

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рз  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть  $p$  – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а  $q$  – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите  $p - q$ .
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$ .
3. [5 баллов] Решите неравенство  $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$ .
4. [5 баллов] а) Сфера с центром  $O$  касается боковых рёбер  $SA, SB, SC$  пирамиды  $SABC$  в точках  $K, L, M$  соответственно, а также касается её основания  $ABC$ . Через точку сферы, ближайшую к точке  $S$ , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды  $SABC$  этой плоскостью равна 5,  $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$ . Найдите площадь треугольника  $KLM$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $SO = 36$ , а плоскости  $KLM$  и  $ABC$  параллельны. Найдите объём пирамиды  $SABC$ .
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

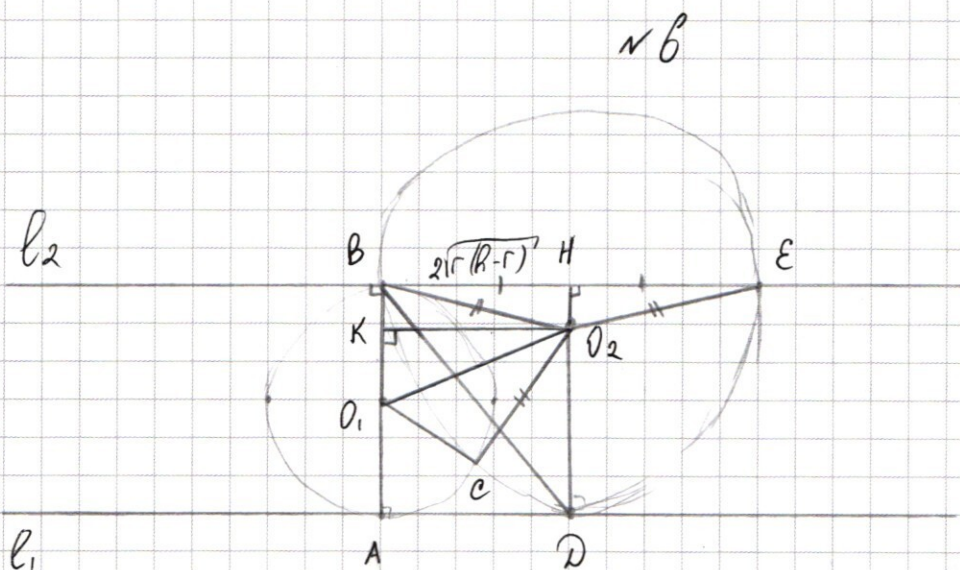
6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $\ell_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $\ell_2$  в точках  $B$  и  $E$ , а также вторично пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2BE$  равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .  
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что  $BD = 2$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$BO_1 = O_1B = r$$

$$BO_2 = O_2C = O_2E = R$$

1) Расстояние между  $l_1$  и  $l_2$  равно  $2r$ , тогда  $O_2H = 2r - O_2D = 2r - R$ .  $O_2H$  - высота в  $\triangle O_2BE$ .

По т. Пифагора в  $\triangle BO_2H$ :  $BH = \sqrt{R^2 - (2r - R)^2} = \sqrt{(R - 2r + R)(R + 2r - R)} = \sqrt{2(R - r) \cdot 2r} = 2\sqrt{r(R - r)} = HE$

2) Проведем  $O_2K \perp BO_1$ , тогда  $O_2K = BH = 2\sqrt{r(R - r)}$

$$S_{\triangle BO_1O_2} = \frac{1}{2} O_2K \cdot BO_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r(R - r)} \cdot r = r\sqrt{r(R - r)}$$

$\triangle O_1BO_2 = \triangle O_1CO_2$  ( $O_1O_2$  - общая;  $O_1B = O_1C = r$ ;  $BO_2 = CO_2 = R$ ),

тогда  $S_{\triangle BO_2C} = 2 \cdot S_{\triangle BO_1O_2} = 2r\sqrt{r(R - r)}$

$$3) S_{\triangle O_2BE} = \frac{1}{2} \cdot O_2H \cdot 2BH = (2r - R) \cdot 2\sqrt{r(R - r)}$$

$$4) \frac{S_{\triangle BO_2C}}{S_{\triangle O_2BE}} = 2$$

$$S_{\triangle BO_2C} = 2 S_{\triangle O_2BE}$$

$$2r\sqrt{r(R - r)} = 4(2r - R)\sqrt{r(R - r)}$$

$$2r = 8r - 4R$$

$$4R = 6r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$5) BD = 2$$

По м. Пифагора в  $\triangle ABD$  ( $AD = BH = 2\sqrt{r(R-r)}$ ):

