

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
- б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
- б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$ $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \neq 0, x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$
 $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)} = \sqrt{2}$ $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) \neq 0, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k$
 $\frac{\cos 4x}{-2\sin(3x + \frac{\pi}{2} - 3x)\sin(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{2})} + \frac{\sin 4x}{2\cos(\frac{3x - 3x + \frac{\pi}{2}}{2})\cos(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{2})} = \sqrt{2}$
 $\frac{\cos 4x}{-2\sin(3x - \frac{\pi}{4})\sin(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{2})} + \frac{\sin 4x}{2\cos(3x - \frac{\pi}{4})\cos(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{2})} = \sqrt{2}$
 $\frac{\cos 4x}{-2\sin(3x - \frac{\pi}{4})} + \frac{\sin 4x}{2\cos(3x - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{2}$
 $\frac{\sin 4x}{\cos(3x - \frac{\pi}{4})} - \frac{\cos 4x}{\sin(3x - \frac{\pi}{4})} = 2 \Rightarrow \sin 4x \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 1$
 $-\cos(4x + 3x - \frac{\pi}{4}) = \sin(6x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - 6x) = -2\sin(3x - \frac{\pi}{4})\cos(3x - \frac{\pi}{4})$
 $-\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(6x) \Rightarrow \cos(7x - \frac{\pi}{4}) - \cos(6x) = 0$
 $-2\sin(\frac{7x - \frac{\pi}{4} + 6x}{2})\sin(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 6x}{2}) = 0$
 $\sin(\frac{x - \frac{\pi}{8}}{2}) = 0 \quad \sin(\frac{13x - \frac{\pi}{8}}{2}) = 0$
 $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k \quad \frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k$
 $x = 2(\frac{\pi}{8} + \pi k) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = (\frac{\pi}{8} + \pi k) \cdot \frac{2}{13}$
 $x = \frac{\pi}{52} + \frac{2}{13}\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 не удовлетворяет $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k$

Ответ: $x = \frac{\pi}{52} + \frac{2}{13}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\frac{\sqrt{\log_2 x}}{8} - 7 \cdot 2^{\frac{1}{4} + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 1}$
 $\frac{\sqrt{\log_2 x}}{2} - 7 \cdot 2^{\frac{1}{4} + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$
 Пусть $\sqrt{\log_2 x} = t, t > 0 (x > 1)$. Тогда $\sqrt{\log_2 x} = \frac{1}{4}, \log_2 x = \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow t^2 = \log_2 x \Rightarrow x = 2^{t^2} \Rightarrow x^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{t^3 \cdot \frac{1}{4}} = 2^{t^3}$
 $\Rightarrow 2^{t^3} - 14 \cdot 2^{t^2} + 60 \cdot 2^t - 72 \leq 0$
 Пусть $2^t = y, y > 0 \Rightarrow y^3 - 14y + 60y - 72 \leq 0$

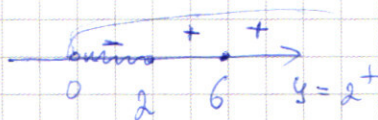
Тогда по т. Безу, корни уравнения могут быть число 2:

$$P(2) = 8 - 4 \cdot 4 + 120 - 72 = 0, \text{ где } P - \text{многочлен, что мы и искали.}$$

$$\Rightarrow \frac{y^3 - 14y^2 + 60y - 72}{y-2} = y^2 - 12y + 36 = (y-6)^2$$

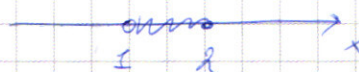
$$\Rightarrow y^3 - 14y^2 + 60y - 72 = (y-2)(y^2 - 12y + 36) = (y-2)(y-6)^2$$

$$\Rightarrow (y-2)(y-6)^2 \leq 0$$



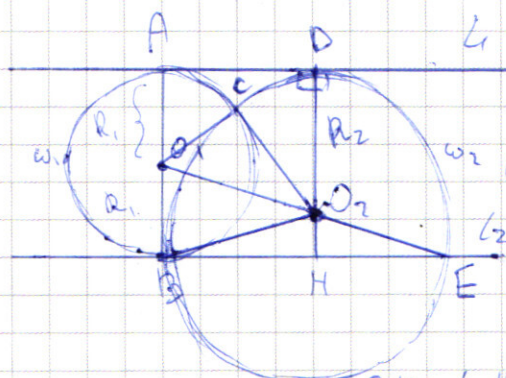
$$2^+ \in (0; 2]$$

$$2^+ = 2, \quad t = 1, \quad \sqrt{\log_2 x} = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2.$$



$$\text{Ответ: } x \in (1; 2]$$

6



$$a) \frac{R_2}{R_1} \quad b) R_2, R_1 - ?$$

а) т.к. $O, C = O, B = R_1$, R_1 - радиус окруж. ω_1 и $\cos \angle BO_2 = BO_2 = R_2$, R_2 - радиус окруж. ω_2 и O, O_2 - общая сторона,

$\triangle O_1BO_2 = \triangle O_1CO_2$ по 3м сторонам,

2) т.к. $L_1 \perp L_2$, то $\angle AOB + \angle AOM = 180^\circ$, но $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB \perp L_1$ $AB \perp L_2$

$$3) S_{BO_1CO_2} = 2 S_{BO_2O_1}, \quad AB - \text{диаметр } \omega_1.$$

т.к. $BO_2 = O_2E = R_2$, то $\triangle BO_2E$ равнобедренный $\Rightarrow O_2H$ - высота, проведенная из O_2 , делит $\triangle BO_2E$ на 2 равновеликих

$$\Rightarrow S_{BO_2E} = 2 \cdot S_{BO_2H}.$$

$$\text{Тогда: } \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = 3 = \frac{2 S_{BO_2O_1}}{2 S_{BO_2H}} = \frac{S_{BO_2O_1}}{S_{BO_2H}} = 3.$$

$$S_{BO_2O_1} = \frac{R_1 \cdot BH}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{O_2H} = 3, \quad R_1 = 3 O_2H \quad (1) \quad O_2H = \frac{R_1}{3}$$

$$S_{BO_2H} = \frac{BH \cdot O_2H}{2}$$

т.к. $\angle AOB + \angle BOM = 90^\circ$, $AB \perp OM \Rightarrow$ т.к. $L_1 \perp L_2$ и $AB \perp OM \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle M = \angle O = 90^\circ$

$ABOM$ - прямоугольник $\Rightarrow AB = OM = 2 R_1 = R_2 + O_2H$

$$\Rightarrow \text{из (1)} \quad 2 R_1 = R_2 + \frac{R_1}{3}; \quad 6 R_1 = 3 R_2 + R_1 \Rightarrow 3 R_2 = 5 R_1 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{3}$$

(продолжение на стр 3)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\cos 3x - \sin 3x \qquad \cos 3x + \sin 3x$$

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \qquad \cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\cos 3x + \cos \dots = 2 \cos \left(\frac{3x + 3x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cos \left(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos 4x = \sin 4x \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4} + 4x\right) = \sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(6x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) \quad \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos(6x) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{-7x - \frac{\pi}{4} - 6x}{2} \right) \cos \left(\frac{-7x - \frac{\pi}{4} + 6x}{2} \right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 0 \qquad \cos\left(\frac{13}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{x}{2} - \frac{n}{8} = \frac{n}{2} + nk$$

$$x - \frac{n}{4} = n + 2k, \quad x = \frac{5n}{4} + 2k$$

$$13x - \frac{n}{4} = n \quad 2nk$$

$$B \times = \frac{57 + 20k}{4}$$

$$X = \frac{5\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}$$

7.11. $g \in (0, 0, 1)$, то вершина
рамы = $(0, 1, 1)$ -

parametri = (0,4; 1)

p 42

$$p - 1 - p = 2p - 1 = \frac{242}{20} - 70 = \frac{14}{20} = 0,2$$

$$\frac{n}{4.13} = \frac{07}{52}$$

$$\frac{\cos 3x - \sin 3x}{\cos 3x} \neq 0$$

- 52

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \neq 0$$

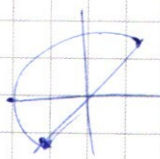
$$3x - \frac{11}{4} = \frac{11}{2} + nk$$

$$3x - \frac{\pi}{4} \neq \pi k$$

$$3k + 20 \div 3n + nk$$

$$x \neq \frac{n}{12} + \frac{nk}{12}$$

$$x \neq \frac{7}{4} \text{ and}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значения

$$\begin{cases} x = |y - 5a| + 5a - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

$$+1 - 6 = 25 + (1/1) \quad |y - 5a| = x - 5a + 4$$

$$25 + 49$$

$$100 + (4 - 6)^2 = 45$$

4) а)

$$y \geq 80 + x - 7$$

$$y < \log_7 x$$

$$y \geq -\log_7 x$$

$$0 \geq 80 + x - 7 + \log_7 x$$

$$7 \geq 80 + x + \log_7 x$$

$$\log_7 x + \log_7 x$$

$$\log_7 7 \cdot x$$

$$7 - 64$$

$$(7 - 64)(7^{40} + 6) \geq 16 + \log_7 7^x$$

$$-70000 \dots 0$$

$$80 \dots 143$$

$$400 \dots 0.09$$

$$-16666534$$

$$\log_7 x = 5$$

$$x = 7^5 = 16807$$

$$70000 + x = 16807$$

$$7 \cdot 10^x + x < 66534$$

$$7 \cdot 10^x = x$$

$$80 \dots 7$$

$$77 \dots 11 \dots 7$$

$$3 \dots 4 \dots 1$$

$$143$$

$$x > 0$$

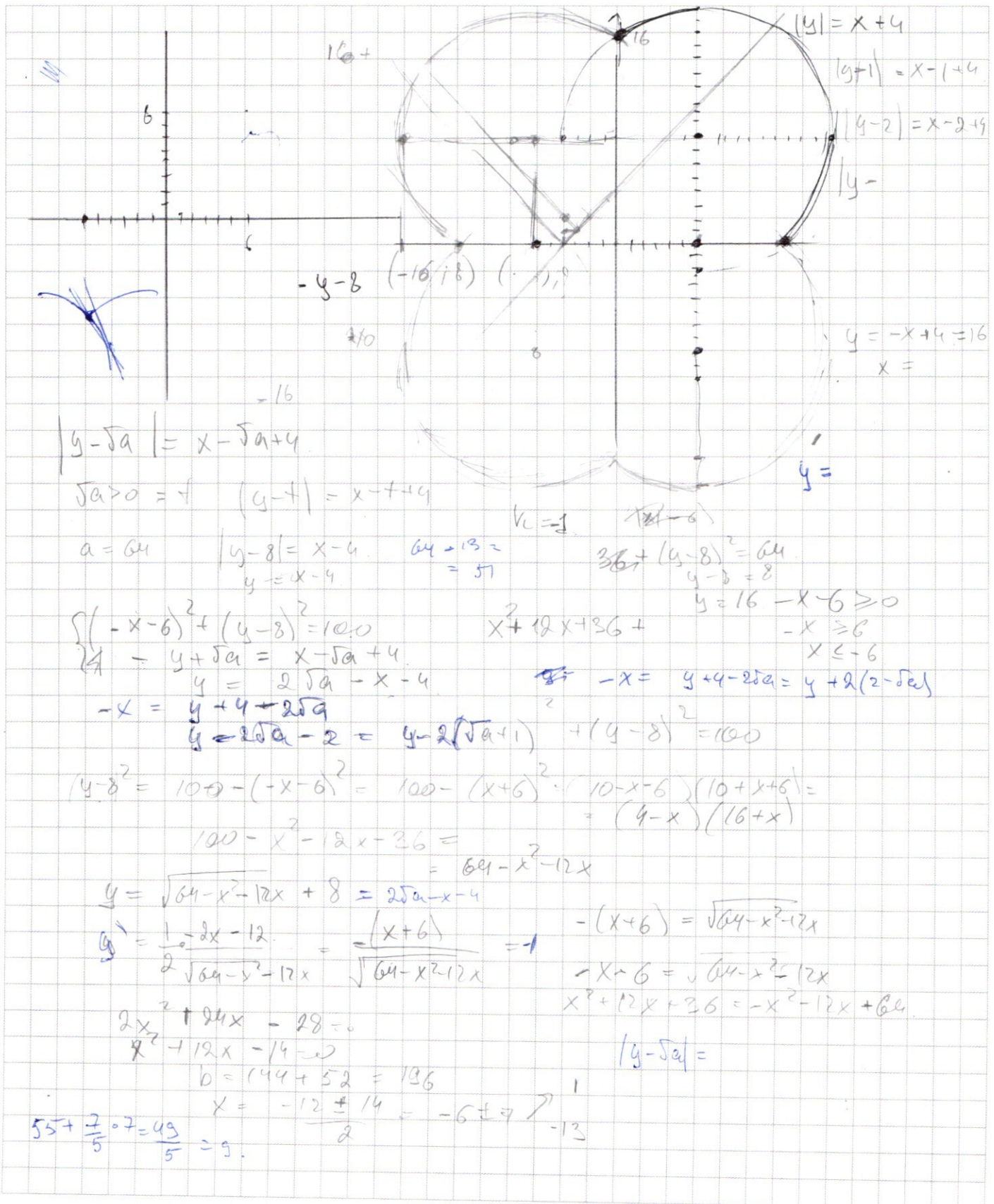
$$80 - 3 = 77$$

$$-77 \dots 534 + x + \log_7 x \leq 0$$

$$70000 \dots 0$$

$$x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|4-5a| = x-5a+4.$$

~~16-5a~~

$$\begin{cases} 16-5a = 4-5a \\ 16-5a = 4-5a \\ 16-5a = 5a-4 \end{cases} \cdot \emptyset$$

$$\begin{aligned} 25a &= 20 \\ 5a &= 10 \\ a &= 1000 \end{aligned}$$

$$p+1 \neq \overline{p} = 2p+1$$

$$3x - \frac{17}{4} = \frac{17}{2} + 17k$$

$$\leq 28 > 42.$$

$$3x = \frac{317}{2} + 17k$$

$$x =$$

$$\begin{aligned} 42 &\rightarrow 20 \\ 28 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 &\rightarrow 0 \\ 42 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{35}{70} - \frac{42}{70} &= \frac{7}{70} = \frac{1}{10} \\ \frac{35}{70} - \frac{28}{70} &= \frac{7}{70} \end{aligned}$$

$$3x - \frac{17}{4} = \frac{17}{2} + 17k$$

$$\frac{17}{4} + \frac{17}{4} =$$

$$\frac{317}{4} + \frac{17}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{5} \begin{cases} x = |y-5a| + 5a - 4 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = 100 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$$

окр. с центром $(6, 8)$
и радиусом 10

$$\begin{aligned} |y-5a| &= x - 5a + 4 \\ y-5a &= x - 5a + 4 \\ y &= x + 4 \end{aligned}$$

прямая $y = x + 4$
симметричная по Ox на $5a-4$
и по Oy на $5a$.

$$5a \geq 0$$

$$|y-5a| = x - 5a + 4$$

каска, симм. на $5a-4$
по Ox и на $5a$ по Oy ,
траекторий движения на графике
которой находится на прямой $y = x + 4$, $y \geq 0$.

В решении возможны при $|y-5a| = x - 5a + 4$ прохождения
через $y=16$ и $x=0$

$$\begin{aligned} |16-5a| &= 4-5a \rightarrow 16-5a = 4-5a \quad \text{или} \quad 16-5a = 5a-4 \\ 20 &= 10a \\ a &= 2 \end{aligned}$$

и до т. касания прямой с каскало окр-ти в 4 четверти:

$$(y-8)^2 = 100 - (-x-6)^2 = 100 - x^2 - 12x - 36 = 64 - x^2 - 12x$$

$$y = \sqrt{64 - x^2 - 12x} + 8, \quad y' = \frac{-(x+6)}{\sqrt{64 - x^2 - 12x}} = -1, \quad -1 = f'(x), \text{ где } f(x) = -x - 5a + 4$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2x^2 + 12x - 28 &= 0 \\ x^2 + 6x - 14 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 196 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -13 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{64 - x^2 - 12x} + 8 = \sqrt{51} + 8$$

$$\begin{aligned} |\sqrt{51} + 8 - 5a| &= 1 - 5a + 4 \\ \sqrt{51} + 8 - 5a &= 5a - 5 \\ 25a &= 13 + \sqrt{51} \\ 5a &= \frac{13 + \sqrt{51}}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(163 + 26\sqrt{51} + 15)}{4} = \frac{110 + 13\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{110 + 13\sqrt{51}}{2}, 100 \right)$$

$$8) BD = 3 \sqrt{18/5}$$

$$BD^2 = DM^2 + BM^2; BM^2 = BD^2 - DM^2 \quad (\text{по т. Пифагора})$$

$$R_2 = \frac{5 \cdot 3}{3} \sqrt{18/5} = 5 \sqrt{18/5} \Rightarrow BM^2 = 9 - (R_2 + OM)^2 = 9 - (6 \sqrt{18/5})^2 = 9 - 36 \cdot 18/5$$

$$BM^2 = R_2^2 - OM^2 = 25 \cdot 18/5 - 18/5 = 24 \cdot 18/5$$

$$\Rightarrow 9 - 36 \cdot 18/5 = 24 \cdot 18/5, OM = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{т.к. } R_2 = 5OM \Rightarrow R_2 = \frac{5 \cdot 3}{2\sqrt{5}} = \frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$R_1 = \frac{3}{5} R_2 = \frac{3\sqrt{15}}{10}$$

Ответ: а) $5:3$

$$б) R_1 = \frac{3\sqrt{15}}{10}, R_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$① p \in \left(\frac{42}{70}; 1\right] \Rightarrow p \in (0,6; 1]$$

$$q \in [0; 28] \Rightarrow q \in [0; 0,4]$$

т.к. ~~q — это вероятность выпадения орла, то она равняется вероятности не выпадения решки и равняется 1-p.~~

~~Значения p и q не вероятности и являются взаимноисключающими событиями $\Rightarrow$ нужно взять значение~~

$$\text{Вероятность выпадения орла} = \frac{1}{2} = \frac{35}{70}. \text{ Вероятность выпадения его 42 из 70 раз} = \frac{35}{70} - \frac{42}{70} = 0,1$$

$$\text{Аналогично вероятность выпадения его 28 из 70 и меньше} = \frac{35}{70} - \frac{28}{70} = 0,1.$$

$$\Rightarrow p - q = 0,1 - 0,1 = 0$$

Ответ: 0

$$⑦ \begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80} \\ y \leq \log_7 x, y \geq -\log_7 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80 + x - 7^{80} + \log_7 x \leq 0 \end{cases}$$

Представим числа в $7^{\text{й}}$ системе счисления: $80_{10} = 143_7$

$$7^{80} = \underbrace{100 \dots 0}_{80}; \log_7 x = \frac{100 \dots 0}{\log_7 x}$$

$$80 = 7^{80} = 143_7 - \underbrace{100 \dots 0}_{80} = -\frac{666 \dots 6524}{77}$$

Всплывающая задача на 4й странице.