

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.

- ✓ 3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

- ✓ 6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) \frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 8x \cos 3x - \cos 8x \sin 3x + \sin 8x \cos 3x + \sin 8x \sin 3x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \cos 3x + \sin 3x \neq 0 \\ \cos 3x - \sin 3x \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 6x \neq 0, \text{ т.к. по ОДЗ } \cos 6x = (\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x) \neq 0$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 6x$$

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{11}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Проверим корни согласно ОДЗ:

$$\begin{cases} \cos 3x + \sin 3x \neq 0 \\ \cos 3x - \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x) \neq 0 \Rightarrow \cos 6x \neq 0$$

$$\text{При } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \cos 6x = \cos \left(-\frac{3\pi}{2} + 12\pi n \right) = 0 \Rightarrow x \text{ не подходит}$$

$$\text{При } x = \frac{\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \cos 6x = \cos \left(\frac{3\pi}{22} + \frac{12}{11}\pi k \right) = \cos \left(\frac{\pi(3+24k)}{22}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\cos \frac{\pi(3+24k)}{22}, k \in \mathbb{Z} \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi(3+24k)}{22} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+24k \neq 11+22n, n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \neq \frac{1}{3} + \frac{11}{12}n, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k, k \neq \frac{1}{3} + \frac{11}{12}n, n, k \in \mathbb{Z}$$

(1) Вероятность попадания пули или вероятность попадания снаряда равно $\frac{1}{2}$.

Если снаряд попал не меньше 55 раз, то $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{55}$. Если снаряд попал не меньше

35 раз, то пуля попала не меньше $90 - (35 - 1) = 56$ раз $\Rightarrow q = \left(\frac{1}{2}\right)^{56}$.

$$p - q = \left(\frac{1}{2}\right)^{55} - \left(\frac{1}{2}\right)^{56} = \left(\frac{1}{2}\right)^{55} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{56} \quad \text{Ответ: } \left(\frac{1}{2}\right)^{56}$$

ОДЗ:
a ≥ 0

(5) $y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$ (2)

(2) $y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$

$((|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 25)$ (1)

$\begin{cases} x - \sqrt{a} \geq 0 \\ y = x - 2 \\ x - \sqrt{a} \leq 0 \\ y = -x + 2\sqrt{a} - 2 \end{cases}$ $x \geq 0$ или $a \in [0; +\infty)$

(1) $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 5^2$

$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \\ x \leq 0, y \geq 0 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \\ x \geq 0, y \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = 5^2 \\ x \leq 0, y \leq 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = 5^2 \end{cases}$

Окружность с радиусом 5 и центром (4;3) (-4;3) (4;-3) (-4;-3) соответственно

$\sqrt{a} \geq 0$
 $2\sqrt{a} - 2 \geq -2$

случай $2\sqrt{a} - 2 = -6$
тогда $y = -x - 6$ или

3 пересек с (x,y) можно не рассматривать

$y = -x + 6 \rightarrow 3$ пересечения
с $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 5^2$

$2\sqrt{a} - 2 = 6$

$\sqrt{a} = 4 \Rightarrow a = 16$
 $x = \sqrt{a} = 4$ 2 решения

при $\rho(0;1) = 5$

тогда $Q(-4;3)$ $(x+y-2\sqrt{a}-2=0)$

$(4(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 5^2)$

имеет 2 пересечения

$5 = \frac{|-4+3-2\sqrt{a}-2|}{\sqrt{2}}$

$5\sqrt{2} = |1-2\sqrt{a}|$

$1-2\sqrt{a} = \pm 5\sqrt{2}$

$2\sqrt{a} = 1 \pm 5\sqrt{2}$

$\sqrt{a} = \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{2}, \sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1+5\sqrt{2}}{2}$

$4,4 < \sqrt{2} < 4,5$

$7 < 5\sqrt{2} < 7,5$

$4 < \frac{1+5\sqrt{2}}{2} < 4,25$

$Q = \frac{(5\sqrt{2}+1)^2}{4} = \frac{51+10\sqrt{2}}{4}$

при $16 \leq a < \frac{51+10\sqrt{2}}{4}$

2 решения

$x \leq \frac{1+5\sqrt{2}}{2}$
 $\downarrow$
1 решение

Эта система имеет не больше 2 решений. Ответ: такой параметра a не существует

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{\sqrt{4 \log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 48$

