоскости через N можно провести касательную и все остальные точки окружности окажутся в другой полуплоскости относительно S , в то время как SN перпендикулярна KLM).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

стоящие от точки O плоскости, поэтому радиус перпендикулярен касательной плоскости.

$OS \perp OR_2$ (т.к. OR_2 - радиус, проведенный в точку касания)

$OR_2 \parallel KL$ - так как две плоскости перпендикулярны к одной прямой.

$$\triangle OR_2 \sim \triangle KLM$$

$\angle SKO = 90^\circ$ - так как касательная к сфере и радиус

$$\cos \angle KSO = \frac{\sqrt{21}}{5} = \sin \angle SKO$$

$KL = \sin \angle SKO \cdot R = \frac{\sqrt{21}}{5} R = r$, где r - радиус описанной окружности треугольника KLM .

~~$\triangle KLM \sim \triangle OR_2$ где X - точка пересечения~~

$$\text{где } \angle KSO = 90^\circ \text{ (так как } OS \perp OR_2 \text{)} \quad \cos \angle KSO = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{R}{OS}$$

$$OS = \frac{5R}{2}$$

$$SN = OS - R = \frac{5R}{2} - R = \frac{3R}{2}$$

$$\text{где } \angle KSO = 90^\circ \quad \tan \angle KSO = \frac{2\sqrt{21}}{27}$$

$\frac{2\sqrt{21}}{27} = \frac{r'}{SN}$, где r' - радиус окружности, вписанной в $\triangle OR_2$

описанной в $\triangle OR_2$

$$r' = \frac{3R\sqrt{21}}{27}$$

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\sqrt{21}}{5} R \cdot \frac{21}{3\sqrt{21}} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = K$$

$$\cancel{S_{\triangle KLM}} \cdot \cancel{S_{\triangle PKL}} = \frac{S_{\triangle PKL}}{K^2} = S_{\triangle KLM} = S_{\triangle PKL} \cdot K^2 = 5 \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{5} = 9,8$$

Ответ: $S_{\triangle KLM} = 9,8$

д) ОУ - перпендикуляр к ABC

ABC || KLM - по условию

2, 4, 11, 5, 14 - лежат на одной прямой

$$\cancel{S_{\triangle KLM}} = \cancel{S_{\triangle PKL}} + OY: R = \frac{221}{5} = \frac{2 \cdot 16}{5} = 14,4$$

$$SY = 2S + OY = 36 + 14,4 = 50,4$$

$$OH = \frac{22\sqrt{21}}{25}$$

$$SH = OS - OH = 36 - \frac{22\sqrt{21}}{25}$$

$$\frac{SY}{SH} = \frac{50,4 - 25}{22\sqrt{21}} = K = \frac{35}{25 - 2\sqrt{21}}$$

$$\cancel{V_{\triangle PKL}} = K^2 \cdot \cancel{V_{\triangle KLM}} = V_{\triangle PKL} = K^2 \cdot V_{\triangle KLM} = \frac{35^2}{(25 - 2\sqrt{21})^2} \cdot 9,8$$

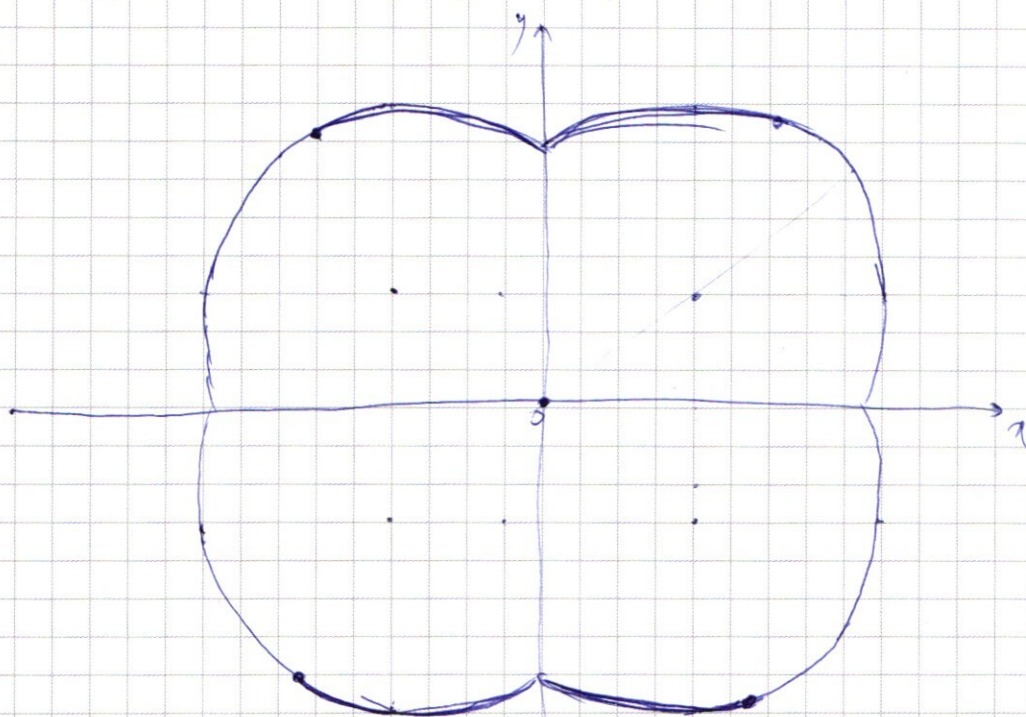
$$V_{\triangle PKL} = \frac{2}{3} SY \cdot SH = \frac{36 \cdot 2 \cdot 352 \cdot 2^2}{5 \cdot 3 \cdot (25 - 2\sqrt{21})^2 - 5} = \frac{207684}{(25 - 2\sqrt{21})^2}$$

