

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$p = \frac{\sum_{i=0}^{49} C_{110}^{61+i}}{2^{110}} \quad q = \frac{\sum_{i=0}^{48} C_{110}^i}{2^{110}} \quad (\text{из условия задачи и свойств})$$

$$p - q = \frac{\sum_{i=0}^{49} C_{110}^{61+i} - \sum_{i=0}^{48} C_{110}^i}{2^{110}} = \frac{\sum_{i=0}^{49} C_{110}^{49-i} - \sum_{i=0}^{48} C_{110}^i}{2^{110}} = \frac{C_{110}^{49} + C_{110}^{48} + \dots + C_{110}^0 - C_{110}^{48} - C_{110}^{47} - \dots - C_{110}^0}{2^{110}} = \frac{C_{110}^{49}}{2^{110}} = \frac{110!}{49!61!2^{110}}$$

Ответ: $\frac{110!}{49!61!2^{110}}$

$\sqrt{2}$

Ограничения:
 $\cos 5x + \sin 5x \neq 0$
 $5x \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

Преобразуем левую часть:

$$\frac{\cos 14x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 14x (\cos 5x - \sin 5x)}{(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)} =$$

$$= \frac{\cos 14x \cos 5x + \sin 5x \cos 14x - \sin 14x \cos 5x + \sin 14x \sin 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} =$$

(формулы двойного угла, косинуса и синуса разности)

$$= \frac{\cos 9x + \sin(-9x)}{\cos 10x} = \frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2} \quad \left| \frac{\cos 10x}{\sqrt{2}} \neq 0 \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x = -\cos 10x$$

Приведем к приведения и вспомогательный угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 10x)$$

Из свойства периодичности косинуса:

$$\begin{cases} 9x + \frac{\pi}{4} = (\pi - 10x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 9x + \frac{\pi}{4} = -\pi + 10x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ -x = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \begin{pmatrix} x = \frac{\pi}{4} + \pi(2n+1), \text{ не подходит} \\ 5x = \frac{5\pi}{4} + 5\pi(2n+1), \text{ не подходит} \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi n \quad \left(5x = \frac{15\pi}{76} + \frac{10}{76}\pi n \right) \quad \begin{matrix} \text{Уравнение} \\ \text{для целозначущих} \\ \text{кзрной!} \end{matrix}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m = \frac{15\pi}{76} + \frac{10}{76}\pi n, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$19m + 38m = 15n + 10n, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$38m - 10n - 38m = 4, n, m \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{4+38m}{10} = 3m + \frac{2+4m}{5}, (2+4m=5k, k \in \mathbb{Z})$$

$$m = \frac{5k-2}{4} = k + \frac{k-2}{4}, (k=4a+2, a \in \mathbb{Z})$$

$$m = 5a+2, n = 19a+8, a \in \mathbb{Z}$$

Итак, мы имеем, что единственное семейство решений:
 $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 19a+8 \forall a \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 19a+8, \forall a \in \mathbb{Z}$

$$27\sqrt[3]{\log_3 x} - 13 \cdot 3^{\sqrt[3]{\log_3 x}} + 55x^{\sqrt[3]{\log_3 x}} \leq 75$$

Перенесем 75 в левую часть и преобразуем синтаксисом

также, что $x = 3^{\log_3 x}$, а $\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 x}$

Ограничения:
 $x > 0, x \neq 1$
 $\log_3 3 \cdot \log_3 x \geq 0$
 $x \geq 1$

$$3^{3\sqrt[3]{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{2\sqrt[3]{\log_3 x}} + 55x^{\sqrt[3]{\log_3 x}} - 75 \leq 0$$