$\exists t = 3^{\sqrt{\log_3 x}} > 0 \Rightarrow \log_3 t = \sqrt{\log_3 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x = (\log_3 t)^2 \Rightarrow \begin{cases} \log_3 3 = (\log_3 t)^2 \\ x = 3^{(\log_3 t)^2} \end{cases}$

$(3^{\sqrt{\log_3 x}})^3 - 11 \cdot (3^{\sqrt{\log_3 x}})^2 + 40 \cdot 3^{\frac{(\log_3 t)^2}{2}} \leq 48$

$t^3 - 11t^2 + 40 \cdot 3^{\log_3 t} \leq 48$

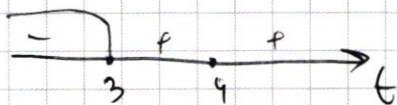
$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 0$

По схеме Горнера:

	1	-11	40	-48
3	1	-8	16	0

$(t-3)(t^2 - 8t + 16) \leq 0$

$(t-3)(t-4)^2 \leq 0$

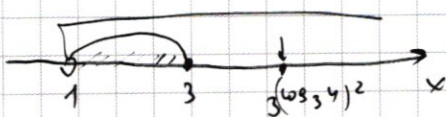


$t \leq 3, t = 4$

$3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3, 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_3 x} \leq 1 \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \log_3 x \leq 1 \\ \log_3 x = (\log_3 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 3^{(\log_3 4)^2} \end{cases}$

Напомним ОДЗ:



Ответ: $x \in (1; 3] \cup \{3^{(\log_3 4)^2}\}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_3 x \geq 0 \\ \log_3 x \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

⑦ продолжение

при $x \in [36; 88]$ $2 + 6^{90} - 90 - x + 1 = 6^{90} - 87 - x$ решений

~~$1135 \cdot 20 = 22700$~~ ~~$6^{90} - 88$~~ ~~$1135 \cdot 20$~~

~~88~~ при $x \in [6^n; 6^{n+1}-1]$ $n + 6^{90} - 90 - x + 1 = n + 6^{90} - 89 - x$ решений, ~~88~~ ~~А-теорема.~~

~~88~~

где n — натуральное

$0 \leq n \leq 88$

$Sum = 6^{90} \cdot 6^{90} - 89 \cdot 6^{90} - \frac{1 + 6^{90}}{2} \cdot 6^{90} + Sum(n)$

~~Sum(0)~~ $0: 6^1 - 1 - 6^0 + 1 \mid \text{раз}$

$1: 6^2 - 1 - 6^1 + 1 \mid \text{раз}$

$n: 6^{n+1} - 1 - 6^{n+1} + 1 \mid \text{раз}$

$6^{n+1} - 6^{n+1} \mid \text{раз}$

~~Sum~~ $h \cdot (6^{n+1} - 6^{n+1})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) Дано:

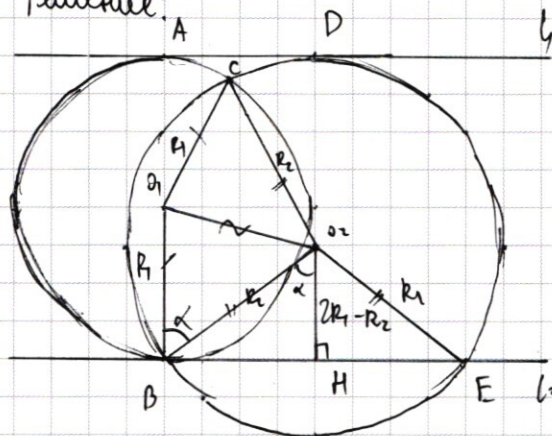
- $l_1 \parallel l_2$
- $W_1(O_1; R_1)$
- $W_2(O_2; R_2)$
- $l_1 \cap W_1 = A$
- $l_1 \cap W_2 = B$
- $l_2 \cap W_2 = D$
- $l_2 \cap W_1 = \{E\}$
- $W_1 \cap W_2 = C$