$$(2r)^2 + (2\sqrt{r(R-r)})^2 = 4$$

$$4r^2 + 4rR - 4r^2 = 4$$

$$rR = 1$$

$$\text{Из 1-ого: } r = \frac{2R}{3}$$

$$\frac{2R^2}{3} = 1, \text{ тогда } R^2 = \frac{3}{2}, \text{ а } R = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$r = \frac{2\sqrt{6}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

$$\text{б) } R = \frac{\sqrt{6}}{2}; r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Так как  $p$  и  $q$  - противоположные события, то  
 $p + q = 1$ , а  $p - q = 1 - 2q$

$$\text{Ори выпадает 1 раз: } (0,5)^{90} \cdot 90$$

$$\text{2 раза: } \frac{(0,5)^{90} \cdot 90 \cdot 89}{2!}$$

$$\text{3 раза: } \frac{(0,5)^{90} \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88}{3!}$$

Можно заметить закономерность и вывести формулу выпадания орла  $n$  раз из 90:

$$\frac{(0,5)^{90}}{n!} \cdot \frac{90!}{(90-n)!} = \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{n! (90-n)!}, \text{ тогда:}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$q = \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{1! \cdot (90-1)!} + \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{2! \cdot (90-2)!} + \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{3! \cdot (90-3)!} + \dots + \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{34! \cdot (90-34)!} =$$

$$= (0,5)^{90} \cdot 90! \left( \frac{1}{1 \cdot 89!} + \frac{1}{2 \cdot 88!} + \frac{1}{3 \cdot 87!} + \dots + \frac{1}{34! \cdot 56!} \right)$$

$$p - q = 1 - 2q = 1 - (0,5)^{-1} \cdot (0,5)^{90} \cdot 90! \left( \frac{1}{1 \cdot 89!} + \frac{1}{2 \cdot 88!} + \dots + \frac{1}{34! \cdot 56!} \right) =$$

$$= 1 - (0,5)^{89} \cdot 90! \left( \frac{1}{1 \cdot 89!} + \frac{1}{2 \cdot 88!} + \dots + \frac{1}{34! \cdot 56!} \right)$$

Ответ:  $1 - (0,5)^{89} \cdot 90! \left( \frac{1}{1 \cdot 89!} + \frac{1}{2 \cdot 88!} + \dots + \frac{1}{34! \cdot 56!} \right)$

№2

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x + \sin 8x \cdot \cos 3x + \sin 8x \cdot \sin 3x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{(\cos 8x \cdot \cos 3x + \sin 8x \cdot \sin 3x) + (\sin 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 6x \neq 0$$

$$6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z} (*)$$

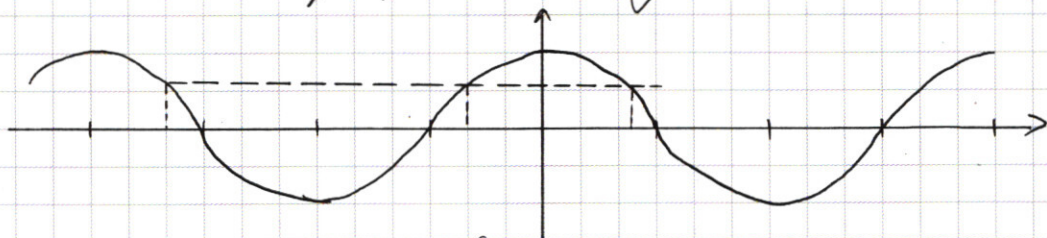
$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x = \cos 6x$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{4} - 5x \right) = \cos 6x$$

Вспомним график косинуса:



Из графика видно, что косинус может повторяться через  $2\pi$  либо через  $\pi$ , тогда:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - 5x = 6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} - 5x = -6x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Проверим, рав ли при каких  $k$  и  $m$  корни равны (\*):

$$1) \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$$

$$\frac{1}{44} + \frac{2k}{11} = \frac{1}{12} + \frac{n}{6} \quad | \cdot 12$$

$$\frac{3}{11} + \frac{24k}{11} = 1 + 2n \quad | \cdot 11$$

$$3 + 24k = 11 + 22n$$

$$24k = 8 + 22n$$

$$k = \frac{4 + 11n}{12}$$

Будет целым, если  $11n$  будет давать остаток 8 при делении на 12, а это будет дос-

$$2) -\frac{\pi}{4} + 2\pi m = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$$

$$-\frac{1}{4} + 2m = \frac{1}{12} + \frac{n}{6}$$

$$-3 + 24m = 1 + 2n$$

$$m = \frac{2 + n}{12}$$

тогда вся 2 серия корней совпадает со (\*), значит она не входит в ответ.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

