

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p - q$
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x\sqrt{\log_2 x} \leq 18$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 5$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16r^2 + 20r^2 = 25 \cdot 5$$

$$36r^2 = 25 \cdot 5$$

$$r = \sqrt{\frac{25 \cdot 5}{36}} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

$$R = \frac{9}{5} r = \frac{9}{5} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{6} = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

$$\text{Ответ: } r = \frac{5\sqrt{5}}{6}; R = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

$$y \geq 70 + x - 4^{70}$$

$$y \leq \log_4 x$$

100

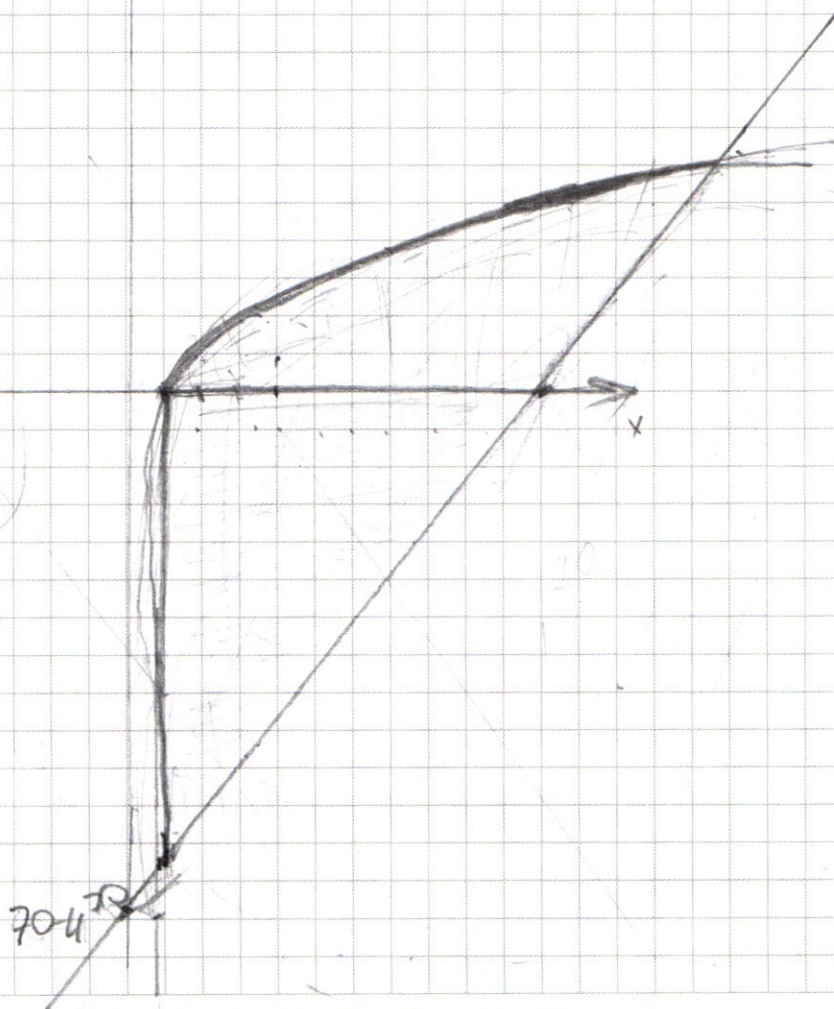
20 - 4/70

$$70 + x - 4^{70} = \log_4 x$$

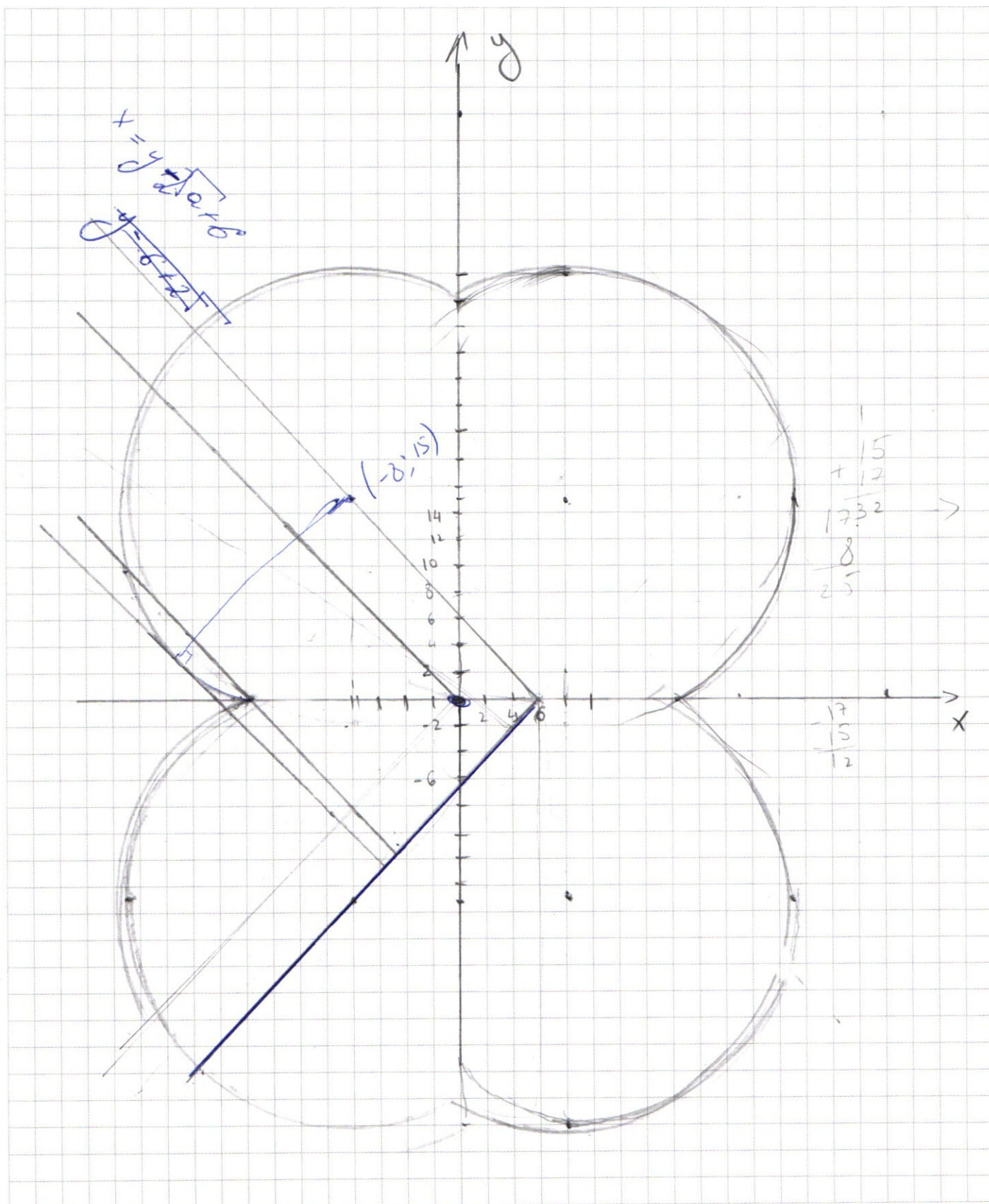
$$70 + x - 4^{70} = 4^m$$

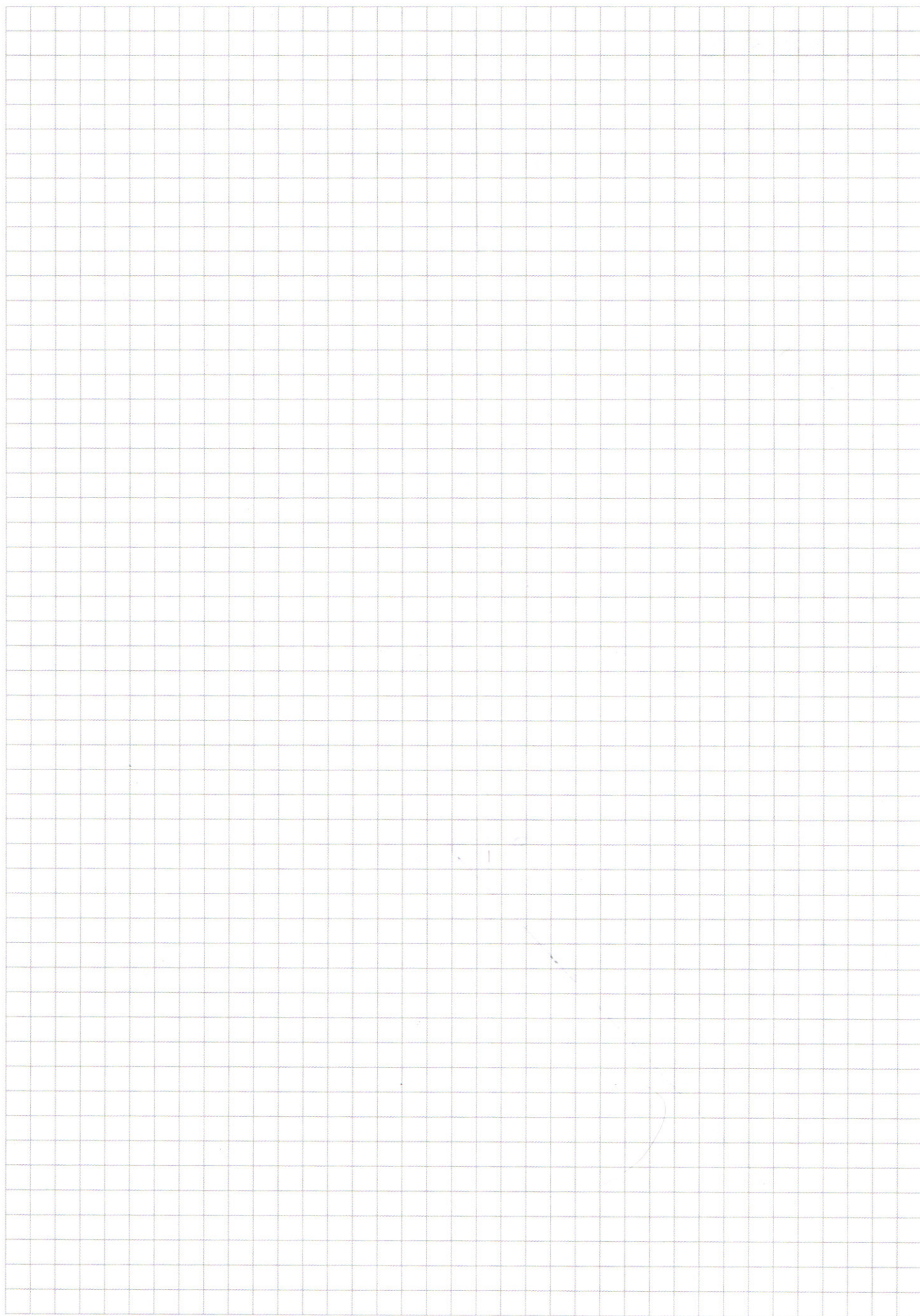
$$x = 4^m + 4^{70} - 70$$

$$x \geq 70 - 4^{70} = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_2 x - 1 \leq 1$$

$$x \leq 2 \text{ с учетом ОДЗ } x \in (1; 2]$$

Ответ: $(1; 2]$

№ 5

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a} & \text{— при } y \geq \sqrt{a} \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 17^2 & \text{— ох-та} \end{cases}$$

