

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} \leq 72$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\frac{\log_2 2}{\sqrt{\log_2 x}}} \leq 72$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \left(x^{\frac{\log_2 2}{\sqrt{\log_2 x}}} \right)^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

Положим $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}; (t > 0)$

$$t^3 - 14 \cdot t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

$$(t-2)(t^2 - 12t + 36) \leq 0$$

$$(t-2)(t-2)(t-6)^2 \leq 0$$

$$1) \quad t - 6 = 0$$

$$2) \quad (t-2) \leq 0$$

1) $t = 6$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6$$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\log_2 6}$$

$$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 6$$

т.к. $\log_2 6 > 0$, можем возвести в квадрат

$$\log_2 x = \log_2^2 6$$

$$\log_2 x = \log_2(2^{\log_2^2 6})$$

$$x = 2^{\log_2^2 6}$$

2) $(t-2) \leq 0$

$t \leq 2$, но при этом, т.к. $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$, то $t > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \leq 2 \\ t > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < t \leq 2 \end{array} \right\}$$

003

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$\log_x 2 \geq 0$$

$$\log_x 2 \geq \log_x 1$$

по м. рационализации

$$(x-1)(2-1) \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\log_2 x \geq 0$$

$$x \geq 1$$

Итого: $x > 1$

$$(2^{\sqrt{\log_2 x} - 2}) \leq 0$$

По м. рационализации.

$$(2-1)(\sqrt{\log_2 x} - 1) \leq 0 \quad / \cdot (\sqrt{\log_2 x} + 1) \quad \begin{matrix} \text{знак пер-ва} \\ \text{не меняется,} \\ \text{т.к. } \sqrt{\log_2 x} + 1 > 0 \end{matrix}$$

$$(\log_2 x - 1) \leq 0$$

$$(\log_2 x - \log_2 2) \leq 0$$

По м. рационализации

$$(2-1)(x-2) \leq 0$$

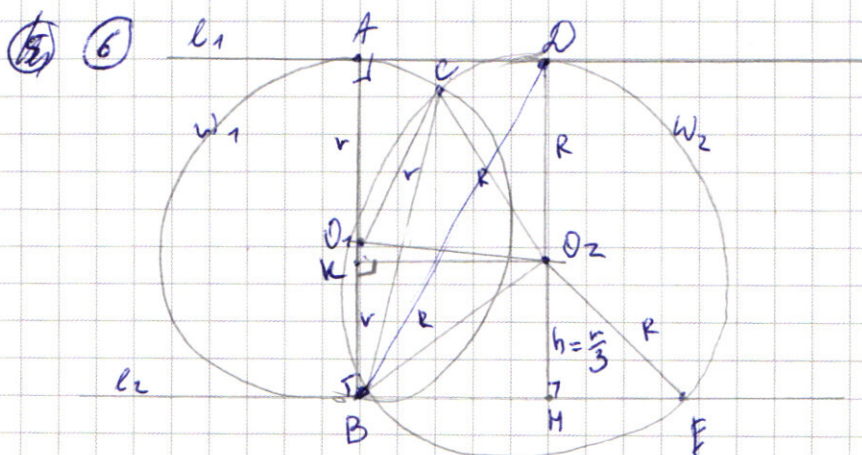
$$x \leq 2$$

$$(\text{из } 0 < x > 1)$$

$$\Rightarrow x \in [1; 2]$$

$$\begin{cases} x \in [1; 2] \\ x = 2^{\log_2^2 6} \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 2] \cup \{2^{\log_2^2 6}\}$$

$$\text{Ответ: } x \in [1; 2] \cup \{2^{\log_2^2 6}\}$$



Дано.

$$l_1 \parallel l_2$$

окр. W_1 (центр O_1) пусть r -радиус

окр. W_1 кас. l_1 в м. А

W_1 кас. l_2 в м. В

окр. W_2 (центр O_2) пусть R -радиус

W_2 кас. l_1 в м. С

$$\frac{S_{BO_2O_2}}{S_{\triangle O_2BE}} = 3$$

$$1) \frac{R}{r} = ?$$

$$2) R = ?; r = ?$$

$$BO_2 = 3$$

а) 1)

Проведем высоту $\triangle BO_2E$ к BE ($O_2H \perp BE$)

Пусть высота пересекает BE в м. Н.

$$\text{Пусть } O_2H = h$$

$$BH = \sqrt{BO_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{R^2 - h^2} \quad (\text{по м. Пифагора})$$

Проведем $\triangle BO_2E$ - равнобедр. ($BO_2 = EO_2 = R$) $\Rightarrow O_2H$ - медиана, биссектриса

$$\Rightarrow BH = HE = \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$S_{\triangle BO_2E} = \frac{1}{2} O_2H \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R^2 - h^2} \cdot h = h \cdot \sqrt{R^2 - h^2}$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- 2) Проведем $O_2 O_1$. И проведем $O_2 K$ — высоту в $\triangle BO_1 O_2$
 $(O_2 K \perp BO_1)$ K — точка пересечения $O_2 K$ и AB . BO_1
 $O_2 H \perp BE$ (как высота в $\triangle BO_2 E$)
 $BO_1 \perp BE$ (как радиус к касательной ℓ_2)
 $O_2 K \perp BO_1$ (как высота в $\triangle BO_1 O_2$)
 $\Rightarrow BKO_2 H$ — прямоугольник $\Rightarrow BH = KO_2$ (как противоположные стороны $BKO_2 H$)
 $KO_2 = \sqrt{R^2 - h^2}$

$$S_{\triangle BO_1 O_2} = \frac{1}{2} O_2 K \cdot BO_1 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{R^2 - h^2}$$