Пусть $3^{\sqrt[3]{\log_3 x}} = t, t > 1$ (т.к. $\sqrt[3]{\log_3 x} > 0$, посв. берн. ср. и др. и в. корня)
 $t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leq 0$

$$t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Легко заметить, что этот многочлен раскладывается
как $(t-3)(t-5)^2$;

$$(t-3)(t-5)^2 \leq 0.$$

$$t \in (1; +\infty) \cup ((-\infty; 3] \cup \{5\}) = (1; 3] \cup \{5\}.$$

$$3^{\sqrt{\log_3 x}} \in (1, 3] \cup \{5\}$$

$$\sqrt{a_{y_3} x} \in (0, 1] \cup \{a_{y_3}, 5\}$$

$$\log_3 x \in (0; 1] \cup \{\log_3^2 5\}$$

$$x \in ((1, 3] \cup \{3^{\log_3^2 5}\}) = (1, 3] \cup \{5^{\log_3 5}\}$$

Orbit: $(1, 3] \cup \{5^{\log_2 5}\}$

$$\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a} \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$, для которого
уравнение имеет 3 решения

раздел 13

Второе уравнение задает 4 окружности с центрами $(\pm 12; \pm 5)$.

(Обозначим их же $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ по порядку четверти, в которых они расположены) (см. рис. 1), а центры как O_1, O_2, O_3, O_4 .

Первое уравнение задает два ~~прямые~~ ^{луча} следующих вида:

$$x \geq \sqrt{a}, y = 2 - x \text{ (by c)}$$

$x < \sqrt{a}$, $y = x + 2 - 2\sqrt{a}$, $\leftarrow$ (лучи), а лучи ~~обратные~~ возникают у точки

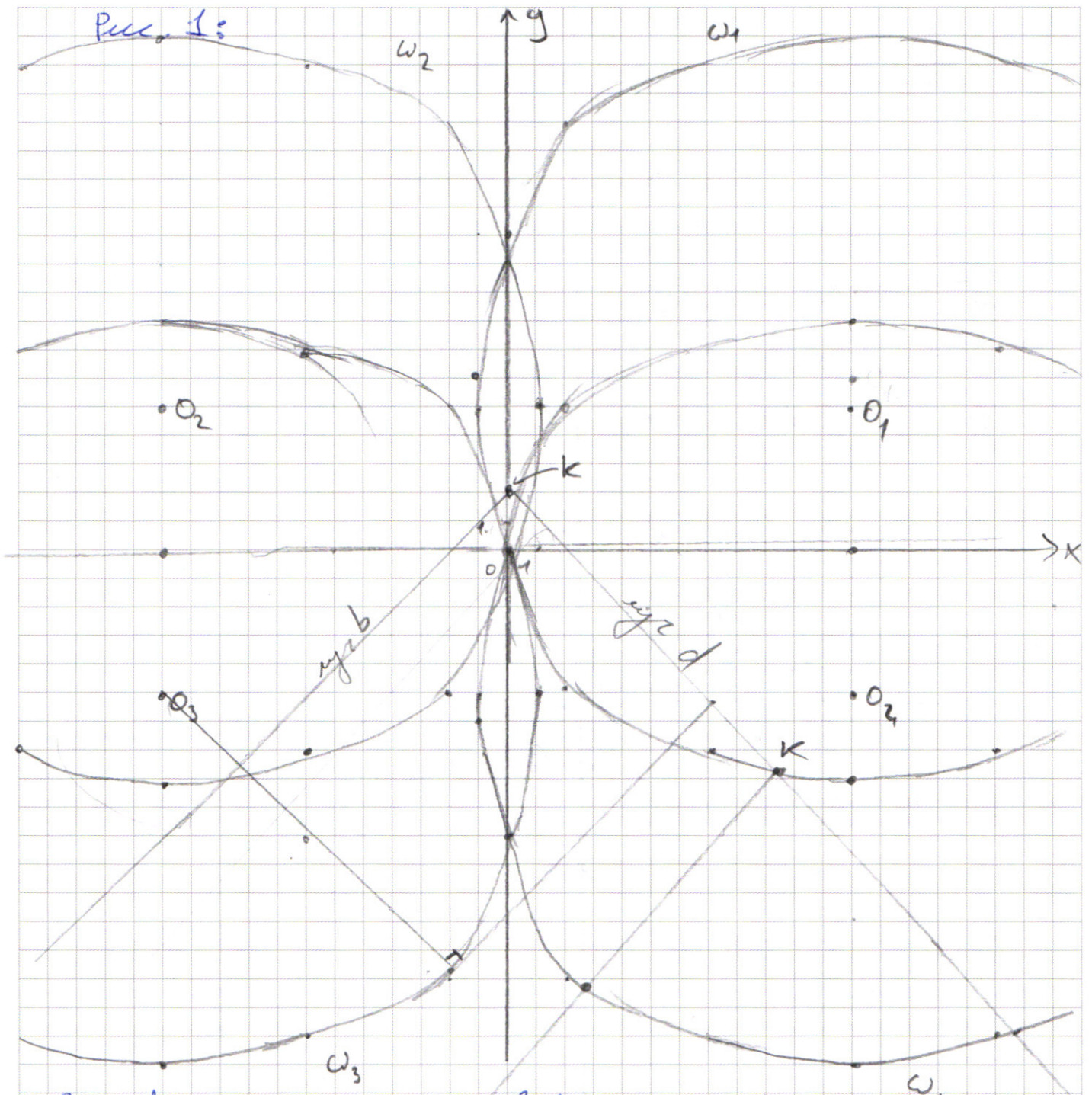
$$K(\sqrt{a}, 2-\sqrt{a}) \text{ (oblongus, } a \in [0; +\infty)) \quad (\text{change } b)$$