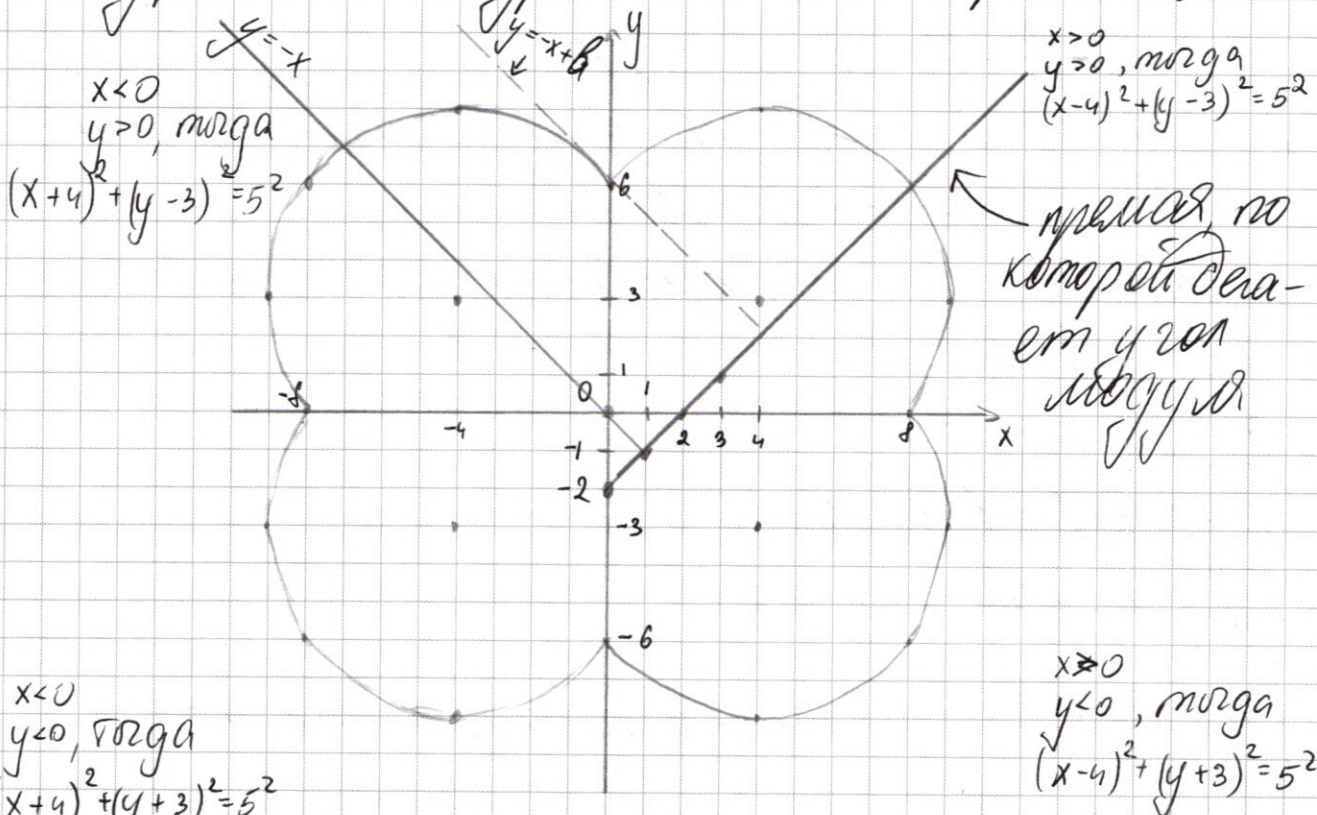
минимум при  $n = 4; 16; 28; 40; 52 \dots$

Ответ:  $\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}; k \in \mathbb{Z}; k \neq \frac{4+11n}{12}; n = 4; 16; 28; 40; 52 \dots$

№ 5

$$\begin{cases} y = |x - 4| + 4 - 2 & (1) \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 5^2 & (2) \end{cases}$$

2-ое ур-е - это ур-е ок-ти. Построим его:



$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0, \text{ тогда} \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = 5^2 \end{cases}$$

$$(1) \quad x \geq 0$$

$y = |x - 4| + 4 - 2$  - это график  $y = |x|$  сдвину-  
тый влево на 4 и вверх на 4-2.  
График модуля имеет вид:  $\checkmark$  найдем прямую,

по которой делает уголок модуля:

$$a: 0 \ 1 \ 4 \ 9$$

$$x: 0 \ 1 \ 2 \ 3$$

$$y: -2 \ -1 \ 0 \ 1$$

Одно решение у нас обязательно будет, при  $a \in [0; 64]$

1) Найдем значение  $b$ , когда прямая  $y = -x + b$   <sup>$a = (b+2)^2$</sup>   ~~$(b-a+2)^2$~~  будет касательной к кр-ой ок-ти  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ .

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$x^2 + 8x + (b-x)^2 - 6(b-x) = 0$$

$$x^2 + 8x + b^2 - 2bx + x^2 - 6b + 6x$$

$$2x^2 + 2x(7+b) + b^2 - 6b = 0$$

$$D = 4(49 - 14b + b^2) - 8b^2 + 48b = 196 - 56b + 4b^2 - 8b^2 + 48b = -4b^2 - 8b + 196 = -4(b^2 + 2b - 49)$$

Прямая будет касательной, когда  $D = 0$ :

$$-4(b^2 + 2b - 49) = 0$$

$$b^2 + 2b - 49 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 49 = 4 \cdot 50 = 100 \cdot 2$$

$$b = \frac{-2 + 10\sqrt{2}}{2} = -1 + 5\sqrt{2}$$

$$b = \frac{-2 - 10\sqrt{2}}{2} = -1 - 5\sqrt{2} \text{ — не подходит, т.к. } a \geq 0$$

Тогда при  $b = -1 + 5\sqrt{2}$  данная система будет иметь одно решение

$$b = (a+2)^2$$

$$-1 + 5\sqrt{2} = (a+2)^2$$

$$a+2 = \sqrt{-1 + 5\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt{-1 + 5\sqrt{2}} - 2$$

$$a = (b+2)^2 = (-1 + 5\sqrt{2} + 2)^2 = (1 + 5\sqrt{2})^2 =$$

$$= 1 + 10\sqrt{2} + 50 = 51 + 10\sqrt{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) при  $b = 6$  прямая  $y = -x + b$  будет  
пересекать ок-ту  $y = x^2$  в 2-х точках