- 3) Рассмотрим $\triangle BO_1 O_2$ и $\triangle O_1 CO_2$

$$O_1 C = O_1 B = r$$

$$O_2 C = O_2 B = R$$

$O_1 O_2$ — общая сторона

Значит, $\triangle BO_1 O_2 = \triangle O_1 CO_2$ (по трем сторонам)

$$\Rightarrow S_{\triangle BO_1 O_2} = S_{\triangle O_1 CO_2}$$

$$S_{BO_1 CO_2} = S_{\triangle BO_1 O_2} + S_{\triangle O_1 CO_2} = 2S_{\triangle BO_1 O_2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} r \cdot \sqrt{R^2 - h^2} \right) = r \cdot \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$4) \frac{S_{BO_1 CO_2}}{S_{\triangle BO_2 E}} = \frac{r \cdot \sqrt{R^2 - h^2}}{h \cdot \sqrt{R^2 - h^2}} = \frac{r}{h} = 3 \Rightarrow h = \frac{r}{3} \quad (O_2 H = \frac{r}{3})$$

- 5) $O_1 A \perp AD$ (как радиус к касательной ℓ_1) (где $\ell_1 \parallel \ell_2$)
 $O_1 B \perp BH$ (как радиус к касательной ℓ_2)

И прямая $O_1 A$ и прямая $O_1 B$ проходят через т. O_1

$$\Rightarrow O_1 A \text{ и } O_1 B \text{ лежат на одной прямой } (AB) \quad (AB \perp \ell_1; AB \perp \ell_2)$$

$$O_2 D \perp AD \text{ (как радиус к кас. } \ell_1) \text{ (где } \ell_1 \parallel \ell_2)$$

$$O_2 H \perp BH \text{ (как радиус к кас. } \ell_2) \text{ (или как высота в } \triangle BO_2 E \text{ (} O_2 H \perp BE \text{))}$$

$$1 - < a > 42$$

$$p \quad a$$

$$a \leq 28$$

$$\frac{1}{2}$$

$$6 \geq 42$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{42}} = p$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{42}} = q$$

$$p - q =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

И прямые O_2H и O_2D проходят через $m.O_2 \Rightarrow O_2H$ и O_2D лежат
на одной прямой (HOD) ($HO \perp \ell_1$; $HO \perp \ell_2$)

$$AB \perp \ell_1 \text{ и } HO \perp \ell_1 \Rightarrow AB \parallel HO$$

$$AB \parallel HO \text{ и } \ell_1 \parallel \ell_2 \Rightarrow AD \parallel BH \text{ (где } HO \in \ell_1; BH \in \ell_2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow ABHO$ - прямоугольник $\Rightarrow AB = HO$ (или противоположные стороны)

$$AB = HO_2 + O_2B = 2r$$

$$HO = HO_2 + O_2H = R + \frac{r}{3}$$

$$2r = R + \frac{r}{3}$$

$$R = \frac{5}{3}r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$$

б)

Проведем BD .

$OH \perp BH$ (из ает предыдущего пункта)

$\Rightarrow \triangle BHO$ - прямоугольный

$$\Rightarrow BO^2 = BH^2 + HO^2 \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$(BH = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{9}})$$

$$9 = \left(R^2 - \frac{r^2}{9}\right) + \left(R + \frac{r}{3}\right)^2$$

$$9 = R^2 - \frac{r^2}{9} + R^2 + \frac{2}{3}R \cdot r + \frac{r^2}{9}$$

$$(R = \frac{5}{3}r)$$

$$9 = \left(\frac{25}{9}r^2\right) + \frac{25}{9}r^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}r^2$$

$$9 = \frac{1}{9}(50 + 10)r^2$$

$$r^2 = \frac{81}{60} \Rightarrow r = \frac{9}{2\sqrt{15}} \text{ (} r \neq \frac{9}{2\sqrt{15}} \text{ : т.к. } r - \text{ длина радиуса)}$$

$$R = \frac{5}{3}r = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{R}{r} = \frac{5}{3}, r = \frac{9}{2\sqrt{15}}, R = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

5

$$\begin{cases} x = |y - 5a| + 5a - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

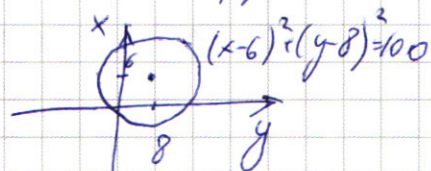
a - ? система имеет 3 реш.

2) Рассмотрим Нарисуем график функции
 $(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100$

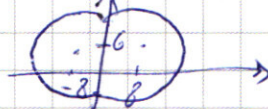
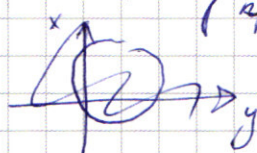
~~Это окружность~~ Строить будем в осях (y; x)

Рассм. график $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$ - это окружность
 с центром (8; 6) r = 10

Рассм. график $(|x| - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$



это график $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$, отраженный относительно осей x
 (прав. левая сторона все что слева от ox



зеркально, только что сверху)

