МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p-q$

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x-\sin 5x}+\frac{\sin 4x}{\cos 5x+\sin 5x}=-\sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}}-2^{\sqrt{4\log_2 x+3}}+21\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}}\leqslant 18$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO=\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO=18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x=-|y-\sqrt{a}|+6-\sqrt{a}, \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=5$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y\geqslant 70+x-4^{70}, \\ y\leqslant \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза; или
~~$\Rightarrow q=1-p$ – вероятность того, что орёл выпадет не больше 51 раза или вероятность того, что решка выпадет больше 51 раза $\Rightarrow$~~
$q=1-p$ – вероятность того, что решка выпадет не больше 28 раз, или вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз, $\Rightarrow p-q=-x$, где x – вероятность того, что орёл выпадет 29 раз $\Rightarrow$
$\Rightarrow x=\frac{29}{80} \Rightarrow p-q=-\frac{29}{80}$

Ответ: $-\frac{29}{80}$.

№2 $\frac{\cos 4x}{\cos 5x-\sin 5x}+\frac{\sin 4x}{\cos 5x+\sin 5x}=-\sqrt{2}$

ОДЗ: $5x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x \neq \frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}$

$\frac{\cos 4x(\cos 5x+\sin 5x)+\sin 4x(\cos 5x-\sin 5x)}{\cos^2 5x-\sin^2 5x}=-\sqrt{2}$

$\frac{\cos 9x+\sin 9x}{\cos 10x}=-\sqrt{2}$

$\cos 9x+\sin 9x=-\sqrt{2}\cos 10x$

$-\frac{\cos 9x}{\sqrt{2}}-\frac{\sin 9x}{\sqrt{2}}=\cos 10x$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}-9x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-10x\right)$

$$\left[\begin{aligned} &-\frac{\pi}{4}-9x=\frac{\pi}{2}-10x+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ &-\frac{\pi}{4}-9x=-\frac{\pi}{2}+10x+\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n \text{ – не подходит по ОДЗ.} \\ &19x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \end{aligned}\right.$$

$x=-\frac{3\pi}{76}+\frac{2}{19}\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} \neq -\frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi n$

$17 \neq 20n - 19k \Rightarrow n \neq 17.$

Ответ: $x = -\frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 17.$

№3 $8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{4\log_2 x}+3} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \leq 18$ ОДЗ: $x > 1$

$x^{\sqrt{\log_x 2}} = x^{\frac{\log_x 2}{\sqrt{\log_x 2}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$

$t = 2^{\sqrt{\log_2 x}} > 0$

$t^3 - 8t^2 + 21t - 18 \leq 0$

$t \leq 3$

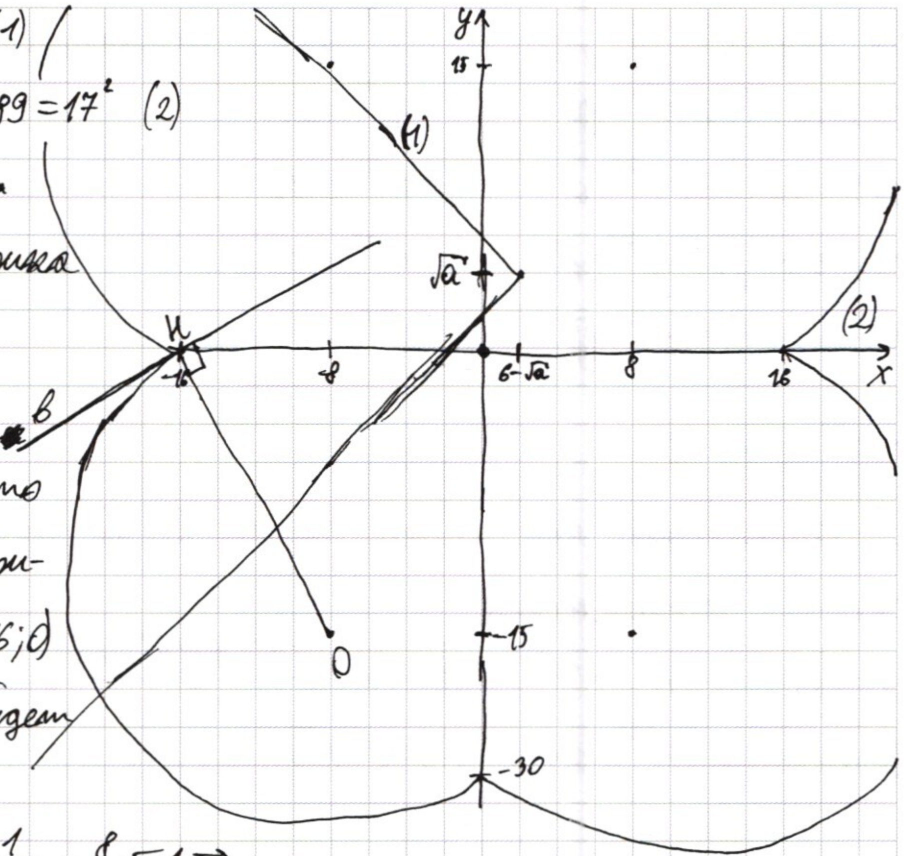
$2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 3$

