

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p - q$
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x\sqrt{\log_2 x} \leq 18$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 5$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

$$(z-2)(z^2-6z+9)=0$$

$$(2^t-2)(2^t-3)^2 \leq 0$$

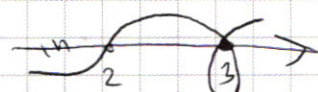
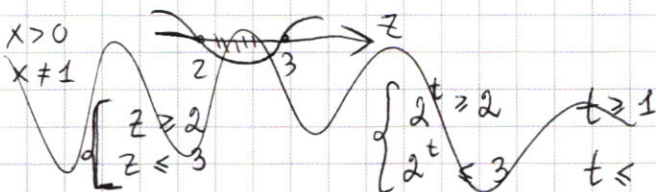
$$(\sqrt{\log_2 x} - 1)(\sqrt{\log_2 x} - \log_2 3) \leq 0$$

$$(z-2)(z-3)^2 \leq 0$$

$$(t-1)(t-\log_2 3)^2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_2 x} &= 1 \\ \log_2 x &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_2 x} &= \log_2 3 \\ \log_2 x &= \log_2^2 3 \\ x &= 2 \log_2^2 3 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} z=3 \\ z \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^t=3 \\ 2^t \leq 2 \\ t=\log_2 3 \\ t \leq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 3$$

$$\sqrt{\log_2 x} \leq 1$$

$$0 \leq \log_2 x \leq 1$$

$$\begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

$$x \leq 2$$

$$x \geq 1$$

$$\log_2 x = \log_2^2 3$$

$$x = 2 \log_2^3 \log_2^3$$

$$x = 3 \log_2^3$$

$$\begin{aligned} x &\neq 1 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$$\frac{180}{9} = 9 \cdot 20$$

$$9 \cdot 4 \cdot 5$$

$$\cos 4x - \cos 5x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$$

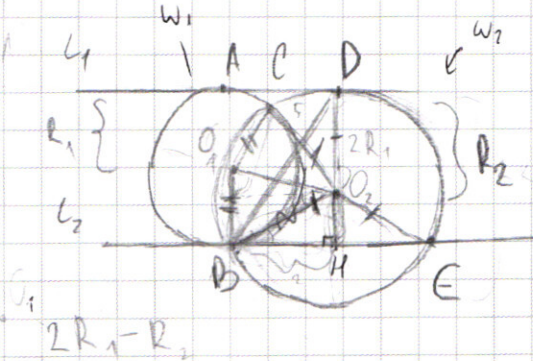
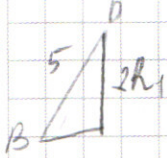
$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$$

~6

$$O_1 C = O_1 B = R_1$$

$$O_2 C = O_2 B = R_2$$

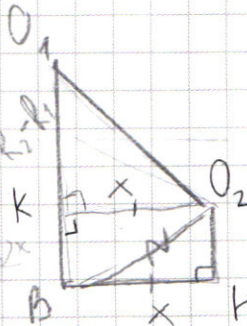
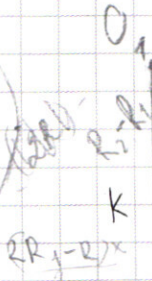
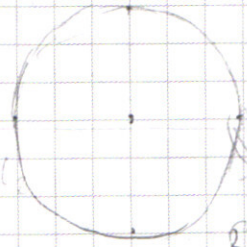
$$O_1 O_2 =$$



$$\frac{S_{BO_1 CO_2}}{S_{O_2 BE}} = 5$$

$$1) \frac{O_1 B \cdot R_2 \cdot \sin(\angle BO_1 O_2)}{O_1 B \cdot R_1 \cdot \sin(\angle BO_1 O_2)}$$

$$2) BD = 5$$



$$\frac{S_{O_1 BO_2}}{S_{O_2 BH}} = 5$$

$$\frac{(R_2 - R_1) \cdot x}{2} + \frac{(2R_1 - R_2) \cdot x}{2} = 5$$

$$\frac{R_2 - R_1 + 2R_1 - R_2}{2R_1 - R_2} = 5$$

$$R_1 = 10R_1 - 5R_2$$

$$5R_2 = 9R_1 \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5}$$

3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a+b=x \quad a-b=y$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