1) $y \geq \sqrt{a}$

$$x = -y + \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a}$$

$$y = -x + 6$$

2) $y < \sqrt{a}$

$$x = y - \sqrt{a} + 6 - \sqrt{a}$$

$$y = x - 6 + 2\sqrt{a}$$

$$x = y - 2\sqrt{a} + 6$$

$$(x - 8)^2 + 15^2 = 289$$

$$(|x| - 8)^2 = 17^2 - 15^2$$

$$-x - 8 = 8$$

$$|x| - 8 = 8 \quad 2 \cdot 32$$

$$x - 8 = 8 \quad x = 16$$

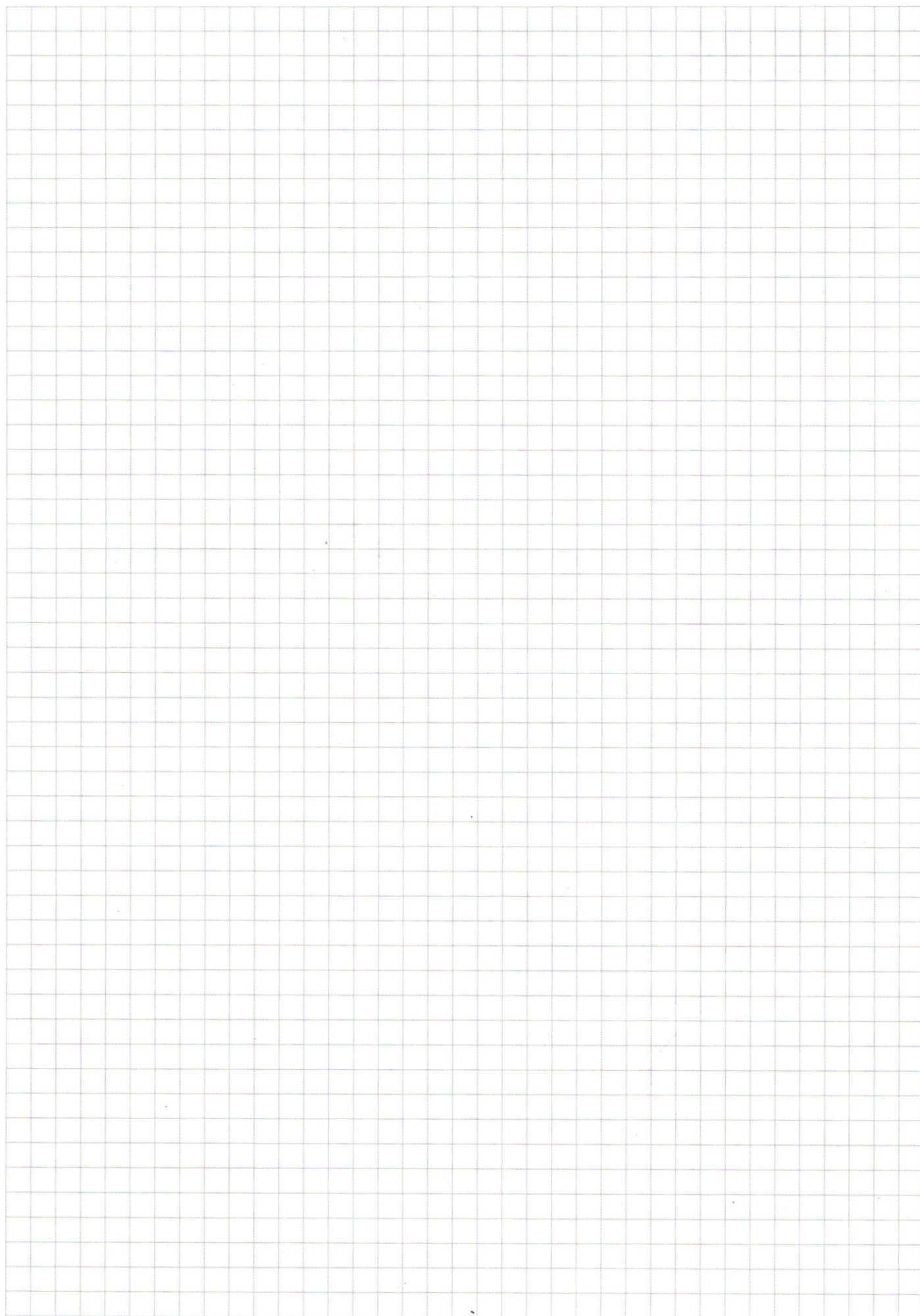
$$y = x = 0$$

$$8^2 + (|y| - 15)^2 = 289$$

$$(|y| - 15)^2 = (17 - 8)(17 + 8) = 25 \cdot 9$$

$$|y| - 15 = 15$$

$$|y| = 30$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 1 крит. положение.

$x = y - 2\sqrt{a} + 6$ проходит чрез т. $(-16; 0)$

$$-16 = 0 - 2\sqrt{a} + 6$$

$$2\sqrt{a} = 22$$

$$\sqrt{a} = 11$$

$$a = 121$$

2) 2 крит. положение: $x = y - 2\sqrt{a} + 6$ кас-ся