Изобразим все это на координатной плоскости Оху (рис. 1)

при $\alpha = 0$ линия d снова пересекает окружность ω_4 ,
затем ω_2 , ω_1 и ω_3 вторично, при непрерывном повороте, то для

Дискретная задача сводится к выбору трех решений
назад, чтобы в пересечение окружности в 3,2 мб + точное.

Рис. 1:



Если d пересекает окружность в 3 точках, то K расположен внутри ω_2 , а значит, b пересечет ω_2 , т.е. будет более 3 решений.

Если d пересекает окружность в 2 точках, то K расположен в ω_4 и не расположен в ω_1 . Кривая b пересечет только O_4 (это видно из рисунка и будет доказано позднее), т.е. есть только 2 решения.*

Значит, d пересекает окружность в 2 точках. Если K — не точка пересечения d с ω_1 , то b пересечет ω_1 и ω_4 (т.к. K лежит в пересечении внутренних частей этих окружностей),

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и значит, будет хотя бы 4 решения.

Итак, остается единственной точкой для нас служит -
лучи выходят из точки К, касаются ω_1

Токамен, что луч b не пересекает ω_3 (тогда мы авто-
матически докажем, что и луча a не пересекается ω_3
с ω_1 , b тоже не пересекает ω_3)

Очевидно, что существует единственная точка на b та
единственный вариант для К, при котором луч b будет
касательной к ω_3 , достигаемый при $a = a_0$.

Тогда уравнение перпендикулярно к касательной
радиуса имеет вид $y = -x + 2 - 2\sqrt{a_0}$ Значит, точка
пересечения b и ω_3 $(-12 + \frac{13}{\sqrt{2}}; -5 - \frac{13}{\sqrt{2}})$.

Найдем $\sqrt{a_0}$ и $2 - \sqrt{a_0}$.

$$-5 - \frac{13}{\sqrt{2}} = -12 + \frac{13}{\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{a_0}$$

$$5 - 13\sqrt{2} = \sqrt{a_0} = 13\sqrt{2} - 5; \quad 2 - \sqrt{a_0} = 7 - 13\sqrt{2}.$$

$$a_0 = (5 + 13\sqrt{2})^2 = 25 - 130\sqrt{2} + 13^2 \cdot 2$$

Подставим в уравнение окружности ω_1 формулу $(\sqrt{a_0}; 2 - \sqrt{a_0})$

$$(13\sqrt{2} - 17)^2 + (2 - 13\sqrt{2})^2 = 169$$

$$169 \cdot 2 - 13 \cdot 17\sqrt{2} + 17^2 + 2^2 - 13 \cdot 2\sqrt{2} + 169 \cdot 2 = 169$$

Левая часть + упрощаем, правая часть нуля.