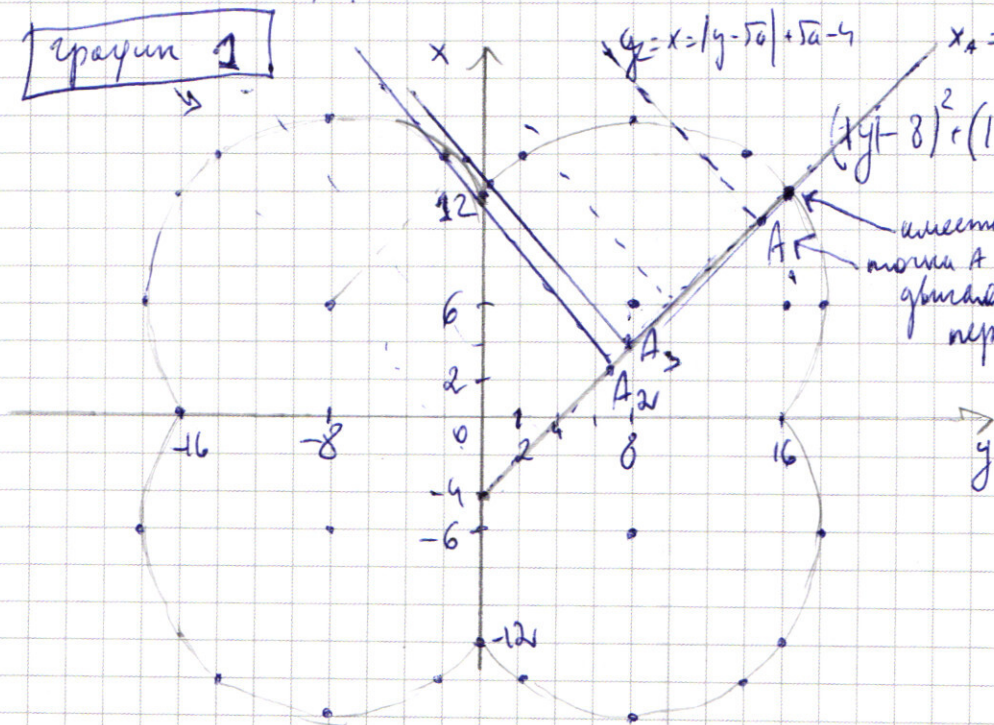
Рассм. график $(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100$

это график, отраженный относительно оси y

$(|x| - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$ (все что сверху от oy зеркально, снизу только что сверху)

Ито есть:

График 1



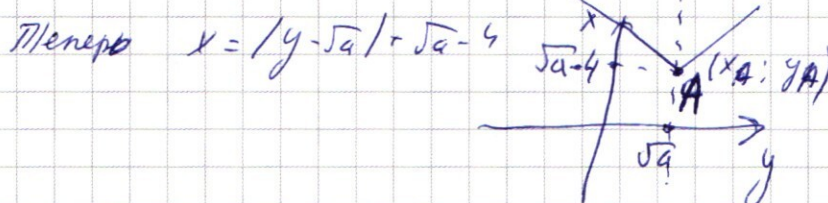
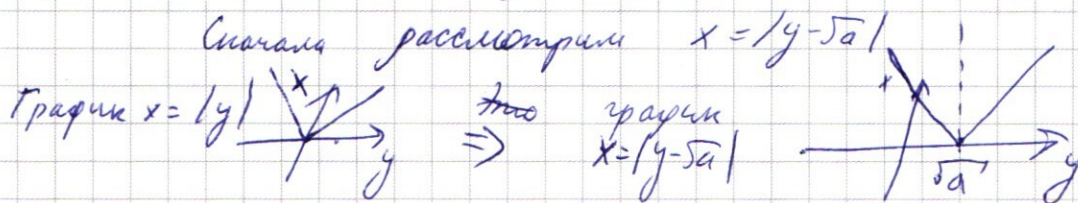
$$x = y - 4$$

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$$

имеет положительн. точки A пересекли др пересек. уберем по $x = y - 4$ пересекли $(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Рассмотрим $x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4$. (Скресим ответ в осях $(y; x)$)



до

Рассмотрим координаты точки A
 $(x_A; y_A)$

Имеет $y_A = \sqrt{a}$; $x_A = \sqrt{a} - 4$
 $x_A = \sqrt{a} - 4 = y_A = 4$

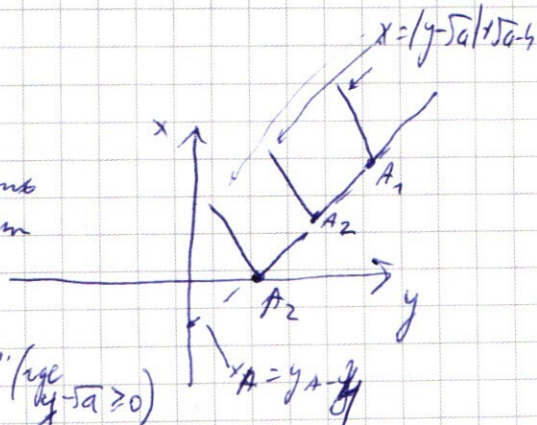
Обозначим A
то A - точка
в которой
график имеет
наименьшее
значение
(точка в "углублении"
вершины графика)

Значит, вершина графика находится в точке A
Значит, все ~~возможные~~ вершины графика лежат
на прямой $(x_A = y_A - 4)$ ~~или график $x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4$
"едит" по этой~~

Заметим, что $y_A = \sqrt{a} \Rightarrow y_A \geq 0$ и $x_A = \sqrt{a} - 4 \Rightarrow x_A \geq -4$

Построим $\begin{cases} x_A = y_A - 4 \\ x_A \geq -4 \\ y_A \geq 0 \end{cases}$
(из пункта 1)

Относительно y будет иметь
вот такую галочку, которая будет
как бы едуть по прямой
 $y_A = y_A - 4$



Заметим, что правая часть "галочки" (где $y - \sqrt{a} \geq 0$)
будет совпадать с прямой $x_A = y_A - 4$
т.е. в обеих функциях коэффициент k при y , $k = 1$
 $x_A = k \cdot y_A - 4$, $k = 1$ $x_A = y_A - 4$
 $(y - \sqrt{a} \geq 0) \Rightarrow x = y - \sqrt{a} + \sqrt{a} - 4 \Rightarrow x = y - 4$ $\leftarrow$ это и та же
функция при $y \geq \sqrt{a}$