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = 17$$

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 17 = \frac{|-8 + 15 + 6 - 2\sqrt{a}|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 17\sqrt{2} = |13 - 2\sqrt{a}|$$

$$13 - 2\sqrt{a} = 17\sqrt{2}$$

$$13 - 2\sqrt{a} = -17\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{a} = 13 - 17\sqrt{2} \quad \phi$$

$$2\sqrt{a} = 13 + 17\sqrt{2} \Rightarrow 4a = 169 + 17 \cdot 13\sqrt{2} + 4 \cdot 17^2$$

$$4a = 169 + 289 \cdot 2 + 17 \cdot 13\sqrt{2}$$

$$a = \frac{747}{4} + 221\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 289 \\ \hline 169 \\ + 578 \\ \hline 747 \end{array}$$

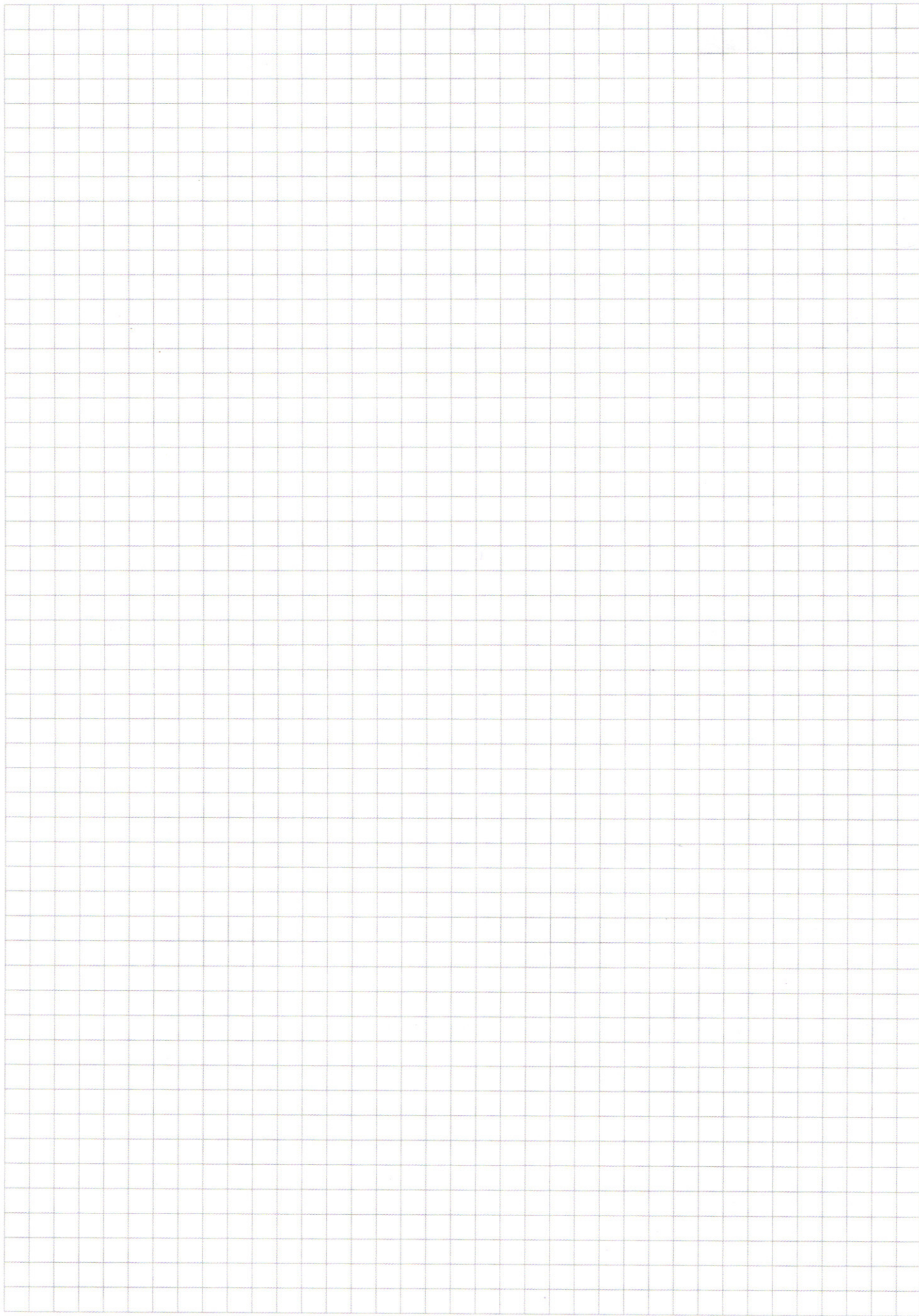
3) $x = y - 2\sqrt{a} + 6$ проходит чрез т. $(0; 0)$