$$\frac{S_{\triangle O_1 C O_2}}{S_{\triangle O_2 B E}} = 2$$

$$\frac{R_2}{R_1} = ?$$

$$\delta) \begin{cases} BD = 2 \\ R_2 = ? \\ R_1 = ? \end{cases}$$

Решение:



$$1. O_2 H \perp BE, H \in BE$$

$$2. DH = 2R_1, O_2 D = R_2 \Rightarrow O_2 H = 2R_1 - R_2$$

$$3. \text{Проведём } O_1 O_2.$$

$$\triangle O_1 B O_2 = \triangle O_1 C O_2 \text{ (по 3 сторонам)}$$

$$O_1 C = O_1 B = R_1, O_2 C = O_2 B = R_2, O_1 O_2 \text{ — ось симметрии} \Rightarrow S_{\triangle C B O_2} = 2 S_{\triangle B O_2 H}$$

$$4. \triangle B O_2 E \text{ — } \triangle (B O_2 = O_2 E = R_2) \Rightarrow O_2 H \text{ — перпендикуляр к } BE \Rightarrow O_2 H \text{ — медиана, } S_{\triangle B O_2 E} = 2 S_{\triangle B O_2 H}$$

$$5. \angle O_1 B H = 90^\circ \text{ (т.к. } l_2 \text{ — касательная)}, \angle O_1 B H = \angle O_1 B O_2 + \angle O_2 B H = 90^\circ$$

$$6. \triangle B O_2 H \text{ — прямоугольный (т.к. } O_2 H \text{ — высота)} \Rightarrow \angle O_2 B H + \angle B O_2 H = 90^\circ$$

$$7. \begin{cases} \angle O_1 B O_2 + \angle O_2 B H = 90^\circ \\ \angle O_2 B H + \angle B O_2 H = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle O_1 B O_2 = \angle B O_2 H, \text{ т.е. } \angle \alpha = \angle O_1 B O_2$$

$$8. \sin \alpha = \frac{BH}{O_2 B} = \frac{BH}{R_2} \text{ (из прямоугольного } \triangle B O_2 H)$$

$$9. \frac{S_{\triangle O_1 C O_2}}{S_{\triangle O_2 B E}} = \frac{2 S_{\triangle B O_2 H}}{2 S_{\triangle B O_2 H}} = \frac{S_{\triangle B O_2 H}}{S_{\triangle B O_2 H}} = 2$$

$$10. S_{\triangle B O_2 H} = \frac{1}{2} \cdot O_1 B \cdot O_2 B \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R_1 R_2 \sin \alpha$$

$$11. S_{\triangle B O_2 H} = \frac{1}{2} \cdot O_2 H \cdot BH = \frac{1}{2} BH (2R_1 - R_2)$$

$$a) \text{ т.е. } \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{\frac{2}{3} R_2} = \frac{3}{2}$$

$$\delta) 13. \triangle B H D \text{ — прямоугольный} \Rightarrow BH^2 + DH^2 = BD^2$$

$$BH^2 + 4R_1^2 = 4 \Rightarrow BH^2 = 4 - 4R_1^2$$

$$\frac{R_1 R_2 \sin \alpha}{\frac{1}{2} BH (2R_1 - R_2)} = 2$$

$$\frac{R_1 R_2 \cdot BH}{R_2 \cdot BH (2R_1 - R_2)} = 2$$

$$R_1 = 4R_1 - 2R_2$$

$$3R_1 = 2R_2 \Rightarrow R_1 = \frac{2}{3} R_2$$

14. ~~Решить~~ $\triangle BO_2H$ - прямоугольный $\Rightarrow BH^2 + O_2H^2 = BO_2^2$

$$4 - 4R_1^2 + (2R_1 - R_2)^2 = R_2^2$$

$$4 - 4R_1^2 + 4R_1^2 - 4R_1R_2 + R_2^2 = R_2^2$$

$$R_1R_2 = 1$$

так $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}$

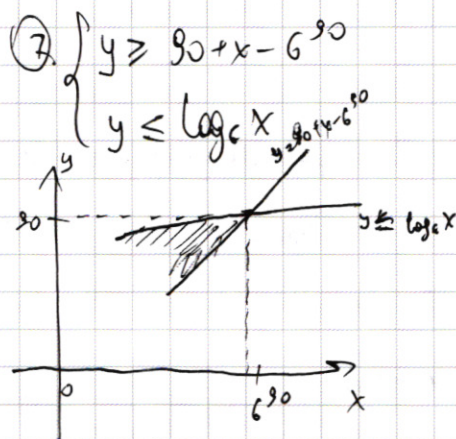
$$\frac{3}{2}R_1^2 = 1$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$R_2 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ответ а) $\frac{3}{2}$