- 3) Смотреть будет на график 1 из пункта 1
Рассмотрим передвигающуюся ф-ию по прямой $x_A = y_A - 4$
сверху вниз. ("спускась" сверху вниз)
После того, как вершина A пересечет окружность график
($(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100$) Правая часть галочки
($y \geq x = y - 4$) всегда будет пересекать график ($(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100$)
Нам нужно 3 точки пересек. Их можно получить,
только если левая часть "галочки" будет пересекать
график ($(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100$) в 2-х точках)
На графике 1 видно, что это случится при A_2 ,
когда $y = (x = \sqrt{a} - y + \sqrt{a} - 4)$ пересекать точку $(0; 12)$ (обозначено на графике 1)
и при A_3 , когда $(x = \sqrt{a} - y + \sqrt{a} - 4)$ касаясь касается
окр. с центром $(-8; 6)$
Если (где $x = \sqrt{a} - y + \sqrt{a} - 4$ - левая часть "галочки")
Если левая часть пересекет т. $(0; 12) \Rightarrow 12 = \sqrt{a} - 0 + \sqrt{a} - 4$
Если нет $2\sqrt{a} = 16$
 $\sqrt{a} = 8$
 $a = 64$
Если лев. часть касается окр с центром $(-8; 6)$, то
 R (от центра этой окр до прямой $x = 2\sqrt{a} - y - 4$) = 1
$$\begin{cases} (y+8)^2 + (x-6)^2 = 100 & \text{система} \\ x = 2\sqrt{a} - y - 4 & \text{имеет одно решение} \end{cases}$$
$$(y+8)^2 + (2\sqrt{a} - y + 10)^2 = 100$$
$$y^2 + 16y + 64 + 4a - 4\sqrt{a}(y+10) + (y^2 + 20y + 100) = 100$$
$$2y^2 + 36y(36 - 4\sqrt{a}) + 64 + 4a - 40\sqrt{a} = 0 \quad | : 2$$
$$y^2 + y(18 - 2\sqrt{a}) + 32 + 2a - 20\sqrt{a} = 0$$

т.к. есть одно решение, то $D = 0$
только
$$\frac{D}{4} = (9 - \sqrt{a})^2 - 32 - 2a + 20\sqrt{a} = 0$$
$$81 - 18\sqrt{a} + a^2 - 32 - 2a + 20\sqrt{a} = 0$$
$$-a + 2\sqrt{a} + 49 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-a + 2\sqrt{a} - 49 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$a - 2\sqrt{a} - 49 = 0$$

$$t = \sqrt{a}, \quad t \geq 0$$

$$t^2 - 2t - 49 = 0$$

$$D = 1 + 49 = 50 \quad (D > 0)$$

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{50}, \quad \text{т.к. } t \geq 0 \quad t = \sqrt{50} - 1$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{50} - 1$$

$$a = (\sqrt{50} - 1)^2 = 50 - 2\sqrt{50} + 1 = 51 - 2\sqrt{50}$$

Ответ: $a = 64$; $a = 51 - 2\sqrt{50}$

②

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

Дано

$$\frac{\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x)}{(\cos^2 3x - \sin^2 3x)} = \sqrt{2}$$

$$\cos 3x \neq \sin 3x$$

$$\tan 3x \neq 1$$

$$3x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x$$

$$= \sqrt{2}$$

$$= \cos 6x$$

$$\cos 3x \neq -\sin 3x$$

$$\tan 3x \neq -1$$

$$x \neq \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\cos 7x + \sin 7x - \sqrt{2} \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) - \sqrt{2} \cos 6x = 0$$

Существует φ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{т.к. } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \right) - \sqrt{2} \cos 6x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 6x = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 6x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 6x}{2}\right) = 0 \quad | :(-2)$$

$$\sin\left(2x - \frac{13x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

по формуле
приведения

$$-\cos\left(\frac{13x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\frac{13x}{2} = 0$$

$$\frac{13x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi p, p \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{13} + \frac{2\pi p}{13}, p \in \mathbb{Z}$$

$$-\cos\frac{x}{2} = 0$$

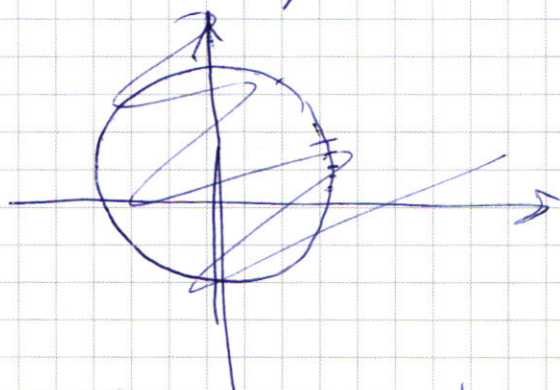
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим ОДЗ

$$1) x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) x \neq -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}$$



I Пересеч. x_1 и 1)

$$\frac{\pi}{13} + \frac{2\pi}{13} p \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n \quad | \cdot \frac{13 \cdot 12}{\pi}$$

$$12p + 24p \neq 13 + 52n$$

$$24p - 52n = 1 \text{ - диофантово ур-е}$$

$$24 : 4 \text{ и } 52 : 4, \text{ но } 1 \not\div 4$$

$\Rightarrow$ ур-е не имеет реш. (НОД(24, 52) = 4)

$\Rightarrow$ все p - подходит

II Пересеч. x_1 и 2)

$$\frac{\pi}{13} + \frac{2\pi}{13} p \neq -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k \quad | \cdot \frac{13 \cdot 12}{\pi}$$

$$12 + 24p \neq -13 + 52k$$

$$24p - 52k = -25 \text{ - диофантово ур-е}$$

$$24 : 4 \text{ и } 52 : 4, \text{ но } (-25) \not\div 4 \text{ (НОД(24, 4) = 4)}$$

$\Rightarrow$ ур-е не имеет реш. $\Rightarrow$ все p - подходит

III Пересеч. x_2 и 1)

$$\pi + 2\pi t \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n \quad | \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$12 + 24t \neq 1 + 4n$$

$$24t - 4n = -11 \text{ - диофантово ур-е}$$

$$\text{НОД}(24, 4) = 4, \text{ но } (-11) \not\div 4 \Rightarrow \text{ур-е не имеет реш}$$