$$a+b=z$$

$$a-b=y$$

$$a+z=b$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$b_1(q^n - 1) = b_1(2^8 - 1) = b_1(255)$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cdot (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x \cdot (\cos 5x - \sin 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{0,5(0,875 - 0,125 - 1)}{-0,5} = 0,875$$

$$\cos 5x = \sin 5x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$p = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$b_n = b_1 \cdot a^{n-1}$$

$$b_{n+1} = b_1 \cdot a^n$$

$$b_{n+2} = b_1 \cdot a^{n+1}$$

$$\Sigma_n = b_n + b_{n+1} + b_{n+2} = b_1(a^{n-1} + a^n + a^{n+1}) = b_1 a^{n-1}(1 + a + a^2)$$

$$b_{n+1} = b_n \cdot a$$

	1	-8	21	-18
2	1	-6	9	0

$$3 + 9 + 27 = 36$$

$$3(1 + 3 + 9) = 36$$

$$9(27-1) = 26 \cdot 9 = 234$$

$$\frac{9(b_n - 1)}{2 - 1} = \frac{2(16-1)}{1} = 30$$

$$8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x} + 3$$

$$+ 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} = 18$$

$$\sqrt{\log_2 x} = t \geq 0$$

$$t = \log_2 x$$

$$x = 2^{t^2}$$

$$8^t - 2^{2t+3} + 21 \cdot 2^{t^2} = 18$$

$$2^t - 8z^2 + 21z - 18 \leq 0$$

$$8^t - 8 \cdot 4^t + 21 \cdot 2^t - 18 \leq 0$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x)}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 10x \neq 0$$

$$\cos 4x \cdot$$

$$\frac{51}{80} + \frac{52}{80} - 2$$

$$\frac{1}{80} + \frac{2}{80} + \frac{3}{80} + \dots + \frac{29}{80}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

$$\begin{aligned} a+b &= x \\ a-b &= y \end{aligned}$$

$$2a = x+y$$

$$a = \frac{x+y}{2}$$

$$2b = \frac{x-y}{2}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 5x + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x$$

$$\cos(4x+5x) + \sin(4x+5x)$$

$$\cos 10x$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \cos(10x)$$

$$\frac{18 \cdot 3 - 1}{2} = 3 \cdot$$

$$\cos 9x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 9x \right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{Bn(q-1)}{2}$$

$$\frac{18 \cdot 2}{3} = 12$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$19x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n$$

$$x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19}$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos(10x) = 0$$

$$\cos \left(\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x \neq 0$$

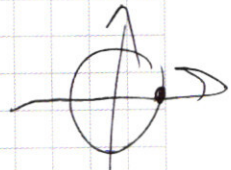
$$\frac{\pi}{4} \cos 5x - \frac{\pi}{4} \sin 5x \neq 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) \neq 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) \neq 0$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{19}{4} = \frac{57}{16}$$



$$54$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$\frac{15\pi}{20} + \frac{40\pi n}{20} = \frac{\pi}{20} + \frac{4\pi n}{20}$$

$$\frac{\pi}{4} + 5x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{14\pi - 36\pi n}{20} = \frac{14\pi - 36\pi n}{20}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} = 0$$

$$n \neq 7$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$BD_1^2 =$$

$$BH = \sqrt{4R_1^2 - 25}$$

$$R_2 = \frac{9}{5} R_1$$

$$89 - 51 = 29$$

$$BH = \sqrt{R_2^2 - 0.4R_1^2}$$

$$2R_1 - \frac{1}{2}R_2 = 0,2R_1$$

$$\frac{81}{4.8^2 R_1} - 0.04 R_1 \quad \left(\frac{9}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{81-1}{25} = \frac{80}{25}$$

$$b(9^n - 1)$$

$$x = -14 - \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a}$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = 289$$