~~$$b = (a+2)^2$$~~

$$a = (b+2)^2 = (6+2)^2 = 64$$

~~$$b = (a+2)^2$$~~

~~$$\sqrt{b} = a + 2$$~~

~~$$a = \sqrt{b} - 2 \quad a \in [64; 51 + 10\sqrt{2}]$$~~

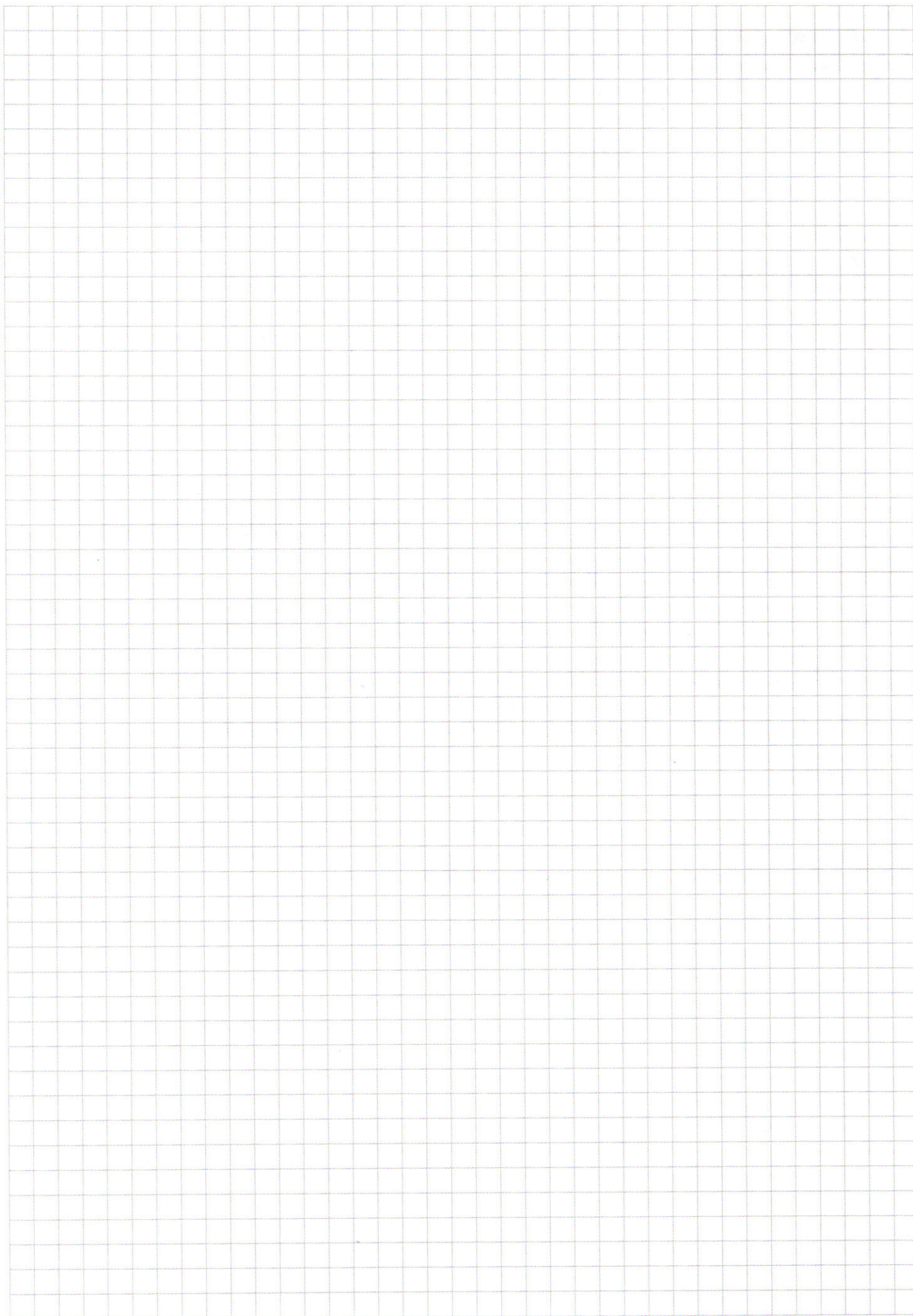
Тогда  ~~$a \in [\sqrt{b} - 2; \sqrt{1+5\sqrt{2}} - 2]$~~  - при таких  $a$  система будет иметь 3 решения

3) Но у нас есть точка  $(0; 0)$ , которая удовлетворяет 2-ой  $y$ -линии, тогда при  $b = 0$  система тоже будет иметь 3 решения

~~$$a = (a+2)^2$$~~

$$a = (0+2)^2 = 4$$

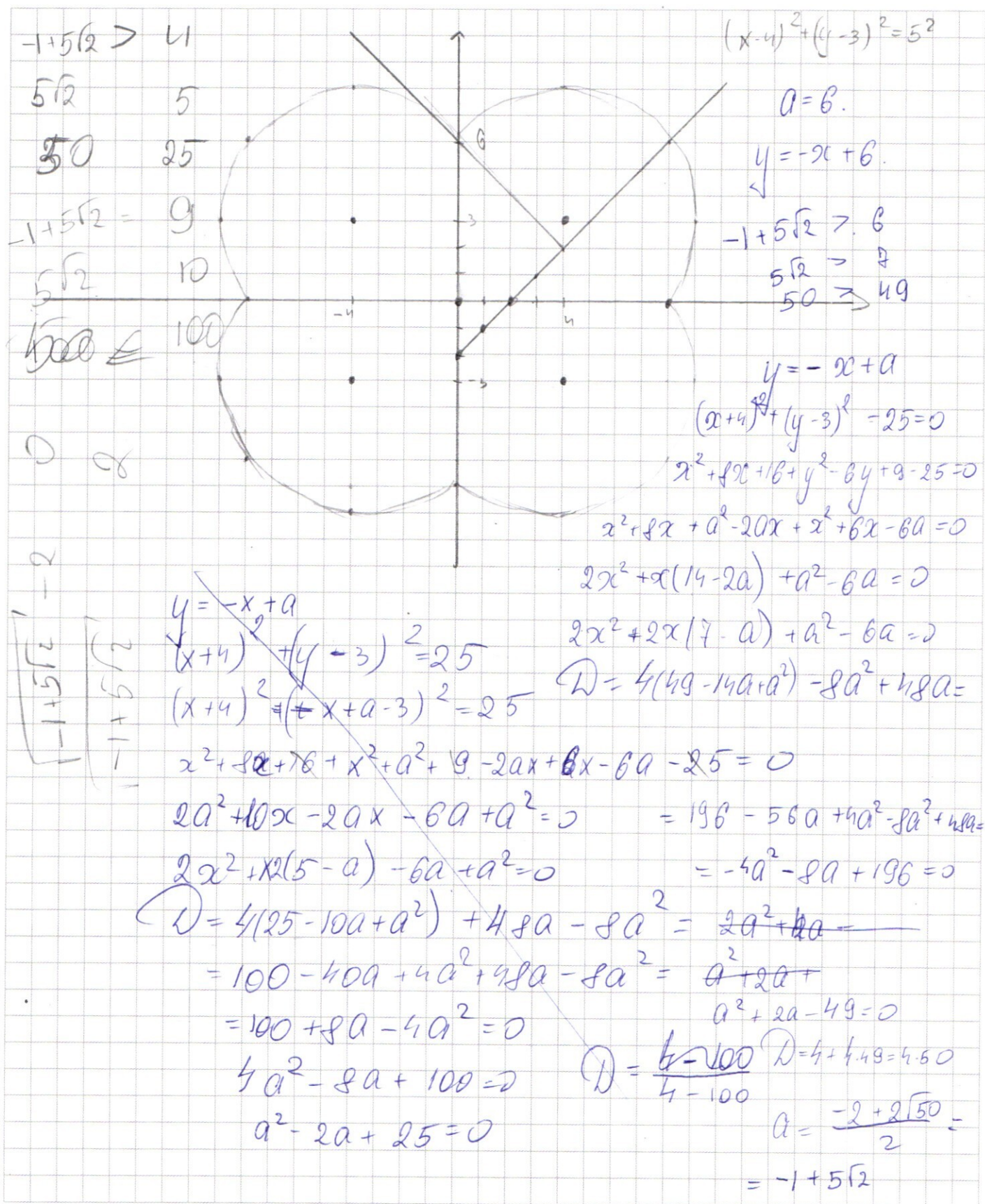
Ответ:  $a \in \{4\} \cup [64; 51 + 10\sqrt{2}]$