$\sqrt{\log_2 x} \leq \log_2 3$

$\log_2 x \leq (\log_2 3)^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\begin{cases} x = -|y-\sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a} & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 289 = 17^2 & (2) \end{cases}$



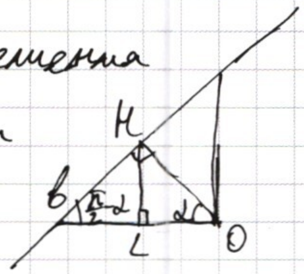
~~касательная~~ в ⊥ OH ~~(в-касател~~

~~tg~~ tg наклона графика (1) равняется 1 ⇒

⇒ если tg наклона прямой в меньше 1, то при пересечении графиком (1) точки H(-16;0) система уравнений будет иметь 3 решения.

$tg\,\alpha = \frac{15}{8} \Rightarrow tg(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{8}{15} < 1 \Rightarrow$

⇒ система уравнений имеет 3 решения в 2-ух случаях: 1) график (1) пересекает точку H.



OL=8

LH=15

2) график (1) пересекает точку (0;0).

1) $y=0, \; x=-16 \Rightarrow -16 = -\sqrt{a}+6-\sqrt{a}$

$a=121$.

2) $y=0, \; x=0 \Rightarrow 0 = -\sqrt{a}+6-\sqrt{a}$

$a=9$.

Ответ: $a=9, \; a=121$

№7 $\begin{cases} y \geq 70+x-4^{70} \\ y \leq \log_4 x \end{cases}$ ОДЗ: $x>0$

Не сложно заметить, что при $x=4^{70}$ $\log_4 x = 70+x-4^{70}$

т.к. $x>0$ и $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [1; 4^{70}]$ $\log_4 x \geq 70+x-4^{70}$

$x=1 \Rightarrow y \in [71-4^{70}; 0]$ $4^{70}-70$ – вариантов значения y при $x=1$

$x=2 \Rightarrow y \in [72-4^{70}; 0]$ $4^{70}-71$

$x=3 \Rightarrow y \in [73-4^{70}; 0]$ $4^{70}-72$

$x=4 \Rightarrow y \in [74-4^{70}; 1]$ $4^{70}-72$

$x=5 \Rightarrow y \in [75-4^{70}; 1]$ $4^{70}-73$

$\vdots$

$x=4^{70} \Rightarrow y=70$ 1

S – количество пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяющих системе неравенств.

$S=(1+2+3+4+\ldots+(4^{70}-70))+70=\frac{(4^{70}-70)(4^{70}-69)}{2}+70=2\cdot 4^{139}+2485+(-278\cdot 4^{69}).$

Ответ: $2\cdot 4^{139}+2485+(-278\cdot 4^{69})$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $p > 51$ р. $\quad q \le 29$ р. $\quad p-q-?$

$\Downarrow$

$p' = 1-p = \le 28$

$p-q = 1-p'-q$

$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} = -\frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi n$

$\frac{34}{380}\pi = \frac{20\pi n - 19\pi k}{190}$

$17\pi = 20\pi n - 19\pi k$

$17 = 20n - 19k$

$n \vdots 17,\ k \vdots 17 \Rightarrow n \ne 17, k \ne 17$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3}$ $y = \frac{\pi}{6}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) \overset{+}{-} \cos(x-y))$

2. $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$

$\frac{\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x(\cos 5x - \sin 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$