б) $R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, R_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$



отсюда:
 $x > 0$

Из графика можно сделать вывод, что крайней с самым большим числовым значением является

$$(6^{90}; 90) \Rightarrow \begin{cases} x \leq 6^{90} \\ y \leq 90 \end{cases} \Rightarrow \text{т.к. } x, y \text{ — целые } x > 0 \text{ отсюда}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 6^{90} \\ y \leq 90 \end{cases}$$

при $x = 1$ $90 + 1 - 6^{90} \leq y \leq \log_6 1$
 $90 - 6^{90} \leq y \leq 0$

~~92 - 6^{90} + 1 = 93 - 6^{90}~~ ~~не подходит~~
 $90 - 6^{90} + 1 = 91 - 6^{90}$ решений

~~Решения~~

$x = 2$ $90 + 2 - 6^{90} \leq y \leq \log_6 2$

$x = 3$ соотв. $6^{90} - 92$ реш.

~~также как и при $x = 1$ $93 - 6^{90}$ не подходит~~
 ~~$93 - 6^{90}$ решений~~
 $6^{90} - 92 + 1 = 6^{90} - 91$ решений

при $x = 6$ $90 + 6 - 6^{90} \leq y \leq \log_6 6$

$$96 - 6^{90} \leq y \leq 1$$

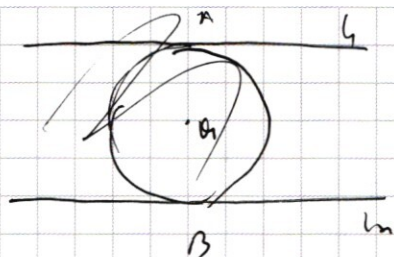
$$96 - 6^{90} - 90 - x + 1 = 6^{90} - 89 - x$$

$$1 + 6^{90} - 96 + 1 = -84 + 6^{90}$$

при $x \in [1; 5]$ Аналогично

при $x \in [6; 35]$ $1 + 6^{90} - 90 - x + 1 = 6^{90} - 88 - x$ решений

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} x - \sqrt{a} \geq 0 \\ y = x - 2 \\ x - \sqrt{a} \leq 0 \\ y = -x + \sqrt{a} - 2 \end{cases}$$

$$S_2 = \frac{|-4 + 3 + 2 - 2\sqrt{a}|}{\sqrt{2}}$$

$$S_2 = |1 - 2\sqrt{a}|$$

$$1 - 2\sqrt{a} = \pm \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{a} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\sqrt{a} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{a} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$x \leq \sqrt{a}$$