$(8, 15)$

$$R = 17$$

$(-8, -15)$

$(8, -15)$

$(-8, 15)$

52

$Q_{80}^{51} + C_{80}^{52} + C_{80}^{53}$

$$y \geq 70 + x - y^{70}$$

$$y \leq \log_4 x$$

$$X = 4^{70}$$

$$y \leq \log 70$$

$$y \geq 70$$

$$y = 70$$

$$(470, 70)$$

4 20

$$y \leq 20$$

$$y = 70 + 4^{20} - 4^{70}$$

$$y = 70 - 4$$

$$40 + x - 4^{70} \leq \log_4 x$$

$$x \geq 4^{70+x-4^{70}}$$

$$x - 4^{70} + x - 4^{70} \geq 0$$

$$x - 4^{70} \cdot 4$$

$$a \cdot 4^a \geq 0$$

$$a > 0$$

$$x - 470 = a$$

~~$$y = \log_4(a - 4^{70})$$~~

$$y = \log_4 x$$

bn (9-1) 28

$$\frac{1}{g^n}$$

$$b_n(q-1)8$$

6.10

0.19

2	-1			
4				

~1

$$P \left\{ \frac{52}{80} + \frac{53}{80} + \dots + 1 \right\}$$

$$Q \left\{ \frac{1}{80} + \frac{2}{80} + \dots + \frac{29}{80} \right\}$$

$$P - Q = \frac{52}{80} - \frac{1}{80} + \frac{53}{80} - \frac{2}{80} + \dots + \frac{80}{80} - \frac{29}{80} = \frac{29 \cdot 51}{29 \cdot 80} = 0,6375$$