$\Rightarrow$ все t - подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

IV

Пересечем X_2 и 2)

$$\pi + 2\pi t + \pi - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k \quad / \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$12 + 24t + \pi - \pi + 4k$$

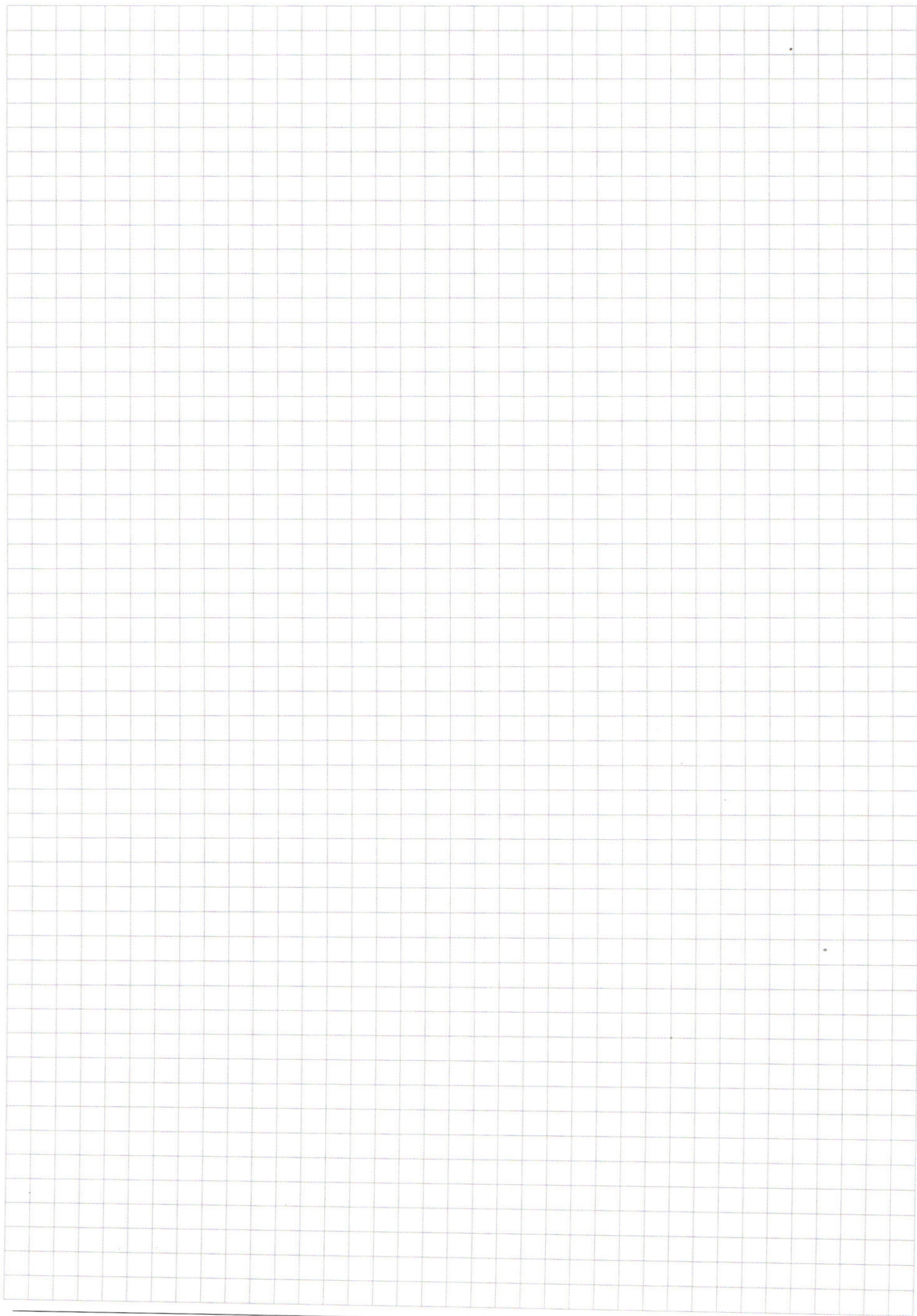
$$24t - 4k = 13 \quad - \text{диофантова ур.е}$$

$$\text{НОД}(24; 4) = 4, \text{ но } -13 \nmid 4 \Rightarrow \text{ур.е не имеет р-ов}$$