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$b = 6$$

$$y = -x + 6$$

69

< 514 10<sup>12</sup>

13

10<sup>12</sup>

169

200

$$(3 \log_3 x)^{\frac{3}{2}} - 11 \cdot 3 \log_3 x + 4(x \log_3^3)^{\frac{1}{2}} - 48 \leq 0$$

$$x\sqrt{x} - 11x + 40\sqrt{3} - 48 \leq 0$$

$$x(\sqrt{x} - 11)$$

$$x^{\frac{3}{2}} = -40\sqrt{3}$$

$$x = (-40\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$$

$$x\sqrt{x} - 11x$$

$$x^{\frac{3}{2}} - 11x$$

$$\sqrt{x} = \frac{22}{3}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x^{\frac{3}{2}} - 11x = 0$$

$$x(x^{\frac{1}{2}} - 11) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 121$$

$$x^{\frac{3}{2}} = 48$$

$$x = 28$$

$$x = 96$$

$$1296$$

$$40\sqrt{3} > 48$$

$$5\sqrt{3} > 6$$

$$25.3 > 36$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

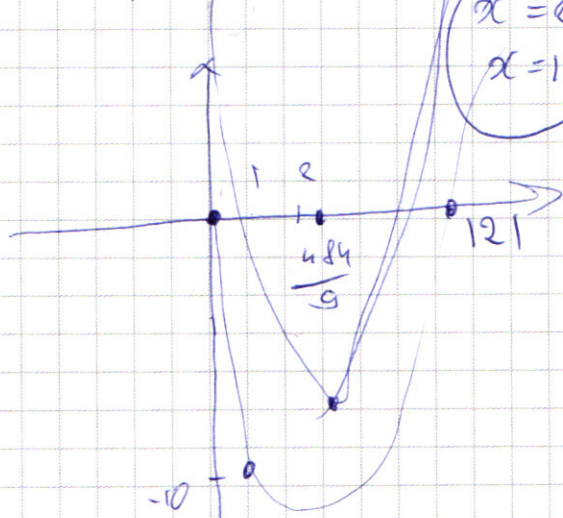
$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$x = \frac{484}{9}$$

$$\begin{array}{r} + 484 \\ 484 \\ \hline 5324 \\ \times 22 \\ \hline 10800 \end{array}$$



$$\frac{484}{9} = \left(\frac{22}{3}\right)^3$$

$$\left(\frac{22}{3}\right)^3 - 11\left(\frac{22}{3}\right)^2 = \frac{484}{9} \left(\frac{22-33}{3}\right) =$$