Очевидно, эта точка не лежит ни окружности,
и для всех $a > a_0$ b не пересекается с ω_3 . Но итак,
что $a > a_0$ позднее. абсциссу x_3

Для того, чтобы найти a_3 , для которого уравнение
имеет 3 решения, подставим уравнение b в уравнение
окружности ω_1 : Очевидно, что если мы знаем x_3 , то

$$(x_3 - 12)^2 + (2 - x_3 - 5)^2 = 169.$$

$$x_3^2 - 24x_3 + 144 + x_3^2 + 6x_3 + 9 = 169.$$

$$a_3 = x_3^2;$$

a_3 - меньше a .

$$2x_3^2 - 18x_3 + 153 = 169.$$

$$x_3^2 - 9x_3 - 8 = 0.$$

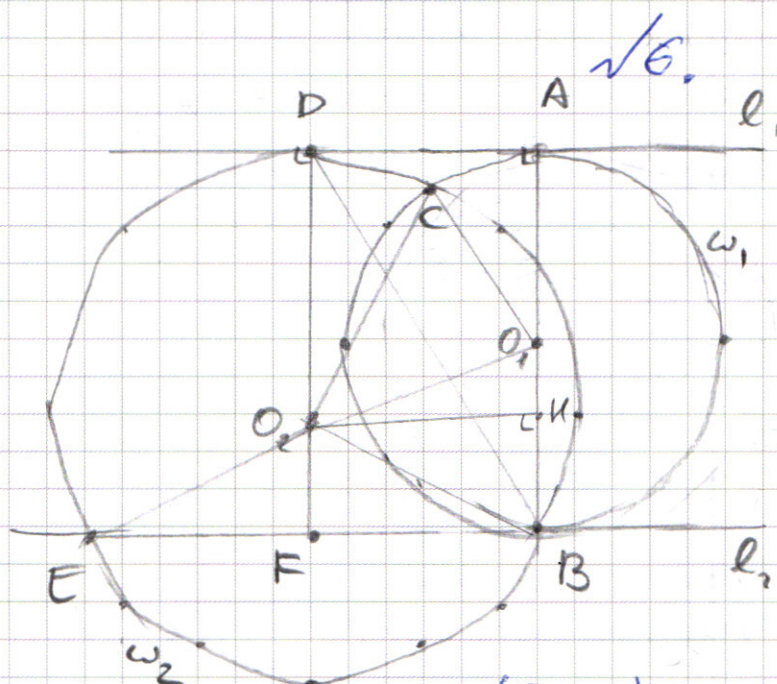
$$D = 81 + 32 = 113.$$

$$x_3 = \frac{9 \pm \sqrt{113}}{2} \quad (x_3 \geq 0, \text{ т.к. } a_3 > 0), \text{ и т.д.}$$

$$x_3 = \frac{9 + \sqrt{113}}{2}$$

$$\text{Отсюда } a_3 = \frac{(9 + \sqrt{113})^2}{4} = \frac{194 + 18\sqrt{113}}{4} = \frac{97 + 9\sqrt{113}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{97 + 9\sqrt{113}}{2}.$$



Дано: $l_1 \parallel l_2$, $\omega_1(O_1, r_1)$, $\omega_2(O_2, r_2)$

$l_1 \cap \omega_1 = A$, $l_2 \cap \omega_1 = B$.

$\omega_1 \cap \omega_2 = \{B, C\}$.

$\omega_2 \cap l_1 = D$.

$\omega_2 \cap l_2 = \{B, E\}$.

$BD = 4$.

Найти: а) $\frac{r_2}{r_1}$

б) r_2, r_1 .

$$\frac{S_{BO_2CO_1}}{S_{BO_2E}} = 4.$$

а) Решение.
 $AO_1 \perp l_1 \rightarrow AO_1 \perp l_2 (l_1 \parallel l_2)$

$B \in AO_1 (O_1B \perp l_2)$,
значит, AB — диаметр
и $AB = 2r_1$.

$\triangle O_2BE$ — равнобедренный:
($O_2E = O_2B = r_2$).