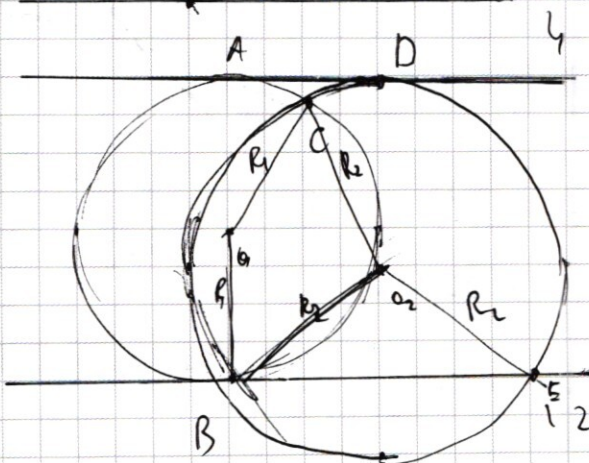
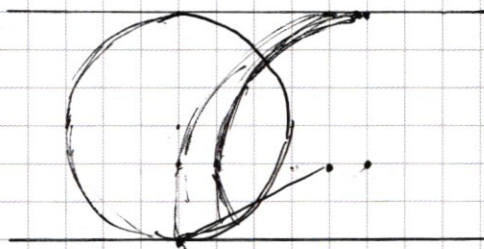
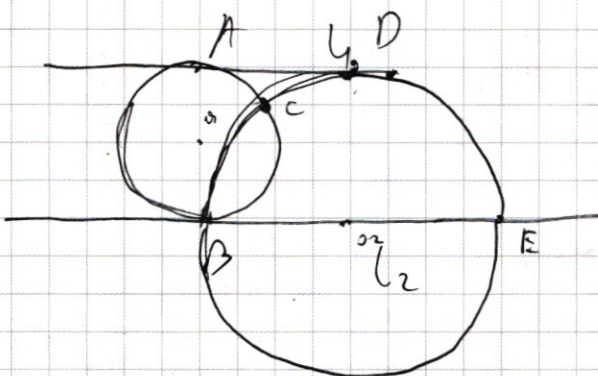
$$-x \geq -\sqrt{a}$$

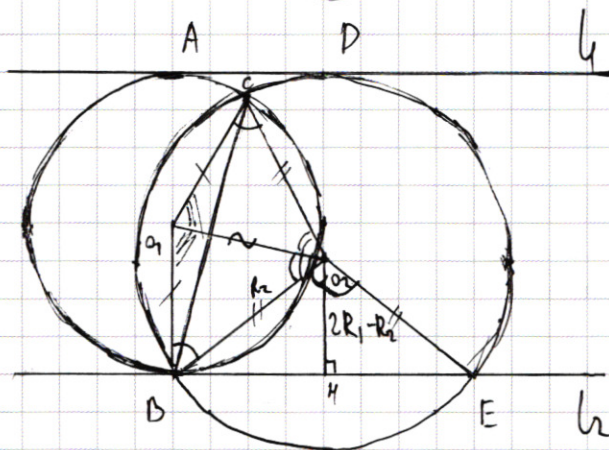
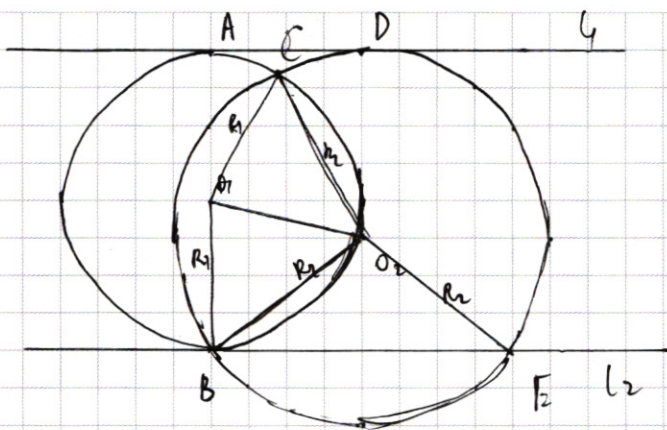
$$-x + \sqrt{a} - 2 \geq \sqrt{a} - 2 \geq x - 2$$

$$-x + \sqrt{a} \geq x$$

$$2x \leq \sqrt{a}$$

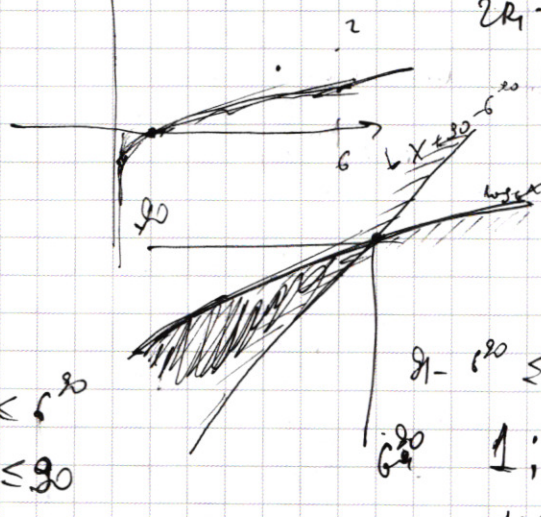
$$x - 2 \leq \sqrt{a} - 2$$





$$\begin{aligned} & (6^{90}; 90) \\ & (6^{90}; 90) \quad 1 \leq x \leq 6^{90} \\ & y \leq 90 \\ & 92 - 6^{90} \quad \text{при } x=1 \\ & \text{при } x=2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} R R_1 \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot (2R_1 - R_2) \cdot R_1 \sin \alpha$$