$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$

$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2}\cos 10x = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 10x = -2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x+9x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 9x + \sin 9x + 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x \cos 9x - \sin x \sin 9x) = 0$ $\quad -\sin\left(\frac{\pi}{4}+9x\right) = \cos 10x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} - 9x = \frac{\pi}{2} - 10x + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ -\frac{\pi}{4} - 9x = -\frac{\pi}{2} + 10x + \pi + 2\pi k \Rightarrow 19x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi k \end{array}\right.$

$x^{\log_x 2} = 2 \quad x^{\frac{1}{2}\log_x 2} = \sqrt{2} \quad x^{\sqrt{\log_x 2}} = x^{\log_x^{\frac{1}{2}} 2} =$

3. $8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{4\log_2 x + 9}} + 21\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \le 18$

$t > 0 \quad t = \sqrt{\log_2 x}$ $\quad x^{\log_x 2} =$

$8^t - 8\cdot 4^t + 21\cdot\sqrt{2} \le 18$ $\quad \boxed{x > 1}$ $\quad = 2^{\log_2 2}$

$\sqrt{\log_6 12}$

$a^3 - 8a^2 + 21\sqrt{2} - 18 \le 0$ $\quad \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$

$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 8\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 21\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \le 18$ $\quad \log_2 x \le \log_2^2 3$

$t^3 - 8t^2 + 21 t \le 18$ $\quad x^{\sqrt{\log_x 2}} = x^{\frac{\log_x 2}{\sqrt{\log_x 2}}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{\log_x 2}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$

$t^3 - 8\cdot t^2 + 21t \le 18 \Rightarrow t^3 - 8t^2 + 21t - 18 \le 0$ $\quad t = 3 \Rightarrow t \le 3 \Rightarrow 2^{\sqrt{\log_2 x}} \le 3$ $\quad \sqrt{\log_2 x} \le \log_2 3$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

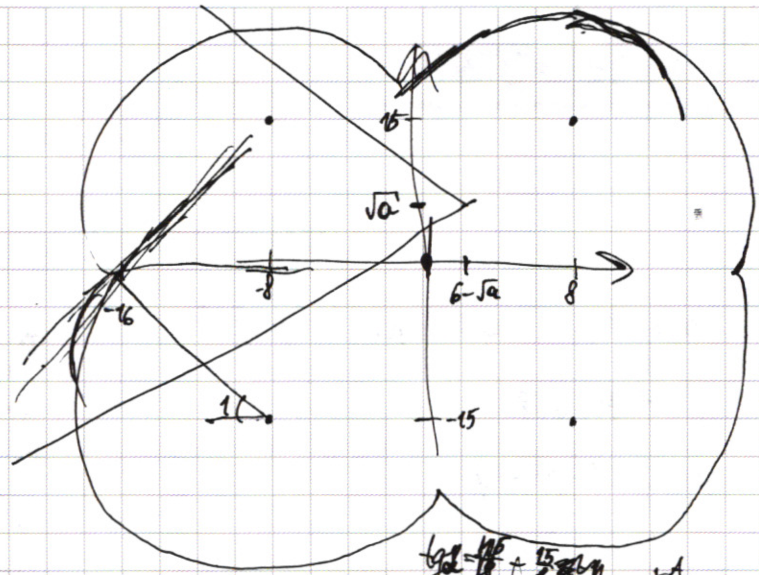
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

5. Зрешения:

$$\begin{cases} x=-|y-\sqrt{a}|+6-\sqrt{a} \\ ((|x|-8)^2+(|y|-15)^2=289=17^2 \end{cases}$$