$DO_2 \perp l_1 \rightarrow DO_2 \perp l_2 (l_1 \parallel l_2)$

$DO_2 \cap EB = F$, O_2F —
высота $\triangle O_2BE$, а
значит, ее медиана.

$$O_2F = DF - DO_2 = 2r_1 - r_2.$$

$$S_{O_2BF} = \frac{O_2F \cdot FB}{2} = \frac{S_{BO_2E}}{2}$$

(медиана разбивает тр.
на две равновеликие)

$$\triangle CO_1O_2 = \triangle BO_1O_2$$

$$\begin{cases} O_1O_2 = O_1O_2 \\ CO_1 = BO_1 = r_1 \\ CO_2 = BO_2 = r_2 \end{cases}$$

$$S_{BO_1O_2} = O_2H \cdot O_1B \cdot \frac{1}{2} (O_2H \perp AB)$$

$$\frac{S_{BO_2CO_1}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O_2H \parallel FB$ ($O_2H \perp AB$, $FB \perp AB$),
 $O_2F \parallel AB$ ($DF \perp AD$, $AB \perp AD$):

O_2HFB - параллелограмм, $O_2H = FB$.

$$\frac{S_{BO_2O_2}}{S_{O_2BF}} = \frac{O_2HO_2B}{O_2F \cdot FB} = \frac{O_2B}{O_2F} = \frac{r_1}{2r_1 - r_2} = 4.$$

$$r_1 = 8r_1 - 4r_2, \quad r_2 = \frac{7}{4}r_1, \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{7}{4}.$$

б) $\triangle O_2FB$ прямоугольный ($O_2F \perp FB$).

Теорема Пифагора:

$$O_2B^2 = O_2F^2 + FB^2$$

$$r_2^2 = (2r_1 - r_2)^2 + BF^2$$

$$BF^2 = \left(\frac{7}{4}r_1\right)^2 - \left(\frac{1}{4}r_1\right)^2 = \left(\frac{49}{16} - \frac{1}{16}\right)r_1^2 = 3r_1^2.$$

$FBAB$ прямоугольник ($DF \parallel AB$, $DF \perp AD$, $AB \perp AD$)

$$FB = AD.$$

$\triangle DAB$ прямоугольный ($AD \perp AB$):

По теореме Пифагора:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$4^2 = 3r_1^2 + 4r_1^2$$

$$r_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}, \quad r_2 = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}.$$

Ответ: а) $\frac{7}{4}$; б) $\frac{4}{\sqrt{7}}$; $\sqrt{7}$.

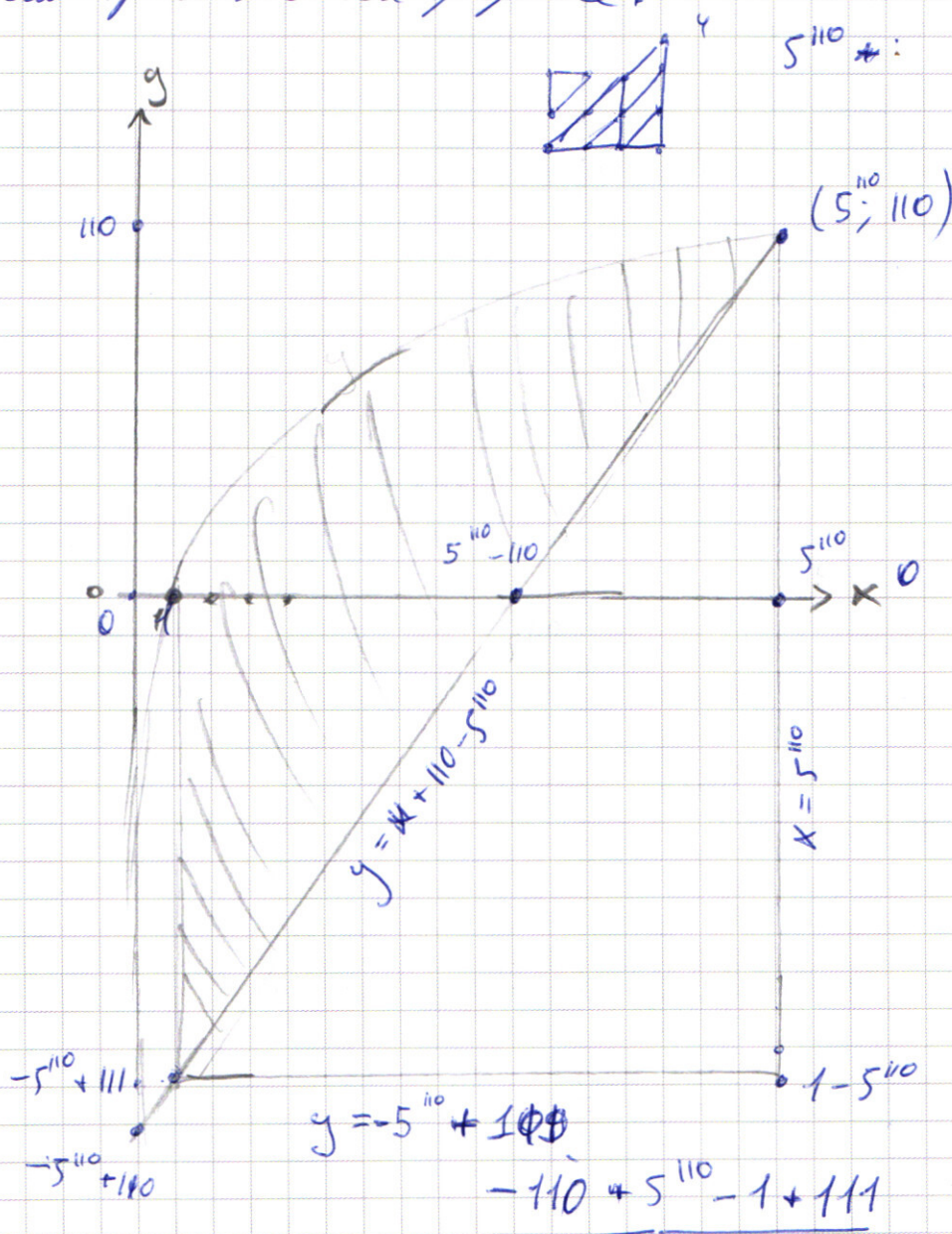
$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110} \\ y \leq \lg_5 x. \end{cases} \quad (x > 0)$$