 $\Rightarrow$ все t подходят

$$\text{Ответ: } X = \frac{\pi}{13} + \frac{2\pi}{13} p, p \in \mathbb{Z}$$

$$Y = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



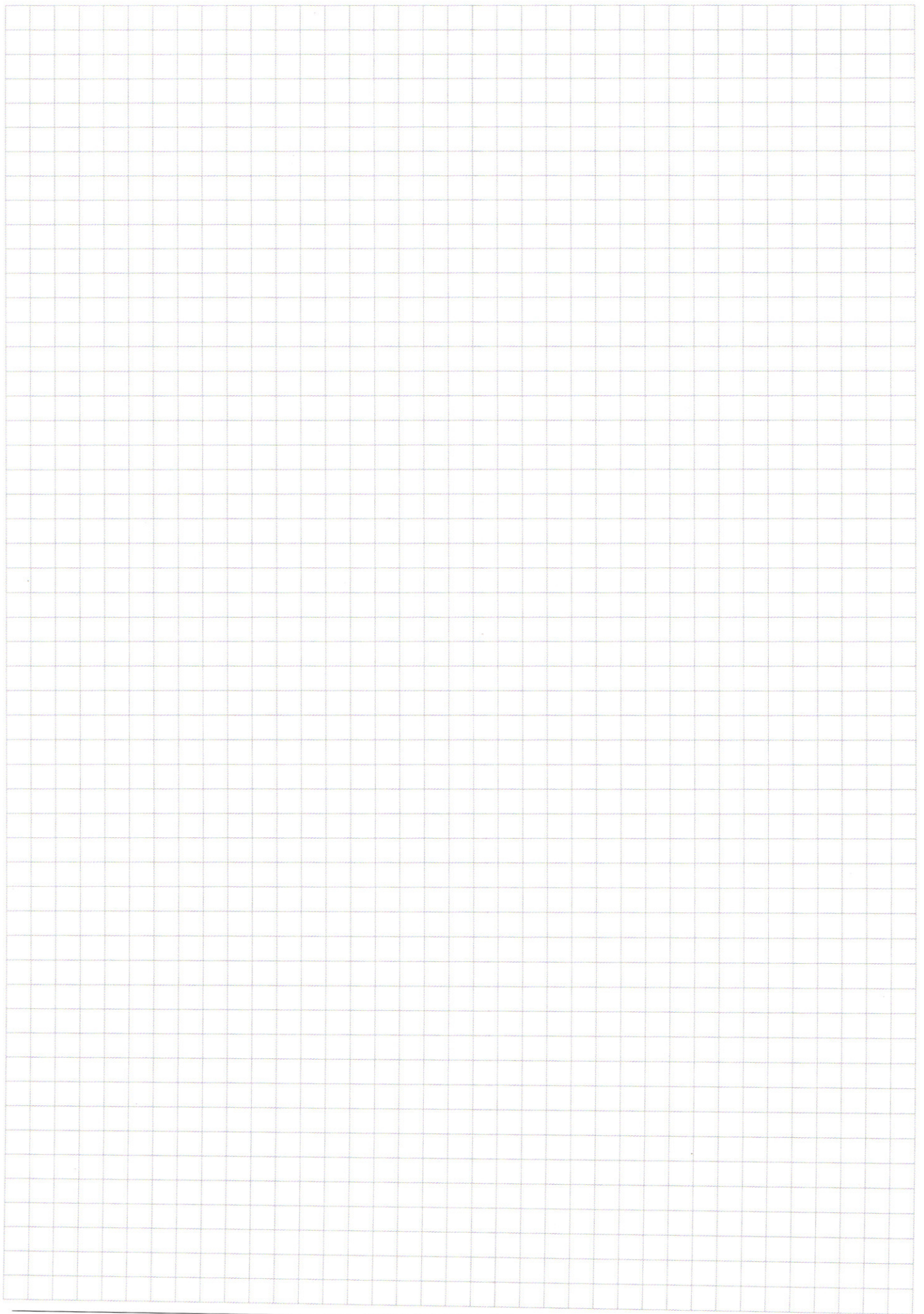
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

70 бросков

$$P(>42) = p$$

$$P(\leq 28) = q$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$ 223

$2^3 \sqrt{\log_2 x} - 14 \cdot 2^{2 \sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot x^{(\log_2 x)^2} \leq 72$ $x > 0$

$2^3 \sqrt{\log_2 x} - 14 \cdot 2^{2 \sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\log_2 x} - 72 \leq 0$ $\log_2 x \geq 0$

$2^{\sqrt{\log_2 x}} = t$ $x \geq 1$

$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$ $x \neq 1$

$8t^3 - 56t^2 + 120t - 72 \leq 0$ $x > 1$

$-12t^2 + 60t - 72 \leq 0$

$-15t^2 + 60t - 72 \leq 0$

$1 - 14 + 60 - 72$

$2 - 2 - 28$

-120

-56

4

$70 - 6 = 64$

$8 - 72 = 64$

$72 \div 2 = 36$

$36 \div 2 = 18$

$18 \div 2 = 9$

$9 \div 3 = 3$

$3 \div 3 = 1$

$1 - 14 + 60 - 72$

$2 - 28 + 36 - 0$

$-12 + 36$

$(t-2)(t^2 - 12t + 36) \leq 0$

$t^3 - 12t^2 + 36t - 2t^2 + 24t - 72$

$t^3 - 14t^2 + 60t - 72$

$(t-2)(t-6)^2 \leq 0$

$(2^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^1)(2^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\log_2 6})^2 \leq 0$

$(2-1)^2 (\sqrt{\log_2 x} - 1)(\sqrt{\log_2 x} - \log_2 6) \leq 0$

$(\log_2 x - 1)(\log_2 x - \log_2^2 6) \leq 0$

$(x-2) \leq 6$ $\log_2 6 \leq \log_2 x$

$\log_2 x = \log_2^2 6$

$\log_2 x = \log_2^2 6$

$x \in (-\infty; 2] \cup \{x = 2^{\log_2^2 6}\}$

$5 \quad 9 \quad 13 \quad 17 \quad 21$

$17 \div 12 = 1 \frac{5}{12}$

$29 \div 12 = 2 \frac{5}{12}$

$33 \div 12 = 2 \frac{9}{12}$

$$(2) \quad \frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{O.D.3} \quad & \frac{\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x)}{(\cos^2 3x - \sin^2 3x)} = \sqrt{2} \cos^2 3x + \sqrt{2} \sin^2 3x = 0 \\ & \cos 3x + \sin 3x \quad \cos 3x - \sin 3x \\ & \cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x - \sqrt{2} (\cos 6x) = 0 \\ & \cos 6x \end{aligned}$$

$$\cos 3x \neq 1$$

$$3x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\cos 3x \neq -1$$

$$3x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$$



$$\frac{\cos(7x) + \sin 2x - \sqrt{2} \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) - \sqrt{2} \cos 6x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 6x = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