$$\text{Ответ: } V_{\triangle PKL} = \frac{207684}{(25 - 2\sqrt{21})^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$



$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25$$

При $x > 0$ $y > 0$ координаты центра - $(4, 3)$.

При $x > 0$ $y < 0$ - $(4, -3)$

При $x < 0$ $y > 0$ - $(-4, 3)$

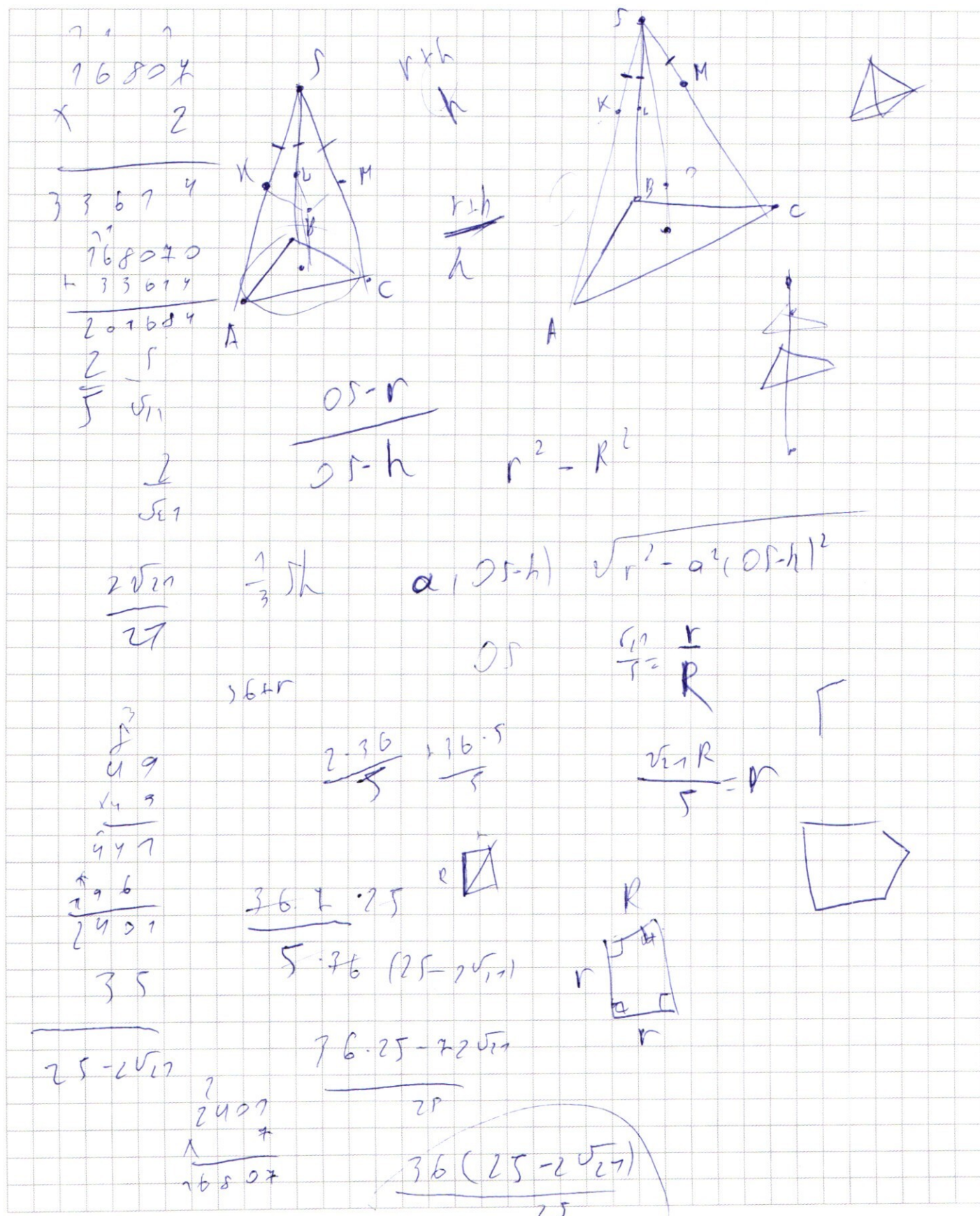
При $x < 0$ $y < 0$ - $(-4, -3)$.