Система ли уравнений имеет этот вид?

Данные уравнения стандартны. Рассмотрим графики

$y = 110 + x - 5^{110}$ и $y = \lg_5 x$. ~~Из~~ Из этих графиков очевидно, что они пересекаются в двух точках: $x = 10 \cdot 5^{110}$, 110 и (x_0, y_0) , причем $x_0 < 1$, а $y_0 < 0$.

Рассмотрим это на графике:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Как найти количество точек в области заштригованной части графика. Это сумма точек на оси между графиком функции и прямой

$$x = 5^{110} \text{ и } y = 0; \text{ точек в треугольнике из прямой}$$

$$y = x + 110 - 5^{110}; x = 5^{110}, y = 110 - 5^{110} \text{ и точек в треугольнике}$$

$$\text{ограниченном } y = 0, y = 110 - 5^{110}, x = 1, x = 5^{110} \text{ без точек}$$

$$\text{в треугольнике из прямой } y = x + 110 - 5^{110}, x = 5^{110}, y = 110 - 5^{110}.$$

Пусть логарифм y нас интересует количество точек: (Точка с $y=0$ не считается)

$$0 \text{ и } y \text{ } 5^0 \text{ и } x = 5^1 - 1$$

$$20 \text{ и } y \text{ } x = 5^1 \text{ и } x = 5^2 - 1$$

$$3 \text{ и } y \text{ } x = 5^2 \text{ и } x = 5^3 - 1.$$

$$109 \cdot (5^{110} - 5^{109}) \quad x = 5^{109} \text{ и } x = 5^{110} - 1$$

$$110 \text{ и } x = 5^{110}$$

Прогнозируем величину $\sum_{i=1}^n 5^i \cdot 5^{110-i} - 5^{110-i} - 1$ равна $5^{110} - 1$

$$5^{n+1} \cdot n - \sum_{i=0}^n 5^i = 5^{n+1} \cdot n - \frac{5^{n+1} - 1}{4} =$$

$$= 5^{n+1} \left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4}. \quad (+110 \text{ для } x = 5^{110})$$

Всего над логарифмом $5^{110} \left(\frac{439}{4} \right) + \frac{44}{4}$ пар (x, y) .

Каждая из точек в треугольнике. Для каждой x и y нас $(5^{110} \text{ точек}, \text{ а нас } y \text{ нас } 5^{110})$. Всего 5^{220} точек.