$$= -\frac{11 \cdot 484}{27}$$

$$\left(\frac{22}{3}\right)^3 - 11\left(\frac{22}{3}\right)^2$$

$$\begin{array}{r} - 5324 \\ 27 \\ \hline -5324 \end{array}$$

$$48 - 40\sqrt{3}$$

$$1296 - 1080\sqrt{3}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$p+q=1 \quad \cancel{q=1-p} \quad p=1-q \quad 1-q=q$$

$$\cancel{q=1-p} \quad \cancel{p-q=p-1+q}$$

$$p-q=1-2q$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{90} \cdot 90 - \text{показатель}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{90} \cdot 90!}{n! (90-n)!}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{90} \cdot 90 \cdot 89}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{90} \cdot 45 \cdot 89 = 2p$$

$$\frac{(0,5)^{90} \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = (0,5)^{90} \cdot 15 \cdot 89 \cdot 88$$

$$q = \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{1! (90-1)!} + \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{2! (90-2)!} + \dots + \frac{(0,5)^{90} \cdot 90!}{34! (90-34)!} =$$

$$= (0,5)^{90} \cdot 90! \left( \frac{1}{89!} + \frac{1}{2! \cdot 88!} + \dots + \frac{1}{34! \cdot 56!} \right)$$

$$p-q = 1 - 2q = 1 - 2 \cdot (0,5)^{90} \left( 90 + \frac{90 \cdot 89}{2} + \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{3}{34} \right)$$

$$= 1 - 2 \cdot (0,5)^{90} \cdot 90! \left( \frac{1}{89!} + \frac{1}{2! \cdot 88!} + \frac{1}{3! \cdot 87!} + \dots + \frac{1}{33! \cdot 57!} + \frac{1}{34! \cdot 56!} \right)$$

№2

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x + \sin 8x \cdot \cos 3x + \sin 8x \cdot \sin 3x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{(\cos 8x \cdot \cos 3x + \sin 8x \cdot \sin 3x) + (\sin 8x \cos 3x - \cos 8x \sin 3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\cos 6x \neq 0} \quad 6x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x\right) \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x = \cos 6x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) - \cos 6x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \cos 6x$$

$$\frac{\pi}{4} + 5x = 6x \pm 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = \cos 6x - 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}$$

$$6x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{k}{6} = \frac{1}{44} + \frac{2n}{11}$$

$$\frac{11}{12} + \frac{11k}{6} = \frac{1}{4} + 2n$$

$$\frac{11}{3} + \frac{22k}{3} = 1 + 8n$$

$$11 + 22k = 3 + 24n$$

$$8 + 22k = 24n$$

$$4 + 11k = 12n$$

$$\cos x + \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x =$$

$$= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - x + x}{2} =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cos \frac{\pi}{4} =$$

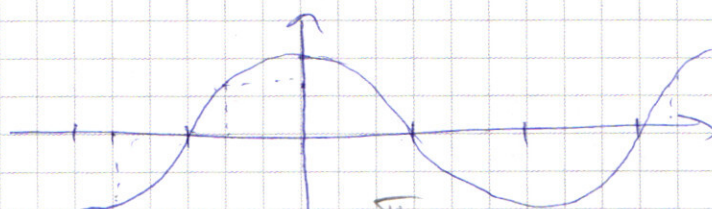
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{x}{2}\right)$$



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$15 \quad 28 \quad 37$$

$$14K$$

$$005$$

$$\begin{matrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 44 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 11 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\frac{92}{12} =$$

$$8 \quad 16$$

$$\cos 3x + \sin 3x \neq 0 = \frac{23}{3}$$

$$\cos\left(3x \pm \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$$

$$n = \frac{4 + 11K}{12}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 2\pi n$$

$$3x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$$

горбачев

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten solution on grid paper for a logarithmic inequality problem.

**Equation 1:**  $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_2 3} \leq 48$

**Equation 2:**  $(27\sqrt{\log_3 x})^{\frac{1}{2}} - 99(3\sqrt{\log_3 x})^{\frac{1}{2}} + 40(x\sqrt{\log_2 3})^{\frac{1}{2}} \leq 48$