1) ~~$x=a$~~ $y=0$ $x=-16$

2) $y=0$, $x=0$



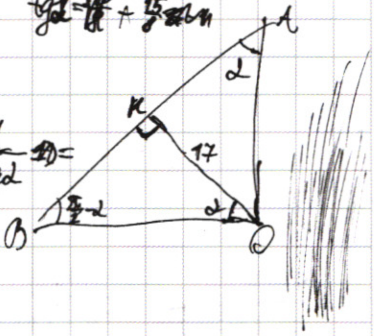
2) $\sqrt{a}=3 \Rightarrow a=9$

1) $-16=-\sqrt{a}+6-\sqrt{a} \Rightarrow a=121$

$1) tg(\frac{\pi}{2}-\alpha) < 1$

$tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{tg\alpha}=$

$=\frac{8}{15}<1 \Rightarrow 1) \neq \varnothing$

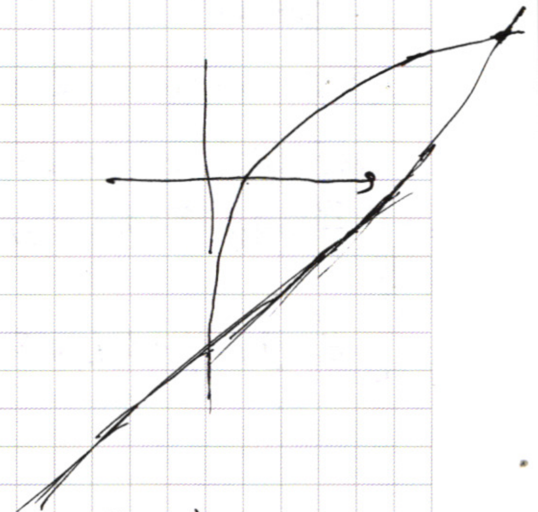


7. $\begin{cases} y \geq 70+x-4^{70} \\ y \leq \log_4 x \end{cases} \Rightarrow \log_4 x \geq 70+x-4^{70} \Rightarrow x>0$ $x<t$ $t-?$ $x,y \in \mathbb{Z}$

$\log_4 x \geq x+70-4^{70}$

~~$y=64 \Rightarrow 64 \leq \log_4 x \Rightarrow x \geq 4^{64}$~~

$x=4^{70} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 70 \\ y \geq 70 \end{cases} \Rightarrow y=70 \Rightarrow x \in [1; 4^{70}], \mathbb{Z}$



$x=1 \Rightarrow y \in [71-4^{70}; 0]$ $4^{70}-70$

$x=2 \Rightarrow y \in [72-4^{70}; 0]$ $4^{70}-71$

$x=3 \Rightarrow y \in [73-4^{70}; 0]$ $4^{70}-72$

$x=4 \Rightarrow y \in [74-4^{70}; 1]$ $4^{70}-72$

⋮

$x=16 \Rightarrow y \in [86-4^{70}; 2]$ $4^{70}-83$

⋮

$x=4^{70} \Rightarrow y=70$ 1

Отв.: $(1+2+3+...+4^{70}-70)+70=$

$=70+\frac{(4^{70}-70)(4^{70}-69)}{2}=70+2\cdot4^{139}-$

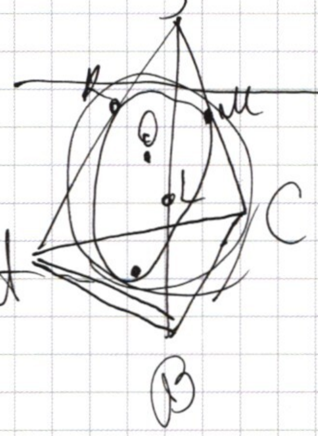
$-278\cdot4^{69}+35\cdot69=2\cdot4^{139}-278\cdot4^{69}+$

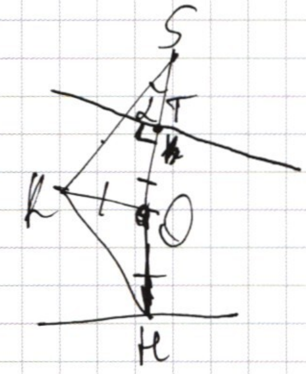
$+35\cdot71$

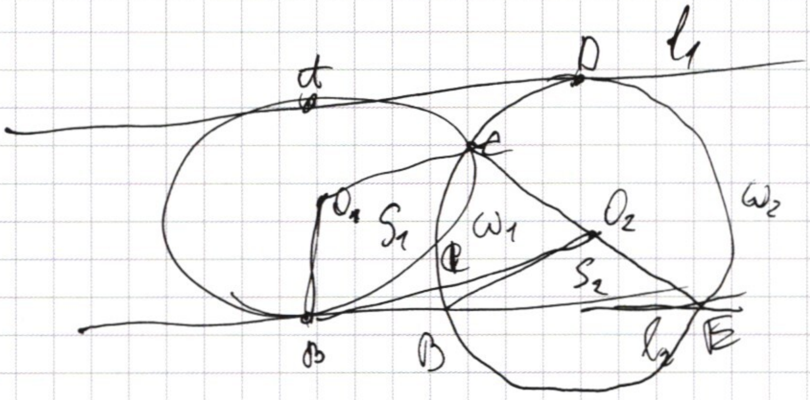
2485.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_2 x \le \log_2^2 3 = \log_2 3 - \log_2 3$







$\frac{S_1}{S_2} = 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА