

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p - q$

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 18$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 5$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$d). \triangle BDE - \text{треугольн.} \Rightarrow \frac{BD}{\sin \angle DEB} = 2R_2$$

$$\angle DEB = \frac{\angle DO_2B}{2}, \text{ т.к. } e_1 \parallel e_2, e_1 \text{ кас. } e_2 \text{ пер.} \Rightarrow \angle DO_2B = \angle DO_2E = \frac{360^\circ - 2}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}$$

$$\angle DEB = 90^\circ - \frac{\alpha}{4} \Rightarrow \frac{BD}{\sin \angle DEB} = \frac{BD}{\sin 90^\circ - \frac{\alpha}{4}} = \frac{BD}{\cos \frac{\alpha}{4}} = 2R_2$$

$$R_2 = \frac{BD}{2 \cos \frac{\alpha}{4}} \quad ; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4} - 1 \quad \cos^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{4} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$R_2 = \frac{5}{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{45}}{2}; \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5} \Rightarrow R_1 = \frac{R_2 \cdot 5}{9} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$R_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad R_1 = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Antwort: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5}$; $R_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $R_1 = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

WS

$$\begin{cases} x = -(y - \sqrt{a}) + 6 - \sqrt{a} \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

з решения

Складок функций $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 289$

это график окр. $(x-8)^2 + (y-15)^2 = 14^2$

парикованкой в 1-й четверти

и отраженной от Ox и Oy ,

$$f(x, y) = (x-8)^2 + (y-15)^2$$

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y)$$

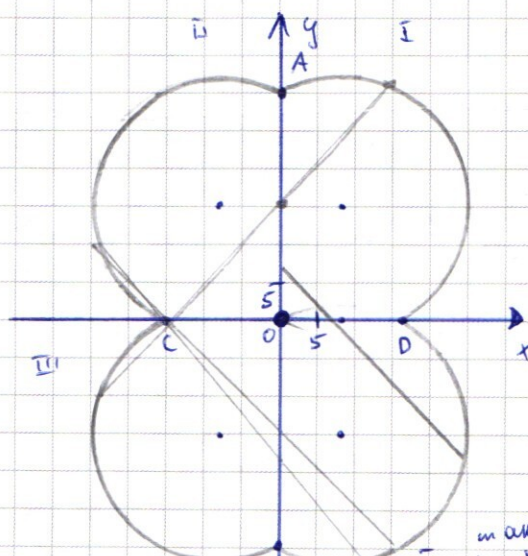
$$X = -|y - \sqrt{a}| + b - \sqrt{a}$$

Вершина лежит
на прямой

$$x = 6 - 4$$

$$y = 6x$$

при $x > 0$



также $y = -9$

$$y = x + a$$
[illegible]

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{ccc} 123 & & \\ \hline y^1-1 & y^2-3 & y^2-4+2 \\ & y^n-y^{n-1}+1 & \end{array}$$

$$(y^n-y^{n-1}+1) \cdot n-2$$

$$12 \quad 34 \quad 56 \quad 78 \quad 910 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15$$

15 16

$$y^2-2-(y-1)$$

$$3(y^{n-1} \cdot n-1)$$

$$\nearrow y \cdot 2$$

$$y^{62}+y^{68}+y^{69} \quad 0 + y \cdot 1 + y^2 \cdot 2 + y^3 \cdot 3 + \dots + y^{69} \cdot 69$$

$$3 \cdot$$

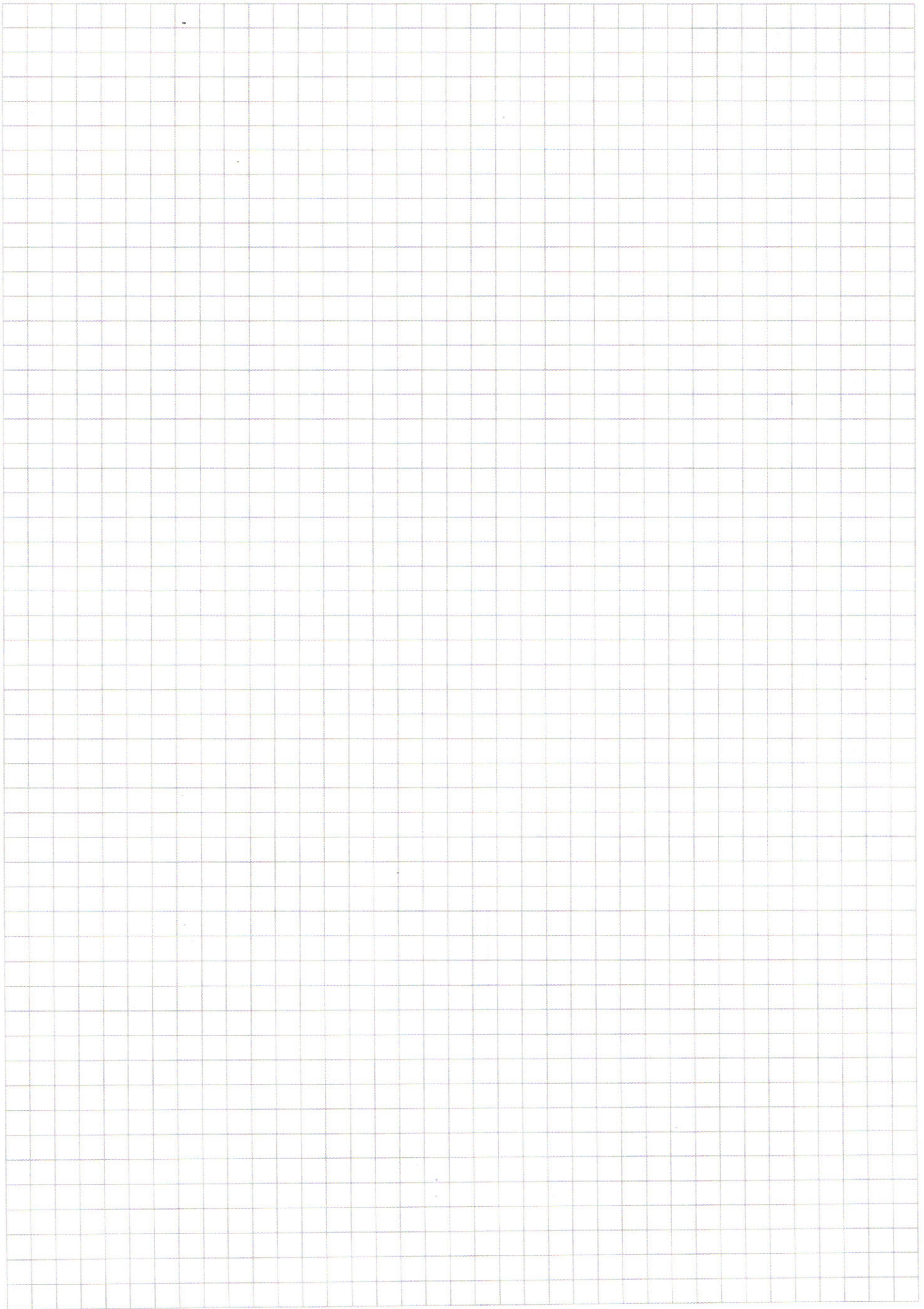
$$+y + 5y^2$$

$$40(y+69 \cdot y^2)$$

$$y+2 \cdot y^2+3 \cdot y^3+y \cdot y^4+5 \cdot y^5$$

$$\begin{array}{l} y + y + y^2 \\ y + y^2 \\ y + y^2 + y^3 \\ y + y^2 + y^3 + y^4 \\ y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 \\ y + y^2 + y^3 \end{array}$$

$$na^n$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 1.

Вероятность того, что выпадет Орел ≤ 29 раз
равна вероятности того, что Греша выпадет ≥ 51 раз
(т.к. всего монет 80), а эта вероятность равна той,
при которой Орел выпадет ≥ 51 раз (одинаковая
вероятность выпадения). Вероятность равна
 $\frac{a}{b}$, где a - кол-во случаев исходов, b - кол-во всех исходов.
Значит $b = 2^{80}$. Значит, нам нужно найти разность
случаев, когда Орлов > 51 и когда ≥ 51 , эта разность
равна $-N$ где N - кол-во случаев, когда Орлов
ровно 51, а N равен $80 - 51 = 29$, а кол-во таких
случаев равно $C_{80}^{29} = C_{80}^{51} \Rightarrow$ вероятность равна
 $\frac{-N}{2^{80}} = \frac{-C_{80}^{29}}{2^{80}}$

Ответ: $-\frac{C_{80}^{29}}{2^{80}}$

✓ 2.

$$\frac{\cos 9x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = \frac{\cos 5x \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x}$$

$$= \frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\frac{\cos 9x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 9x}{\sqrt{2}} = -\cos 10x$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - 10x)$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 10x) = 0$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{46} + \frac{2\pi k}{19}$

$$2 \sin \frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2} \cos \frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8} = 0$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2} = \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{4} - \pi k$$

$$\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{46} + \frac{2\pi k}{19}$$

$$\cos 10x \neq 0$$

$$10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} - \pi k$$

$$\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{\log_2 x + 3} + 21 \cdot \sqrt{\log_2 x^2} \leq 18 \quad \boxed{x > 1} \quad \boxed{OD3:}$$

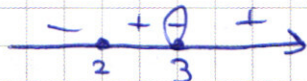
$$(2\sqrt{\log_2 x})^3 - 8 \cdot (2\sqrt{\log_2 x})^2 + 21 \cdot x \sqrt{\log_2 x^2} \leq 18$$

$$x \sqrt{\log_2 x^2} = x \log_2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} = 2 \sqrt{\frac{1}{\log_2 x}} = 2 \sqrt{\log_2 x} = t$$

$$t^3 - 8t^2 + 21t \leq 18$$

$$t^3 - 8t^2 + 21t - 18 \leq 0$$

$$(t-2)(t-3)^2 \leq 0$$



$$t=3; t \leq 2$$

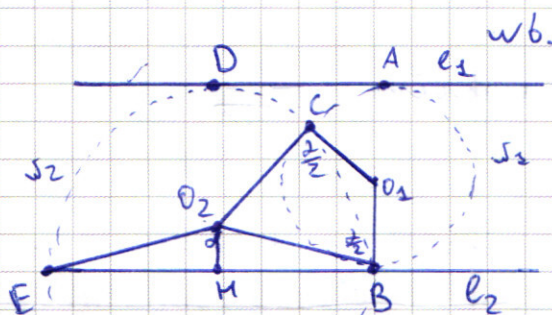
$$2\sqrt{\log_2 x} = 3 \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 3^2$$

$$2\sqrt{\log_2 x} \leq 2, \text{ no m.k.}$$

$$x = 3^{\log_2 3}$$

$$2^a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2\sqrt{\log_2 x} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2, \text{ no } x=1 \Rightarrow$$

$$\text{Answer: } x \in (1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}$$



$$a) \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = 5$$

$$\frac{R_2}{R_1} = ?$$

$$b) BD=5, R_1=?, R_2=?$$

$$a) \text{ Пусть } \angle EO_2B = \alpha \Rightarrow \angle O_2BE = 90 - \frac{\alpha}{2}, \text{ m.k. } EO_2 = O_2B$$

$$O_1B \perp l_2 \Rightarrow \angle O_1BO_2 = 90 - \angle O_2BE = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta O_1CO_2 = \Delta O_2BO_1 \text{ по 3-м сторонам } \Rightarrow \angle O_2CO_1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$S_{BO_1CO_2} = S_{O_1CO_2} + S_{O_1BO_2} = \frac{R_1 R_2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{R_1 R_2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} = R_1 R_2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$S_{O_2BE} = \frac{R_2^2 \sin \alpha}{2} \Rightarrow \frac{R_1 R_2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{R_2^2 \sin \alpha}{2}} = \frac{R_1}{R_2 \cos \frac{\alpha}{2}} = 5$$

$$\text{Опустим высоту из } O_2 \text{ на } EB \Rightarrow O_2H = R_2 \cdot \sin 90 - \frac{\alpha}{2} = R_2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Аналогично } (A, O_1, B) \Rightarrow DO_2 + O_2H = AO_1 + O_1B$$

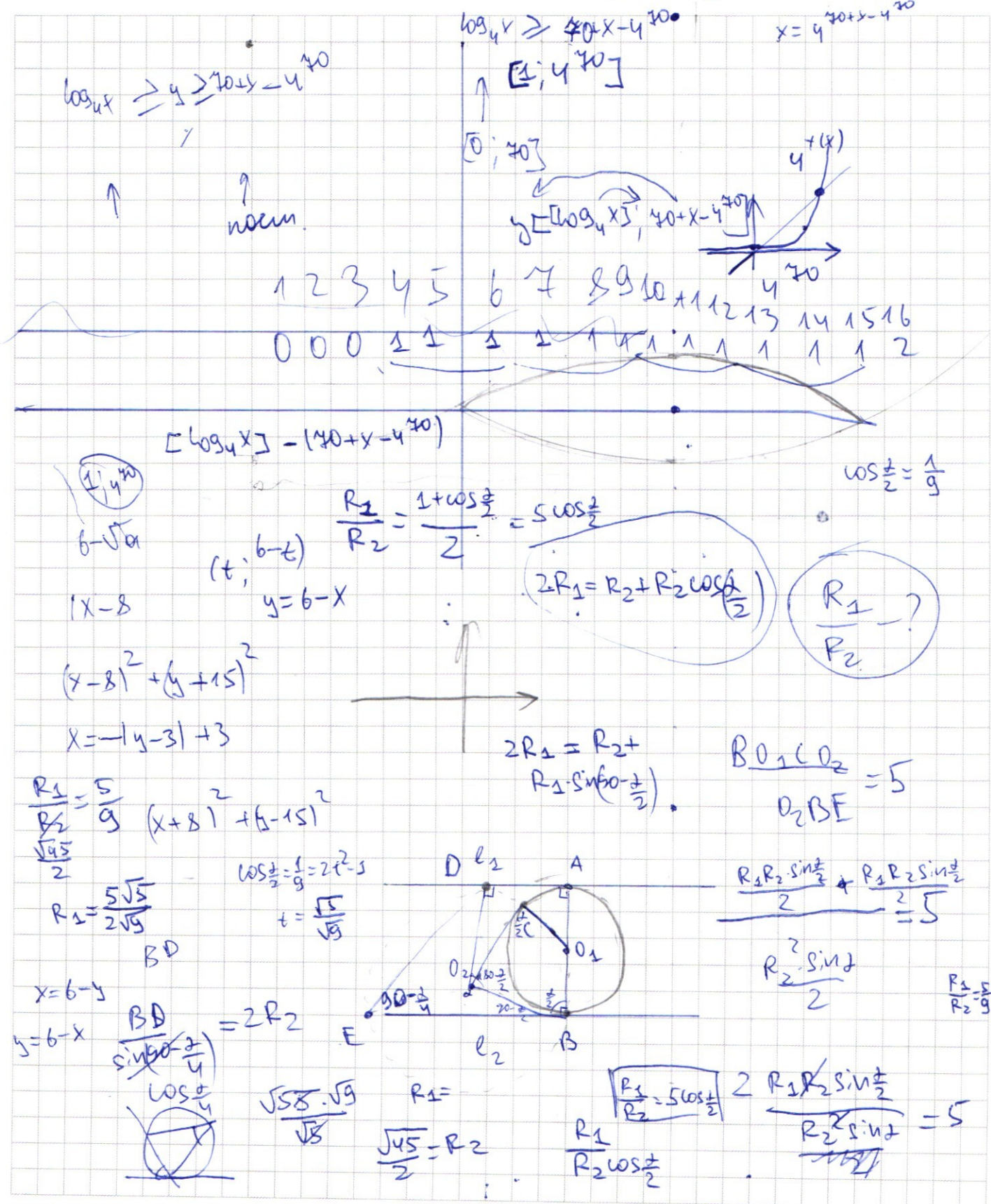
$$R_2 + R_2 \cos \frac{\alpha}{2} = 2R_1$$

$$\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{2} = 5 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{9}{5}$$

$$\begin{cases} \frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{2} \\ \frac{R_1}{R_2} = 5 \cos \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$40 + x - 4^{40} \leq 40$$

$\log_4 x$

$$\log_y x \geq 20 + x - 4 \cdot 20$$

-2, 18

$$x \geq \frac{40 + x - 40}{4}$$

$y >$

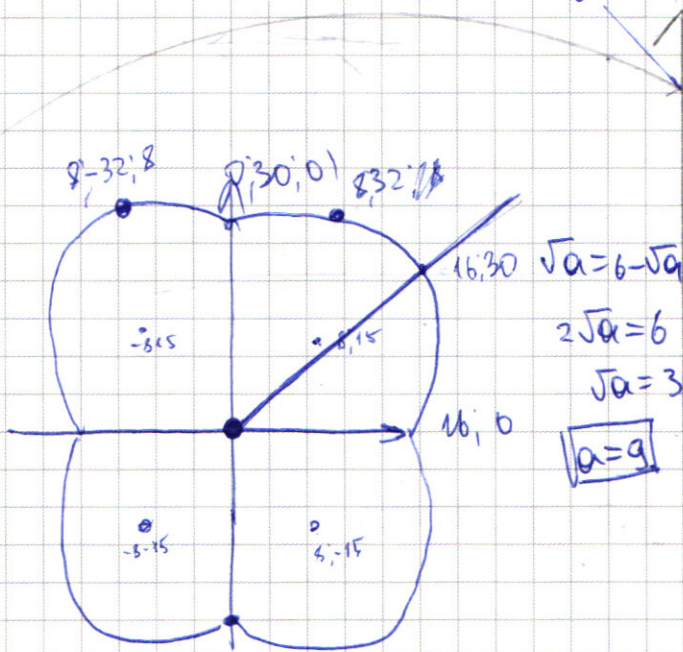
$$x = -|y - t| + b - t$$

$1 \geq \frac{1}{2}$

$$1 \geq \ln y - y$$

$$\frac{1}{\log_2 4} = \log_4 e \geq 4^{20+x-4}$$

$$20 + x - 4 \log_4(\log_4 e)$$



$$x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}$$

$$-iy - 1 + 5$$

$$501 \geq 6$$

$t = 1,5$

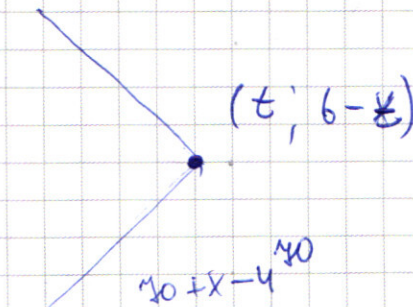
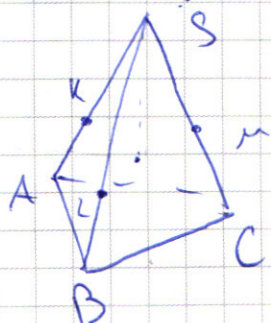
$$\cos 98^\circ - \frac{1}{4} = -\cos 40^\circ$$