$$\begin{aligned} & 91 - 6^{90} + 1 = 92 - 6^{90} \\ & 92 - 6^{90} \leq y \leq \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{29 \cdot x}{x \cdot y}} = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{65}{1} < \frac{81 \pm 10 \sqrt{2}}{1} < \frac{66}{1} \\ & 16 \leq \frac{6}{1} < \frac{51 \pm 10 \sqrt{2}}{1} < \frac{33}{2} = 16 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y \geq 90 + x - 6^{90} \\ & y \leq \log_6 x \\ & y \leq \log_6 x \\ & x = 6^{90} \quad 90 \leq y \leq 90 \\ & y \leq \log_6 x \\ & y \leq \log_6 x \\ & 2 \leq \log_6 6 \\ & \text{вер} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_1}{2R_1 - R_2} = 2 \\ & R_1 = 4R_1 - 2R_2 \\ & 3R_1 = 2R_2 \\ & \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{\frac{2}{3}R_2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)!$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(3x - \cos(2x)) \sim \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$= 4\cos^3 x - 2\cos x$$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = 2\sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x =$$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

сумма $4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x) =$

$$= 4(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) - 3(\cos x - \sin x) =$$

$$= (\cos x - \sin x)(4 + 4\cos x \sin x - 3) = (\cos x - \sin x)(1 + 4\cos x \sin x)$$

$$= \cos 2x$$

или $4(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) - 3(\cos x + \sin x) =$

$$= (\sin x + \cos x)(4 - 4\sin x \cos x) =$$

$$\cos 2x$$

$$\cos 2x (\sin x + \cos x)(1 - 4\sin x \cos x) + \sin 2x (\sin x - \cos x)(1 + 4\sin x \cos x)$$

$$\frac{\cos 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x + \sin 2x \cos 3x + \sin 2x \sin 3x}{\cos 2x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos 6x = \cos(2x + 4x) = \cos 2x \cos 4x - \sin 2x \sin 4x$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 6x$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

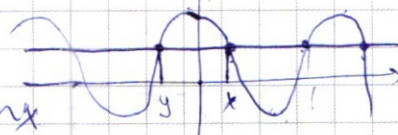
$$2x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 6x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{24}{24}\pi n\right)$$

$$\cos 6x =$$

$$= \cos\left(-\frac{3}{2}\pi + 12\pi n\right) = \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$= 0$$



$$\cos x = \cos y$$

$$\begin{cases} x = y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos x - \sin x)(1 + 4 \sin x \cos x) \neq 0 \\ \cos x \neq \sin x \\ \sin x \cos x \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\alpha = \beta + 2\pi n, \text{ но } \cos(-\beta + 2\pi n) = \cos \beta$$

$$\alpha = -\beta + 2\pi n, \text{ но } \cos(-\beta + 2\pi n) = \cos \beta$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \pi k$$

$$\cos 8x = \cos \left(\frac{2}{11} \pi + \frac{16}{11} \pi k \right) = \cos \left(\frac{2\pi + 16\pi k}{11} \right)$$

$$\frac{\pi + 8\pi k}{11} = \frac{\pi(1+8k)}{11} = 2\pi$$

миллион, но не $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

$$\cos 8x = (-2\pi + 8\pi n) = 1$$

$$\cos 3x + \sin 3x = \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} + 6\pi n \right) + \sin \left(-\frac{\pi}{4} + 6\pi n \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos 6x = \cos \left(\frac{3\pi}{22} + \frac{12}{11} \pi k \right) = \cos \left(\frac{\pi(3+24k)}{22} \right)$$