Каждая из точек в треугольнике. Она находится на оси, так что итоговая формула будет иметь вид:

~~точка (число вхождений x) (число вхождений y)~~

Возьмем $5^{110} \cdot x$ и $5^{110} \cdot y$

Значит, в треугольнике

$$\frac{5^{220}}{2}$$

Итого, формула будет

В треугольнике число точек, равное 5^{110} -му
треугольному числу, т.е. $\frac{5^{110}(5^{110}+1)}{2}$ точек.

Итак, всего точек:

$$\left(5^{111} \cdot \frac{439}{4} + \frac{441}{4}\right) \Rightarrow \frac{5^{110}(5^{110}+1)}{2} + \frac{5^{220} - 110 \cdot 5^{110}}{2} =$$

$$= 5^{110} \cdot \left(550 - \frac{5}{4}\right) + \frac{441}{4} \Rightarrow \frac{5^{220}}{2} - \frac{1 \cdot 5^{110}}{4} - 110 \cdot 5^{110} + 5^{220} =$$

$$= \frac{5^{220}}{2} + \frac{441}{4} + 5^{110} \left(440 - \frac{7}{4}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sum_{k=0}^{110} 5^k$

5^{110}

$$\begin{array}{rcl} 4 & +0 \\ 20 & +1 \\ 100 & +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot 0 \\ 20 \cdot 1 \\ 100 \cdot 2 \end{array}$$



$$+ (5^{110} - 100) \cdot 5^{110}$$

$$\frac{(5^{110} - 1) \cdot (5^{110} - 1)}{2}$$

$$5^{n+1} - 5^n + n \cdot (5^{n+1} - 5^n) \cdot n$$

$$4 \cdot 5^0 (5 - 1) \cdot 0 + (25 - 5) \cdot 1 + (125 - 25) \cdot 2 =$$

$$= 125 \cdot 2 - 25 \cdot 1 - 5 \cdot 1$$

$$625 \cdot 3 - 125 \cdot 3 =$$

$$= 625 \cdot 3 - 125 \cdot 1 - 25 \cdot 1 - 5 \cdot 1$$

$$5^{n+1} - 1 + \sum_{i=0}^n 5^i = 5^{n+1} \cdot \left(n + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$$

$$(a + b)(a^n + b a^{n-1} + \dots + b^n a + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

$$5^{n+1} - 1$$

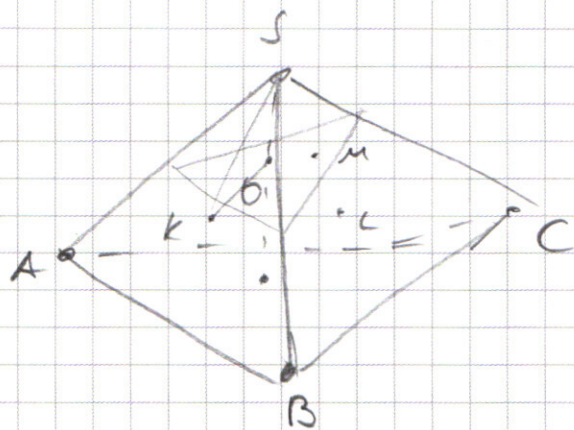
$$\frac{a^{n+1} - 1}{4}$$

$$5^{n+1} - 1 + \sum_{i=0}^n 5^i = 5^{n+1} \cdot \left(\frac{441}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{(5^{110} - 1)^2}{2} + (5^{110} - 109) \cdot 5^{110}$$

$$\frac{(5^{110} - 109)^2}{2}$$

$$-\frac{1}{4} + 5^{110} \cdot \frac{2205}{4} + 5^{220} - 110 \cdot 5^{110} + \frac{109^2 + 1^2}{2}$$

$$5^{220} - \left(\frac{110 + 2205}{4}\right) \cdot 5^{110} + \frac{(109^2 + 1^2) \cdot 2 - 4}{4}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(t-3)(t^2-10t+25) \leq 0$$