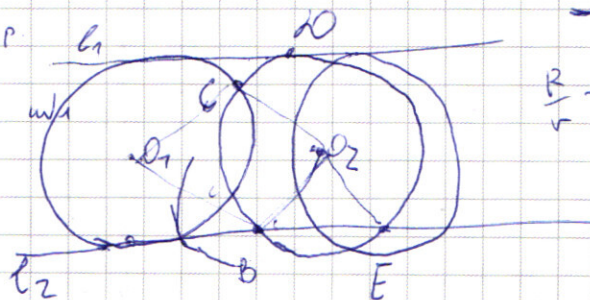
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sin x + \sin y) &= \frac{1}{2} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta) &= \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ 2 \sin \alpha + \sin \beta &= \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \end{aligned}$$

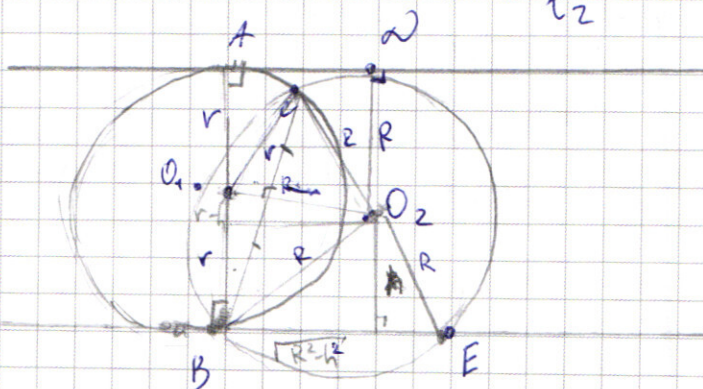
$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} p &> 42 \\ q &\leq 28 \\ p &(> 42) \\ q &(\leq 28) \end{aligned}$$

$$p - q = 0 \text{ for } p$$



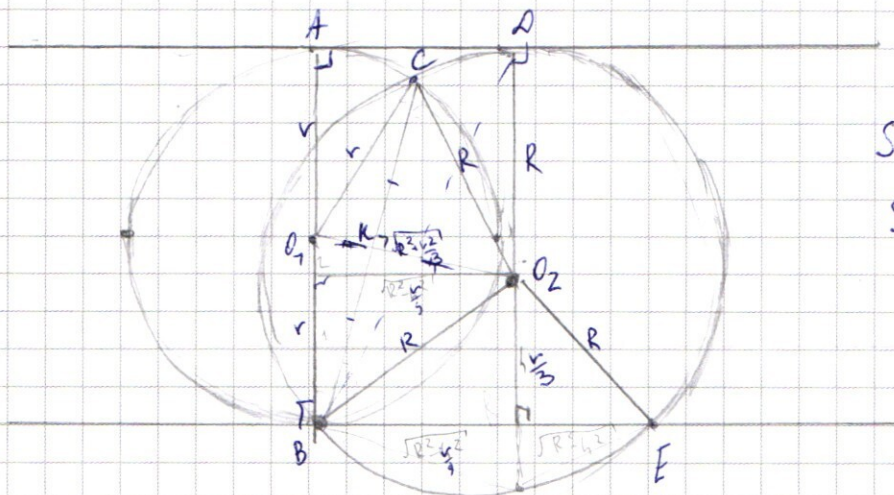
$$\frac{R}{r} = ?$$



$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_1EO_2}} = 3$$

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - h^2} &= \sqrt{(R+h)^2 - (h-h)^2} \\ R^2 - h^2 &= R^2 + 2Rh + 2Rh - h^2 \\ h^2 + h(h^2 - 2Rh - h^2 - 2Rh) &= 0 \\ h^2 - h(2R+h) &= 2Rh = 0 \\ 2Rh &= -2Rh \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_{BO_1CO_2} = \frac{1}{2} r \cdot \sqrt{R^2 - h^2} \cdot 2$$

$$S_{BO_2E} = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - h^2} \cdot h \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{r}{h} = 3$$

$$r = 3h$$

$$O_1O_2 = \sqrt{\frac{4}{9}r^2 + R^2 - \frac{r^2}{9}} = \sqrt{R^2 + \frac{r^2}{3}}$$

$$2r = R + \frac{r}{3}$$

$$\frac{6}{3}r - \frac{r}{3} = R$$

$$\frac{5}{3}r = R$$

$$\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 + r^2}{3}} + \sqrt{\frac{r^2 - R^2 + r^2}{3}} = \sqrt{1 - \frac{r}{R}} + \sqrt{\frac{2}{3} \frac{r^2}{R}} = \sqrt{1 - \frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

$$BO_2^2 = R^2 - \frac{r^2}{9} + \left(R - \frac{r}{3}\right)^2$$

$$9 = 2 \left(\frac{25}{9} r^2 \right) = \frac{r^2}{9} + 2 \cdot \frac{5}{3} r \cdot \frac{r}{3} + \frac{r^2}{9}$$

$$9 = \frac{50r^2}{9} + \frac{10r^2}{9}$$

$$81 = 60r^2$$

$$r^2 = \frac{81}{60}$$

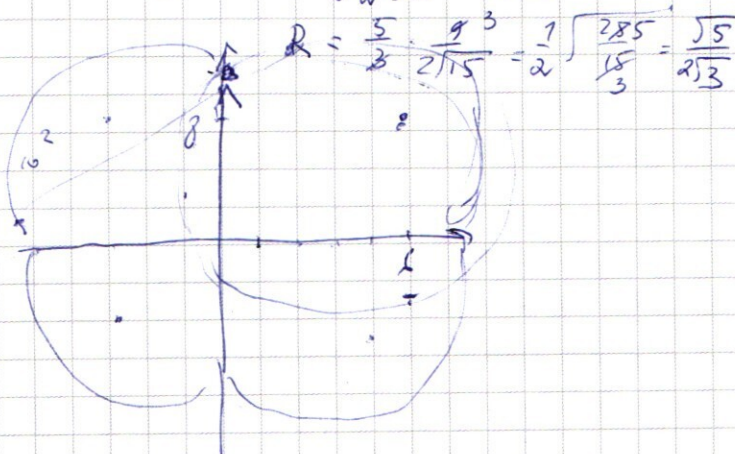
$$\Rightarrow r = \frac{9}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{9}{2\sqrt{15}}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{\sqrt{45 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{1215}}{10} = \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