$$3+24k = 11$$

$$3+24k = 11$$

$$3+24k = 33$$

$$3(1+8k) = 11$$

$$4 \quad 8$$

$$\cos 6x = \cos \left(\frac{\pi(1+8k)}{22} \right) \neq 0$$

$$\frac{3\pi(1+8k)}{22} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ но } \frac{3(1+8k)}{22} \neq \frac{1}{2} + n, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3+24k}{22} \neq \frac{1}{2} + n, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$3+24k \neq 11 + 22n, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$22 \neq 24k \neq 8 + 22n, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$k \neq \frac{1}{3} + \frac{11}{12} n, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 \sqrt{\log_3 x} + 40 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 48$$

$$\sqrt{\log_3 x} \geq 0$$

$$27 - 11 \cdot 3 + 40x \leq 48$$

$$3 - 11 \cdot 3 + 40x - 48 \leq 0$$

$$3(3^t - 11)$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} = 3^{\frac{1}{2} \log_3 x}$$

$$3^{\log_3 x}$$

$$= 3^{(\log_3 x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$3^{(\log_3 x)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{3^{\log_3 x}}$$

$$3^{(\log_3 x)^{\frac{1}{2}}} = (3^{\frac{1}{2}})^{\log_3 x} = \sqrt{3}^{\log_3 x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3} = (\log_x 3)^{-1}$$

$$\log_x 3 = (\log_3 x)^{-1} \quad \sqrt{\log_3 x} =$$

$$\sqrt{(\log_3 x)^{-1}} = (\log_3 x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{\log_3 x} = \log_3 x \cdot (\log_3 x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3} = (\log_x 3)^{-1}$$

$$x \sqrt{(\log_3 x)^{-1}} =$$

$$\sqrt{4} = \frac{5\sqrt{2}+1}{2}$$

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$$x < 4$$

$$1 < \log_3 4 < 2$$

$$1 < (\log_3 4)^2 < 4$$

$$3$$

$$t = (\log_3 4)^2$$

$$\log_3 t = (\log_3 4)^2$$

$$t = \log_3 4$$

$$3^{(\log_3 4)^2}$$

$$3 = 4^t$$

$$2(4^t)^t = 4^{t^2} = 4^{(\log_3 4)^2}$$

$$x - \sqrt{4} > 0$$

$$x > \sqrt{4}$$

$$4 = x - 2$$

$$x - \sqrt{4} < 0$$

$$x < \sqrt{4}$$

$$4 = -x + 2\sqrt{4} + 2$$

$$x \leq 4 - 2\sqrt{4} + 2$$

$$2\sqrt{4} - 2 = 6$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$x < 4$$

$$5 = \frac{-4 + 3 - 2\sqrt{4} + 2}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} = |1 - 2\sqrt{4}|$$

$$1 - 2\sqrt{4} = \pm \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{4} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$R = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4} = \frac{5+1\sqrt{2}}{4}$$

$$3\sqrt{\log_3 x}$$

$$\sqrt{5\log_3 x}$$

$$-11 \cdot 3 \sqrt{4\log_3 x}$$

$$+40$$

$$3t = 3\sqrt{\log_3 x}$$

$$\sqrt{\log_3 x} = \log_3 t$$

$$\log_3 x = (\log_3 t)^2 \quad x = 3^{(\log_3 t)^2}$$

$$t^3 - 11t^2 + 40$$

$$\cdot (t^2 + 4t + 40)$$

$$\log_3 x = (\log_3 t)^2 \quad \log_3 3 = (\log_3 t)^2$$

$$40 \cdot (3^{(\log_3 t)^2})^{\frac{1}{(\log_3 t)^2}} = 40 \cdot 3^{\frac{1}{\log_3 t}} = 40 \cdot 3^{\log_3 t} = 40t$$

$$40t$$

$$(t^3 - 11t^2 + 40t - 48) \leq 0$$

$$y \geq \log_6 x - 6^{90}$$

$$x > 0$$

1	-11	40	-48
2	4	-5	22
3	1	-8	16
4	0		

$$y \leq \log_6 x$$

$$\log_6 x - 6^{90} \leq y \leq \log_6 x$$

$$(t-3)(t^2-8t+16) \leq 0$$

$$(t-3)(t-4)^2 \leq 0$$

$$t$$