$$0 = 0 - 2\sqrt{a} + 6$$

$$2\sqrt{a} = 6$$

$$\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 13 \\ \hline 51 \\ + 17 \\ \hline 221 \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



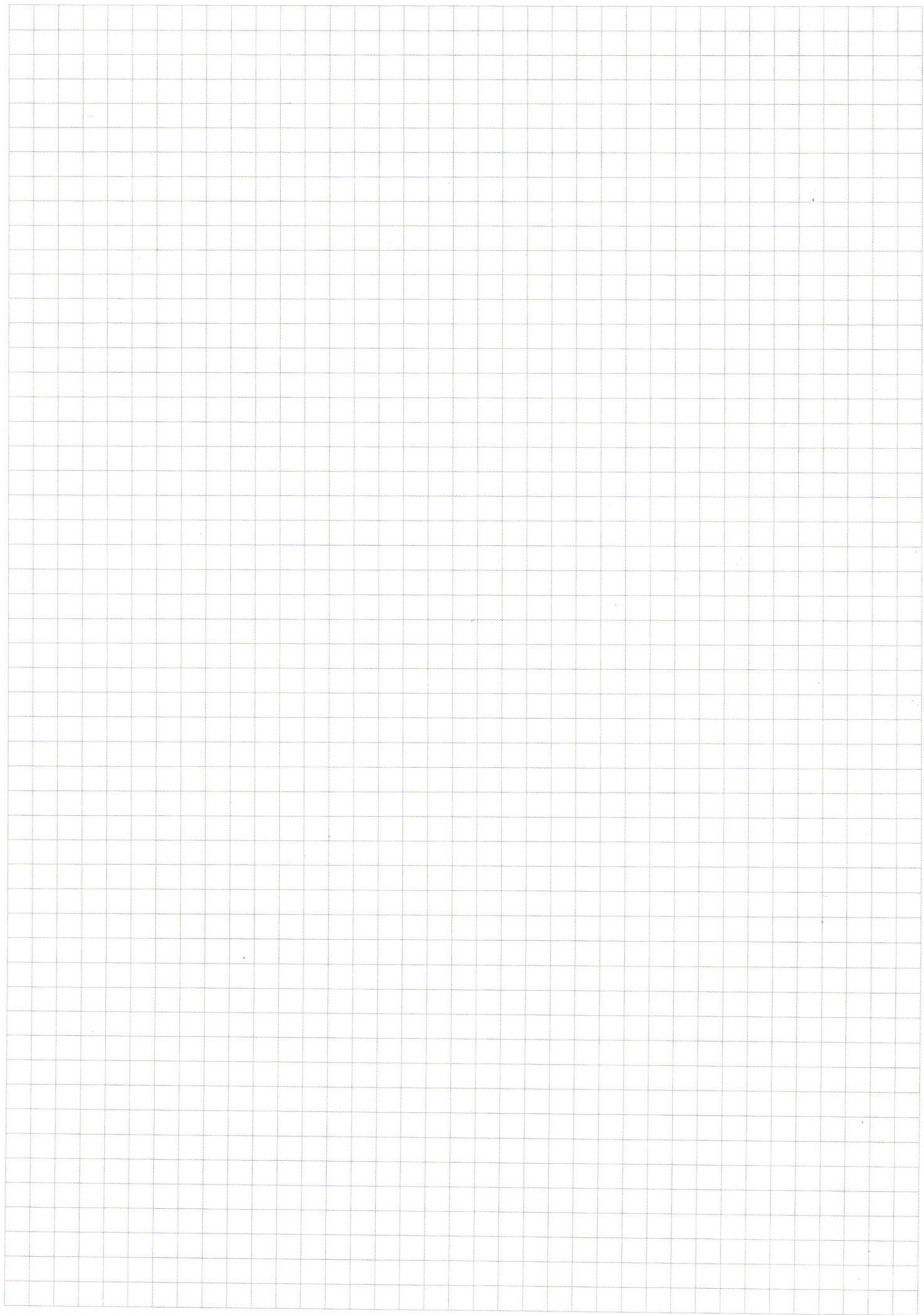
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 60 раз

p - орел выпадет
 q - орел выпадет

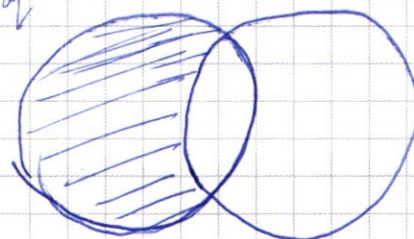
а Солнце 51 раз
не Солнце 29 раз.