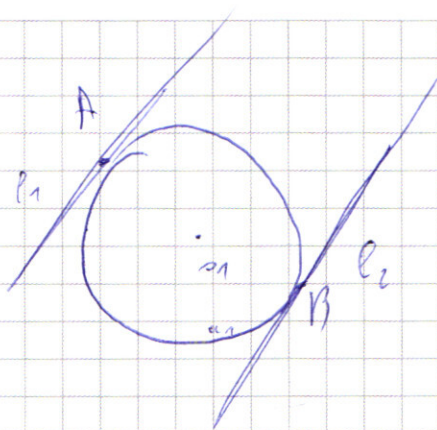
$y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$ - график модуля $y = |x|$, сдвинутый на $\sqrt{a}$ вправо и на $\sqrt{a} - 2$ вверх.
Найдём координаты касательной в I квадранте, зная, что угол наклона с осью $x = 45^\circ$.

$$2a^2 = 25 \quad a = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad a = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}; 3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

Симметричные координаты и для других
четвертей

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

35 ~~25~~ 90 90 - 89

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ (90 - 90) ~~90~~
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ 55 - 2 90

$\sin 42 = \cos 48$

$\cos 8x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 8x \cos 3x +$
 $\cos 8x \cos 3x - \cos 8x \sin 3x + \sin 8x \cos 3x + \sin 8x \sin 3x$
 $\cos^2 3x - \sin^2 3x$

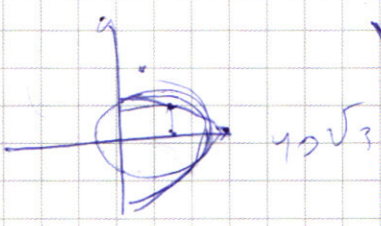
$\sin \frac{\pi}{4}$ $\sqrt{1 - \sin^2 6x}$ $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$
 $\cos 7x \cos 5x - \sin 7x \cos 5x + \sin 5x + \sin 7x + \cos 5x + \cos 7x - \cos 7x$
 $+ \cos 5x - \cos 7x$ $\sin x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
 $\sin x \cos y = \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}$

$\frac{2 \sin(5x + \frac{\pi}{6})}{5 \cos 6x} = \sqrt{2}$ $\frac{\sin 5x + \cos 7x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$ $2 \in$
 $\frac{\sin 7x + \cos 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$ $2 \cos 6x = 2 \sin$ $1 - 2 \sin^2 7x$
 $\sqrt{2} \cos 6x = \sin 7x + \cos 5x$

$\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right)$ $\sqrt{2} \left(\frac{\sin 5x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos 7x}{\sqrt{2}} \right)$ $\sin^2 7x = \frac{1 - \cos 14x}{2}$
 $\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{2} \cos 6x}{2}$ $\sin x + \cos x$
 $\frac{2 \sin(7x + \frac{\pi}{6})}{5 \sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}$ $\cos 6x = \sin(5x + \frac{\pi}{6})$

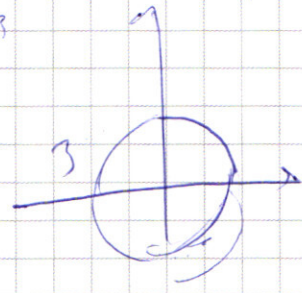
$$x^{\log_3 4} = 2.5$$

$$\log_3 x = \frac{1}{3} \quad x^{\sqrt{\log_3 x}} = a \quad x^{\frac{1}{\log_3 x}} =$$



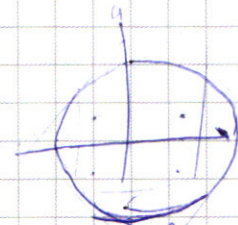
$$\log_3 a = \frac{1}{3} \quad a = 6 \quad \sqrt[3]{a} = 6^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{\log_3 x} = t$$



$$\sqrt[3]{\log_3 x} \quad \sqrt{\log_3 x}$$

$$\sqrt[3]{\log_3 x}$$



$$120 \sqrt{\log_3 x} - 99 \sqrt{\log_3 x} + 21 \sqrt{\log_3 x} \leq 48$$

$$40 \sqrt{\log_3 x} - 33 \sqrt{\log_3 x} + 9 \sqrt{\log_3 x} \leq 76$$

$$40t - 11t^2 + t^3 \leq 48$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 0$$

$t = 3$ - корень

$$\log_3 4$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -48 \\ 3 & 1 & 18 & 16 & 0 & \end{array}$$

$$88 - 44 - 48$$

$$2t + 120 - 99 - 48$$

$$4 \leq 3$$

$$\log_3^2 4$$

$$t^4 - 8t^2 + 6$$

$$(t-4)^2 (t-3) \leq 0$$

$$\sqrt{\log_3 x} = 4$$

$$\log_3$$

$$x = 4 \quad \sqrt{\log_3 x}$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 7$$

$$\log_3 x \leq 7$$

$$\log_3^2 4 = \log_3 x \quad \log_3 4$$

$$x \leq 3$$

$$\log_3 x \leq \log_3 7$$

$$\log_3 4 = \sqrt{\log_3 x}$$