**Equation 3:**  $(3^3 \log_3 x)^{\frac{1}{2}} - 99(3 \log_3 x)^{\frac{1}{2}} + 40(x \log_2 3)^{\frac{1}{2}} \leq 48$

**Equation 4:**  $(3 \log_3 x)^{\frac{3}{2}} - 99x + 40\sqrt{3} \leq 48$

**Equation 5:**  $x \cdot \sqrt{x} - 99\sqrt{x} + 40\sqrt{3} - 48 \leq 0$

**Equation 6:**  $x^3 - 99x + 40\sqrt{3} - 48 \leq 0$

**Equation 7:**  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

**Equation 8:**  $(3 \log_3 x)^{\frac{3}{2}} - 11 \cdot 3 \log_3 x + 40(x \log_2 3)^{\frac{1}{2}} \leq 48$

**Equation 9:**  $x\sqrt{x} - 11x + 40\sqrt{3} - 48 = 0$

**Equation 10:**  $x(4\sqrt{x} - 11) + 8(5\sqrt{3} - 6) = 0$

**Equation 11:**  $x(\sqrt{x} - 11) = 8(6 - 5\sqrt{3})$

**Equation 12:**  $x^3 - 11x^2 + 40\sqrt{3}x - 48 \leq 0$

**Equation 13:**  $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$

**Equation 14:**  $\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} = 0$

**Equation 15:**  $x = 0$

**Equation 16:**  $2\sqrt{a} = 2$

**Equation 17:**  $\sqrt{a} = 1$

**Equation 18:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 19:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 20:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 21:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 22:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 23:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 24:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 25:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 26:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 27:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 28:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 29:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 30:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 31:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 32:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 33:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 34:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 35:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 36:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 37:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 38:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 39:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 40:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 41:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 42:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 43:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 44:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 45:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 46:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 47:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 48:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 49:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 50:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 51:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 52:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 53:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 54:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 55:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 56:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 57:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 58:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 59:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 60:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 61:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 62:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 63:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 64:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 65:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 66:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 67:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 68:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 69:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 70:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 71:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 72:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 73:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 74:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 75:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 76:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 77:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 78:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 79:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 80:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 81:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 82:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 83:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 84:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 85:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 86:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 87:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 88:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 89:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 90:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 91:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 92:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 93:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 94:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 95:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 96:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 97:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 98:**  $x = \frac{22}{3}$

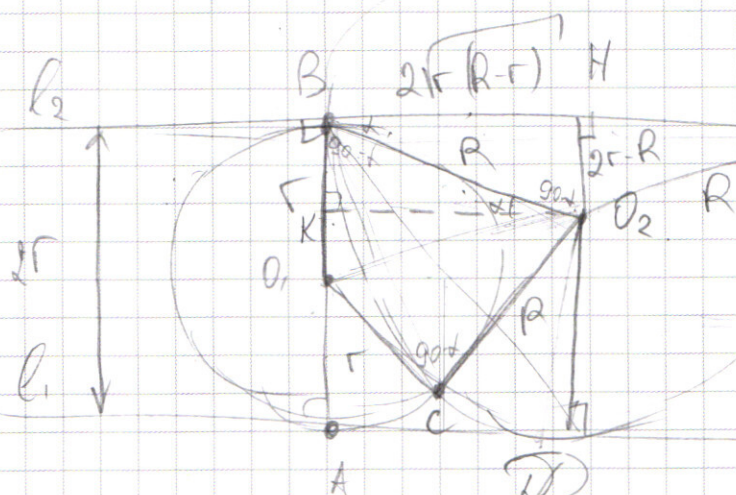
**Equation 99:**  $x = \frac{22}{3}$

**Equation 100:**  $x = \frac{22}{3}$

$$S_{\text{Bo,CO}_2} = 2 S_{\text{O}_2 \text{BE}}$$

$$BE = 2 \cdot \sqrt{R^2 - 4r^2 + 4rR + R^2} = 2\sqrt{Rr - r^2} = 2\sqrt{r(R-r)}$$

$$S_A = \frac{\rho}{2} \cdot (2r - R) \cdot 4\sqrt{r(R-r)} = 2\rho(r-R)\sqrt{r(R-r)}$$



$$S_{B \in \mathcal{O}_2} = (2r - R) \cdot 2 \sqrt{R - r}$$

$$\frac{1}{2}r^2 + 4r(2-r) = 4$$

$$4r^2 + 4rR - 4r^2 = 4$$

$$\cap R = y$$

$$\cos \alpha = \frac{2r(R-r)}{R}$$

$$BH = \sqrt{R^2 - 4r^2} = 4r(R - R^2) = 2\sqrt{r(R-r)}$$

$$\cos \phi = \frac{K O_2}{R}$$

$$K_{O_2} = 2[r(R-r)]'$$

$$\frac{352}{2} = 176$$

$$S_{B0;02} = \frac{r \cdot 2\sqrt{r(R-r)}}{2(r-R)\sqrt{r(R-r)}} = 2$$

$$I = 4I - 2R$$

$$r^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$2R = 3r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{3}{2} \quad R = \frac{3r}{2}$$