$$\cos \frac{19\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$u_s(t) = a_k \cos \frac{\sqrt{15}}{4} (t; b-t)$$

$$t \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 2$$



$$\underline{5\pi} + \pi n - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \sigma T u$$

$$\frac{3\pi \times 10^7}{4} = \frac{1507}{20} = \frac{7}{20} + \frac{4\pi}{10} + \pi K$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x + \sin 9x$

$$\frac{\cancel{\cos 5x} \cos 4x + \cancel{\sin 5x} \cos 4x + \cancel{\sin 4x} \cos 5x - \cancel{\sin 4x} \sin 5x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$\cos 5x \neq \sin 5x$
 $\cos 5x \neq -\sin 5x$
 $\cos 10x \neq 0$

$$\frac{\sin 9x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos 9x}{\sqrt{2}} = -1$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos(10x)$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right)$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) = 0$$

$$\sin\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2} \cos\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8} = 0$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2} = \pi k$$

$$\frac{3\pi}{4} - x = 2\pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi k$$

$$10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{20}$$

$$\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$19x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{146} + \frac{2\pi k}{19}$$

$x^2 - 16x + y^2 - 30y = 0$
 $y \geq \sqrt{a} \quad y \leq \sqrt{a}$
 $x = -y + \sqrt{a} + 6\sqrt{a}$
 $x = y + 6 - 2\sqrt{a}$

$x = 6 - y$
 $x = y - \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a}$
 $x = y + 6 - 2\sqrt{a}$

$x^2 - 16x + y^2 - 30y = 0$
 $y \geq \sqrt{a} \quad y \leq \sqrt{a}$
 $x = -y + \sqrt{a} + 6\sqrt{a}$
 $x = y + 6 - 2\sqrt{a}$

$x^2 - 16x + y^2 - 30y = 0$
 $y \geq \sqrt{a} \quad y \leq \sqrt{a}$
 $x = -y + \sqrt{a} + 6\sqrt{a}$
 $x = y + 6 - 2\sqrt{a}$

80% -

$P \leftarrow$
 ≥ 52

≥ 80

$9 \leq 29$
 $x > 0$

$8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x} + 3 + 21x\sqrt{\log_2 x} \leq 18$

$x^t = x^{\sqrt{\log_2 x^2}}$

$(x^t)^t = x^{\log_2 x^2} = 2$

$x^t = \sqrt[2]{2}$

$x^t = 2^{\frac{1}{t}}$

$\sqrt{\log_2 x^2} \cdot x^{\sqrt{\log_2 x^2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 x^2}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$

$(2^3)^{\log_2 x}$

$x >$

$(2^{\sqrt{\log_2 x}})^3 - 8 \cdot 4^{\sqrt{\log_2 x}} + 21 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}}$

$t^3 - 8t^2 + 21t - 18 \leq 0$

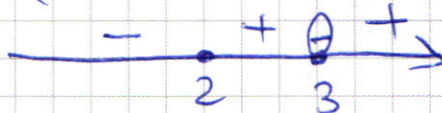
$8 \quad 32 \quad 42$

$t^3 - 2t^2 - 6t^2 + 12t + 9t - 18$

$(t^3 - 6t + 9) / (t-2) \quad (t-2)(t^2 - 6t + 9) \leq 0$

$t^3 - 2t^2 - 6t^2 + 12t + 9t - 18$

$(t-2)(t-3)^2 \leq 0$



$2 \leq x \leq 3$

$0 \leq \sqrt{\log_2 x} \leq 2$

$t =$

$\sqrt{\log_2 x} = 3$
 $x = 3^{\sqrt{\log_2 x}}$

$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 3$
 $\log_2 x = \log_2^2 3$
 $x = 3^{\log_2^2 3}$