$$p - q = 1 - \bar{p} - 1 + \bar{q} = \bar{q} - \bar{p} ; \text{выпадает}$$

$$\bar{q} + \bar{p} - 1 = 0 \text{ от } [29; 51]$$

$$P = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

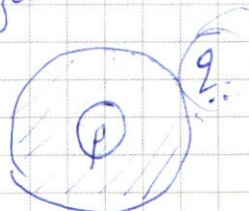
ААА



$$\bar{q} + p = 1 \Rightarrow \bar{q} \quad (29; 50]$$

Солнце 29 раз
Солнце 51 раз

51; +∞)



Солнце 29 раз

$$|BD| = R \cdot \cos \alpha$$

$$(R \cdot \cos \alpha)^2 + 4r^2 = 25$$

$$R = r \cdot \frac{5}{3}$$

$$r^2 \cdot \frac{81}{5} \cdot \frac{16}{81} + 4r^2 = 25$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 5x \cdot \cos 4x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x$$

$$\cos(4x+5x) + \sin(4x+5x) = -\sqrt{2} \cdot (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \left(\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = -\sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 10x$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} + 10x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{19x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$19x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{3\pi}{4} +$$

$$x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k$$

$$19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 10x$$

$$\cos 5x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k$$

$$x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x} + 3 + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} \leq 18$$

$$x^{\sqrt{\log_2 2} \cdot \sqrt{\log_2 2}} = x^{\log_2 2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_2 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \log_2 x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(x^{\log_2 2})^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 2}}} = x^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 2}}}$$

$$2^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 2}}}$$

$$2^{\frac{1}{2\sqrt{\log_2 x}}}$$

$$2^3 \sqrt{\log_2 x} - 8 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} + 21 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 18 \leq 0$$

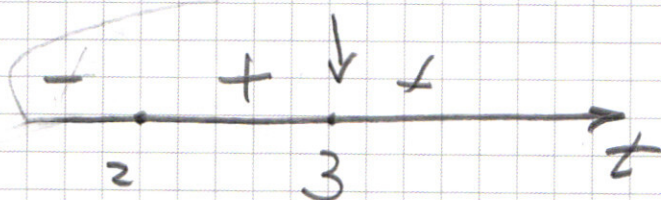
$$t, t \geq 0$$

$$t^3 - 8t^2 + 21t - 18 \leq 0$$

$$(t-3)(t^2 - 5t + 6) \leq 0$$

	1	-8	21	-18
3	1	-5	6	0

$$(t-3)(t-2)(t-3) \leq 0$$



$$t \in (0; 2]$$

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t > 0 \end{cases} \begin{cases} 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 2 \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} \geq 0 \end{cases}$$

$$\log_2 x = \log_2^2 3$$

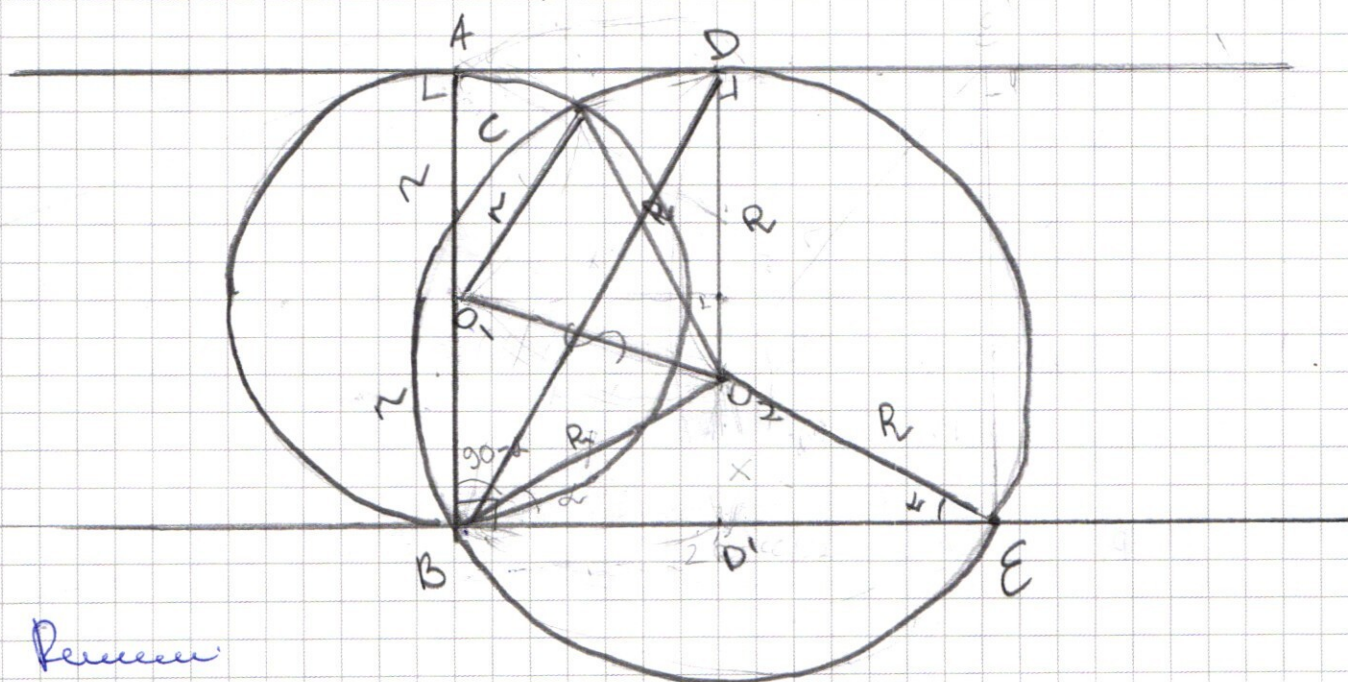
$$x = 2^{\log_2^2 3} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_2 3} = (2^{\log_2 3})^{\log_2 3} = 3^{\log_2 3}$$