Ответ: 0,6375

~7

$$y \geq 70 + x - 4^{70}$$

$$y \leq \log_4 x$$

$$x > 0 \quad x \neq 1$$

$$\text{если } \log_4 x > 0$$

$$70 + x - 4^{70} < 0$$

$$x > 1$$

$$x < 4^{70} - 70$$

$$x \in$$

$$I \quad 70 + x - 4^{70} = \log_4 x$$

$$x = 4^{70+x-4^{70}}$$

$$x \neq 4^{70}$$

$$x = 4^{70}$$

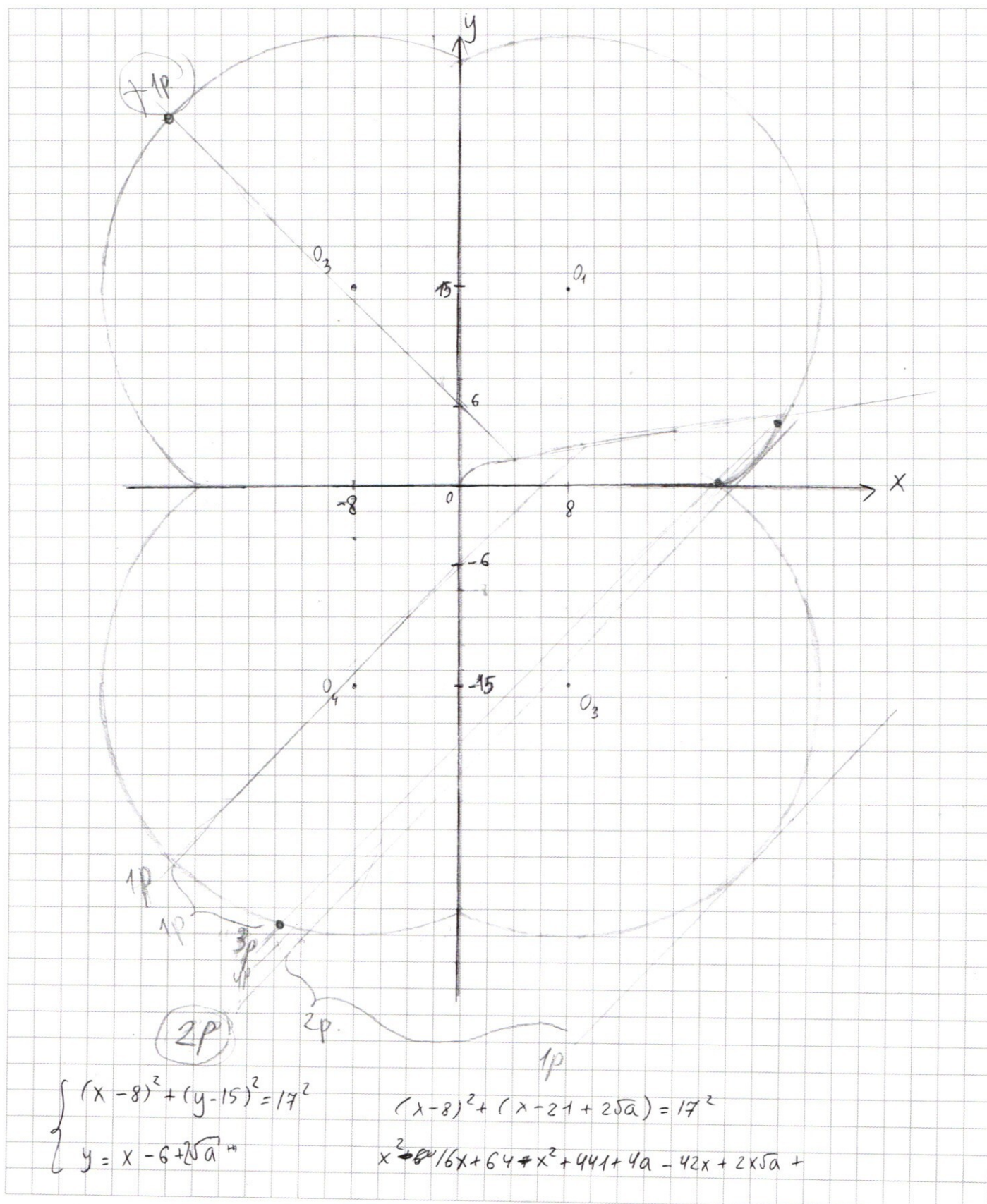
$$f(x) = x - \log_4 x$$

$$f(x) = 4^{70+x-4^{70}}$$

$\Rightarrow$ если и есть общие точки, то только одна

$$x = 4^{70}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} \cos\left(\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} 19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19}, n \in \mathbb{Z} & - \text{не подходит} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & - \text{подходит} \end{cases}$$

Проверка:

$$\cos 5x - \sin 5x \neq 0$$

$$\cos 5x + \sin 5x \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \neq 0 \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \neq 0$$

$$\text{аналогично} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + 5x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + 5x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ 5x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq -\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$15\pi + 40\pi n \neq \pi + 4\pi n$$

$$14 \neq -36\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$15 + 40n \neq -1 + 4n$$

$$16 \neq -36n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sim 5 \quad \int x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}$$

$$\left[(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 17^2 \right] - 4 \text{ окружности}$$

центры

$$\boxed{a \geq 0}$$

$$R = 17$$

$$O_1(8; 15)$$

$$O_2(8; -15)$$

$$O_3(-8; 15)$$

$$O_4(-8; -15)$$

если $y - \sqrt{a} \geq 0$

$$y \geq \sqrt{a}$$

$$x = -y + \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a}$$

$$y = 6 - x$$

если $y < \sqrt{a}$

$$x = y - \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a}$$

$$y = x - 6 + 2\sqrt{a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 1) $\frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5}$ 2) $R_1 = \frac{5\sqrt{5}}{6}$ $R_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

~1

$$q \left\{ \cancel{0,5} - q \left\{ 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 + \dots + 0,5^{29} \right\} \right\}$$

$$p \left\{ \cancel{0,5^{52} + 0,5^{53} + \dots + 0,5^{80}} \right\}$$

$$q = \frac{0,5 \cdot (0,5^{29} - 1)}{-0,5} = 1 - 0,5^{29}$$

$$p = \frac{0,5^{51} \cdot 0,5(0,5^{29} - 1)}{-0,5} = 0,5^{51}(1 - 0,5^{29})$$

$$p - q =$$

~2

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x(\cos 5x - \sin 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \left(\cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \right)$$

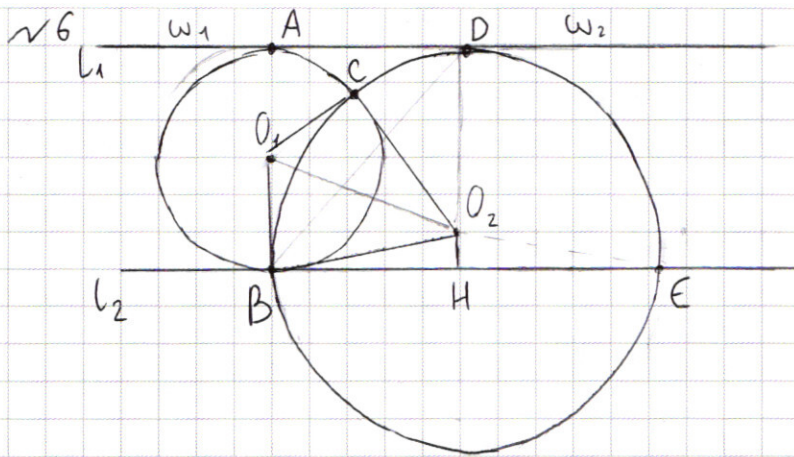
$$\frac{\cos 9x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 9x \right)}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) \right)}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cancel{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}} \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 10x = 0$$

$$2 \left(\cos \left(\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) \right) = 0$$