⑤

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| - \sqrt{a} - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$



5)

$$(y+8)^2 + (x-6)^2 = 100$$

$$(y+8)^2 + (2\sqrt{a}-y-4)^2 = 100$$

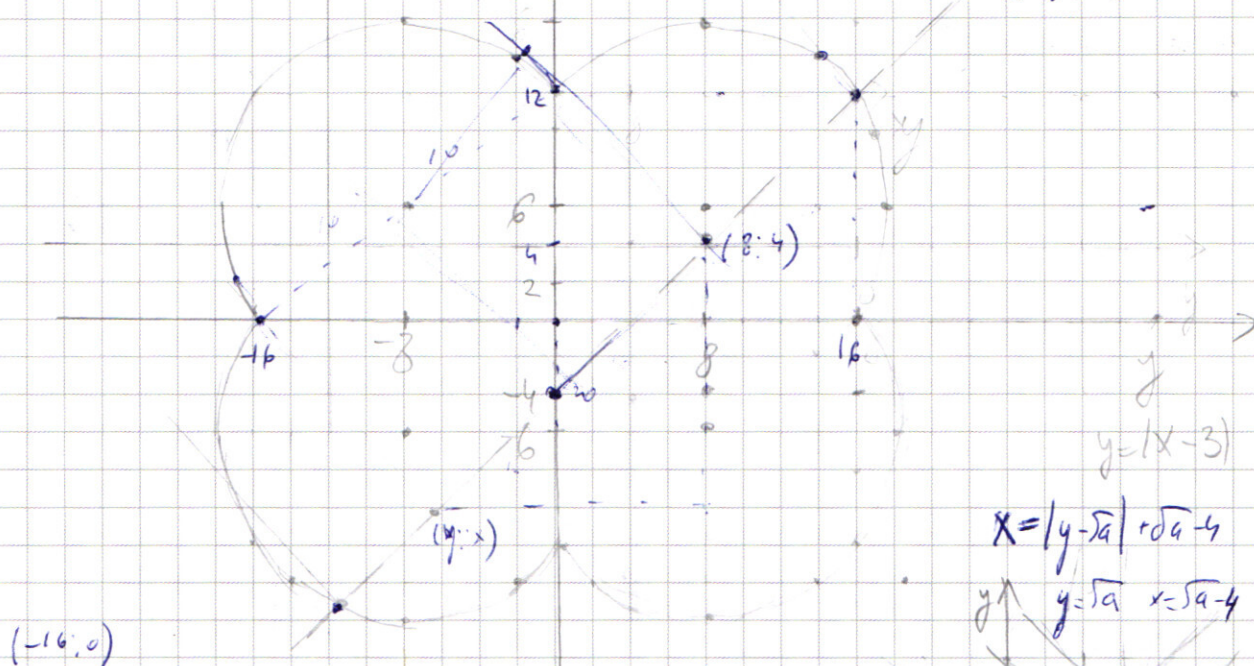
$$y^2 + 16y + 64$$

$$5 = \frac{|y_1 + x_2 - 2\sqrt{a} - 4|}{\sqrt{2}}$$

$$y + x - 2\sqrt{a} + 4 = 0$$

$$y = 2\sqrt{a} - y - 4$$

$$x_0 = y_0 - 4$$



(-16; 0)

$$0 = \sqrt{a} + 16 - \sqrt{a} - 4$$

$$2\sqrt{a} = -12$$

$$\sqrt{a} = -6$$

$$x = 0$$

$$0 = \sqrt{a} - y + \sqrt{a} - 4$$

$$y = 2\sqrt{a} - 4$$

$$x = \sqrt{a} - y + \sqrt{a} - 4; y \leq \sqrt{a}$$

$$(0; 12) \quad (-2; 14)$$

$$12 = \sqrt{a} + \sqrt{a} - 4$$

$$14 = \sqrt{a} + 2 + \sqrt{a} - 4$$

$$16 = 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = 8$$

$$a = 64$$

$$16 = 2\sqrt{a}$$

$$a = 64$$

$$(y+8)^2 + (x-6)^2 = 100$$

$$(y+8)^2 + (y+2)^2 = 100$$

$$x = y - 4$$

$$2y^2 + 16y + 64 + y^2 + 4y + 4 = 100$$

$$2y^2 + 20y + 68 = 100$$

$$2y^2 + 20y - 32 = 0$$

$$y^2 + 10y - 16 = 0$$

$$y_1 = -2 \quad y_2 = -8$$

$$(8-y)^2 + (4-x)^2 = 100$$

$$2y^2 + 24y - 20 = 0$$

$$x = |y + 5\sqrt{41}| + 9 - \sqrt{41}$$

$$(y-8)^2 + (x-6)^2 = 100$$

$$y^2 - 16y + 64 + y^2 - 20y + 100 = 100$$

$$2y^2 - 36y + 64 = 0$$

$$y^2 - 18y + 32 = 0$$

$$(y-2)(y-16) = 0$$

$$y = 16$$

$$x = 12$$

$$y_1 = -2 \quad y_2 = -8$$

$$x_1 = -6 + \sqrt{46} - 4 = -10 + \sqrt{46}$$

$$x_2 = -6 - \sqrt{46} - 4 = -10 - \sqrt{46}$$

$$-9 - \sqrt{41} = \sqrt{a} + 5 - \sqrt{41}$$

$$\sqrt{a} = -5 - \sqrt{41}$$

$$y_1 = -2 \quad y_2 = -8$$

$$y_1 = -2 \quad y_2 = -8$$

$$y = -5 - \sqrt{41}; x = -9 - \sqrt{41}$$

$$y = -5 - \sqrt{41}; x = -9 - \sqrt{41}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)