$$x = 9$$

$$\sqrt{\log_2 x} \leq 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



Reuben

1/ R₃ 1011

$$R_{w_2} \leq R$$

$$\Delta BO_1O_2 = \Delta O_1CO_2 \text{ (по трем сторонам)}$$

$$(BO_2 = O_2C = R; BO_1 = \overset{\cdot}{O}, C = \overset{\cdot}{R}) \quad O_1O_2 - \text{Synd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{BO}_2\text{O}_2} = S_{\Delta\text{O}_1\text{CO}_2} = \frac{1}{2} S_{\text{BO}_1\text{CO}_2} = 2,5 S_{\text{BO}_2\text{E}}$$

$$2) \angle O_2 B E = \alpha; \Rightarrow \angle O_2 B O_1 = 90 - \alpha$$

$$S_{B O_2 E} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin(180 - 2\alpha)$$

$$S_{BO, O_2} = \frac{1}{2} R \cdot r \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\cancel{2r} \cdot \frac{1}{2} R \cdot r \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot 2 R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \text{ т.к. } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{5 \sin \alpha} (*)$$

2) Рассмотрим $\triangle BOD$ (прям. мпн.) $\Rightarrow$
 $(R \cdot \cos \alpha)^2 + (R - r)^2 = R^2, R^2 - 2r \cdot R \cdot \sin \alpha$

$$R(1 + \sin \alpha) = 2r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{2}{1 + \sin \alpha} \text{ — подставим в } (*)$$

3) $10 \sin \alpha = 1 + \sin \alpha$

$$9 \sin \alpha = 1 \rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{9} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{9}{5}$$

5) $\triangle BAD$:

$$\text{т.к. } AD = BD = R \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (R \cdot \cos \alpha)^2 + 4r^2 = 25 \\ R = r \cdot \frac{9}{5} \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \frac{81}{25} + \frac{16}{81} \cdot 5 + 4r^2 = 25$$