$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{\Delta O_2BE}} = 5$$

$$1) \frac{R_2}{R_1} = ?$$

R_1 - радиус окр ω_1

R_2 - радиус окр ω_2

$$1) O_1C = O_1B = R_1$$

$$O_2B = O_2C = R_2$$

O_1O_2 - общая сторона для $\Delta O_1CO_2 = \Delta O_1BO_2$ по 3 признаку

$$\Rightarrow S_{\Delta O_1O_2B} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{2}$$

$$BO_2 = O_2E = R_2$$

O_2H - перпендик. в ΔO_2BE

$\Rightarrow BH = HE$, тк. перпендикуляр, проведенный к хорде делит её пополам

$$\Delta BO_2H = \Delta O_2HE \Rightarrow S_{\Delta BO_2H} = \frac{S_{\Delta O_2BE}}{2}$$

пусть O_1K - высота ΔO_1O_2B

$$\Rightarrow \Delta KO_2B = \Delta O_2HB$$

$$O_1B = R_1$$

$$O_2H = 2R_1 - R_2 \Rightarrow BH = 2R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow O_1K = R_2 - R_1$$

Пусть $BH = KO_2 = x$

$$S_{\Delta O_1O_2K} = \frac{O_1K \cdot KO_2}{2} = \frac{(R_2 - R_1)x}{2}$$

$$S_{\Delta BKO_2} = S_{\Delta BHO_2} = \frac{O_2H \cdot BH}{2} = \frac{(2R_1 - R_2)x}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta BO_1O_2}}{S_{\Delta BHO_2}} = \frac{\frac{(R_2 - R_1)x}{2} + \frac{(2R_1 - R_2)x}{2}}{\frac{(2R_1 - R_2)x}{2}} = 5$$

$$\frac{R_2 - R_1 + 2R_1 - R_2}{2R_1 - R_2} = 5$$

$$R_1 = 10R_1 - 5R_2$$

$$5R_2 = 9R_1$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5}$$

$$2) \Delta BDH - \text{прямоуг.}$$

$$DH = 2R_1$$

$$R_2 = \frac{9}{5}R_1$$

$$O_2H = 2R_1 - \frac{9}{5}R_1 = \frac{1}{5}R_1$$

$$BH = \sqrt{BD^2 - DH^2} = \sqrt{25 - 4R_1^2}$$

$$BH = \sqrt{BO_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{\frac{81}{25}R_1^2 - \frac{1}{25}R_1^2} = \sqrt{\frac{80}{25}R_1^2}$$

$$25 - 4R_1^2 = \frac{80R_1^2}{25}$$

$$625 - 100R_1^2 = 80R_1^2$$

$$180R_1^2 = 625$$

$$R_1 = \frac{25}{6\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

$$R_2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{6} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sim 3 \quad 8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{4 \log_2 x} + 3} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 18$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

замена $\sqrt{\log_2 x} = t$, где $t > 0$

$$t^2 = \log_2 x \quad x = 2^{t^2}$$

$$8^t - 8 \cdot 2^{2t} + 21 \cdot 2^{t^2 \cdot \frac{1}{2}} - 18 \leq 0$$

$$2^{3t} - 8 \cdot 2^{2t} + 21 \cdot 2^t - 18 \leq 0$$

замена $2^t = z$, где $z > 0$

$$z^3 - 8z^2 + 21z - 18 \leq 0$$

$$(z-2)(z^2 - 6z + 9) \leq 0$$

$$(z-2)(z-3)^2 \leq 0$$

метод интервалов:

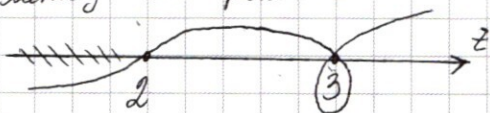


Схема горнера

	1	-8	21	-18
2	1	-6	9	0

$$\begin{cases} z \leq 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

обратная замена:

$$\begin{cases} 2^t \leq 2 \\ 2^t = 3 \end{cases}$$

замена:

$$\begin{cases} t \leq 1 \\ t = \log_2 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\log_2 x} \leq 1 \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_2 x = \log_2^2 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$x = 2^{\log_2^2 3} = 3^{\log_2 3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 1 \\ x = 3^{\log_2 3} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}$$

Ответ: $x \in (1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}$