$$16r^2 + 20r^2 = 25 \cdot 5$$

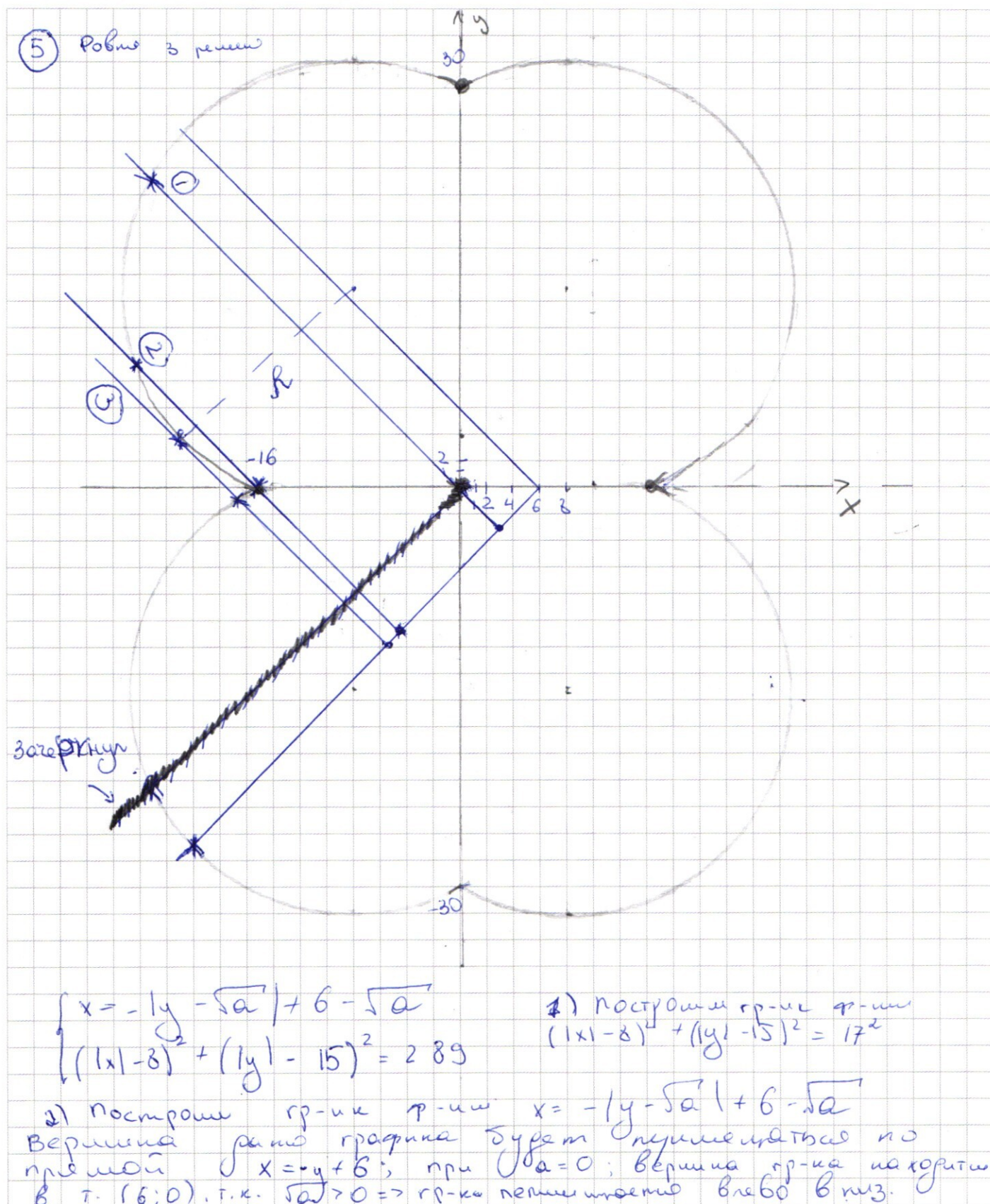
$$36r^2 = 25 \cdot 5$$

$$r = \sqrt{\frac{25 \cdot 5}{36}} = \frac{5}{6} \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

Ответ: а) $\frac{9}{5}$; б) $r = \frac{5}{6} \sqrt{5}$; $R = \frac{3}{2} \sqrt{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) Если когда ~~прямая~~ $x = y - 2\sqrt{a} + 6$ проходит через $г. (0; 0)$ $\Leftrightarrow$ система имеет три решения:

$$0 = 0 - 2\sqrt{a} + 6$$

$$2\sqrt{a} = 6$$

$$a = 9 - \text{удовн. условию}$$

2) когда $x = y - 2\sqrt{a} + 6$ проходит через $г. (-16; 0)$ $\rightarrow$ система имеет три решения.

$$-16 = 0 - 2\sqrt{a} + 6$$

$$22 = 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = 11$$

$$a = 121 - \text{удовн. условию.}$$

3) когда $x = y - 2\sqrt{a} + 6$ кас-ся $г.-ка$
 $(x+8)^2 + (y-15)^2 = 17^2$

Полнущее уравнение функции

$$R = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 17$$

$$\frac{-8 + 15 + 6 - 2\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{747}{4} + 22\sqrt{2} - \text{удовн. усн.}$$

Ответ: 9; 121; $\frac{747}{4} + 22\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) \frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

ОДЗ:
 $\cos 5x \neq \sin 5x$
 $\cos 5x \neq -\sin 5x$

$$\cos 5x \cdot \cos 4x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \cos 5x \cdot \sin 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x = -\sqrt{2}$$

$$\cos(5x + 4x) + \sin(5x + 4x) = -\sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \left(\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} + 10x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{19x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(-\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{19x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

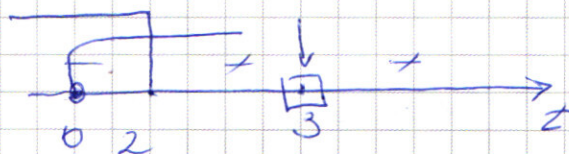
$$\begin{cases} \frac{19x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 19x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{5\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19} \right\}; \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right\}, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{4 \log_2 x + 3}} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 18 \\
 & 8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{2\sqrt{\log_2 x} + 3} + 21 \cdot x^{\frac{\sqrt{\log_2 x} \cdot \sqrt{\log_2 x}}{\sqrt{\log_2 x}}} \leq 18 \\
 & 8^{\sqrt{\log_2 x}} - 8 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 21 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}} - 18 \leq 0 \\
 & 2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 8 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 21 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 18 \leq 0 \\
 & 2^{\sqrt{\log_2 x}} \stackrel{t}{=} t, \quad t > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & t^3 - 8 \cdot t^2 + 21t - 18 \leq 0 \\
 & (t-5)^2 (t-2) \leq 0
 \end{aligned}$$



$$t \in (0; 2] \cup \{3\}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} t \leq 2 \\ t > 0 \\ t = 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 2 \\ \Leftrightarrow 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_2 x} = 1 \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\log_2 3} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x - 1 \leq 0 \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\log_2 3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x - 2 \leq 0 \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} x \leq 2 \\ \log_2 x = \log_2^2 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x = 2^{\log_2^2 3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x = 3^{\log_2 3} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \text{с учетом ОДЗ} \quad x \in (1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\} \\
 & \text{Ответ: } [1; 2] \cup \{3^{\log_2 3}\}
 \end{aligned}$$