$$(t-3)(t-5)^2 \leq 0$$

$$t \in [\cancel{0}, 3] \cup \{5\}$$

$$3^{\sqrt{\log_3 x}} \in [\cancel{0}, 3] \cup \{5\}$$

$$\sqrt{\log_3 x} \in [\cancel{0}, 1] \cup \{\log_3 5\}$$

$$\log_3 x \in [0, 1] \cup \{\log_3^2 5\}$$

$$x \in [1, 3] \cup \{3^{\log_3^2 5}\} = \{5^{\log_3 5}\}$$

$$5^{110} - 1, 111$$

$$y \geq 110 + x - 5^{110}$$

$$y \leq \log_5 x$$

$$x > 0$$

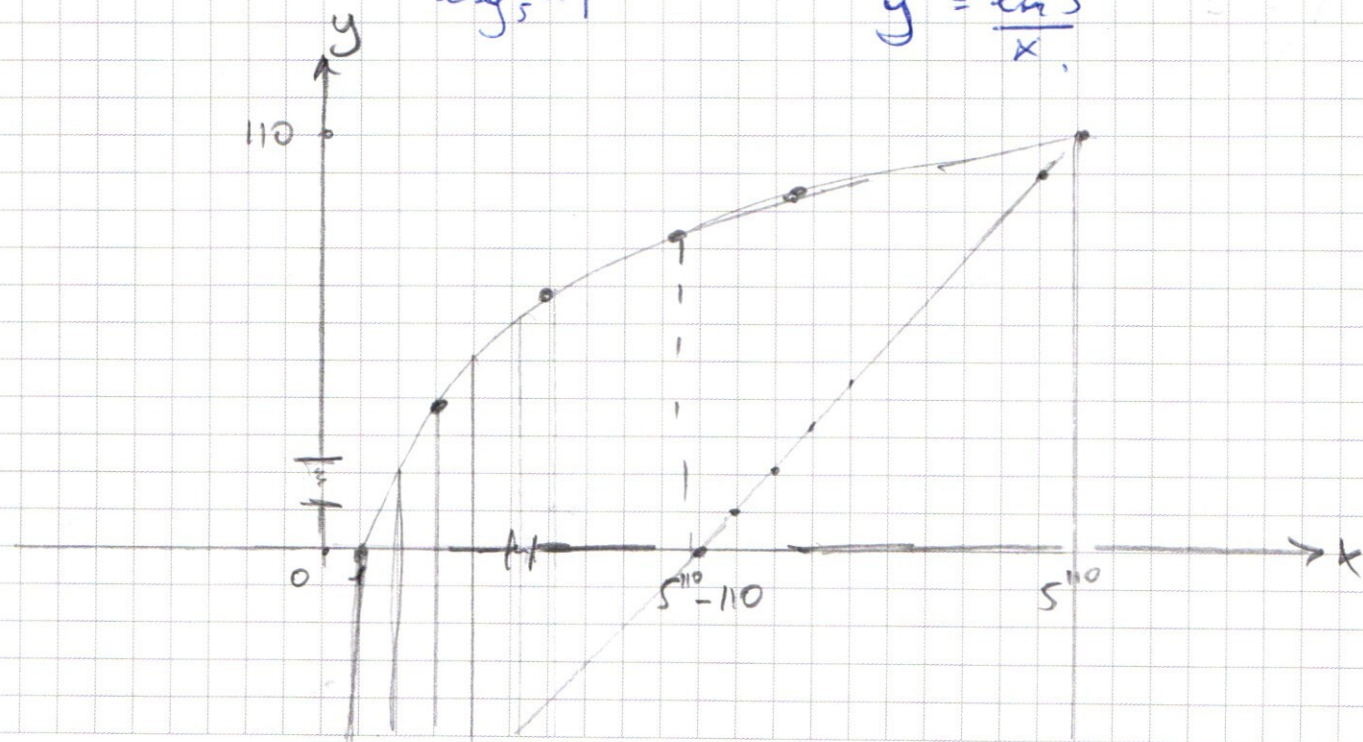
$$5^{110}, 110$$

$$x + 110 - 5^{110} \uparrow$$

$$\log_5 x \uparrow$$

$$y' = 1$$

$$y' = \frac{\ln 5}{x}$$



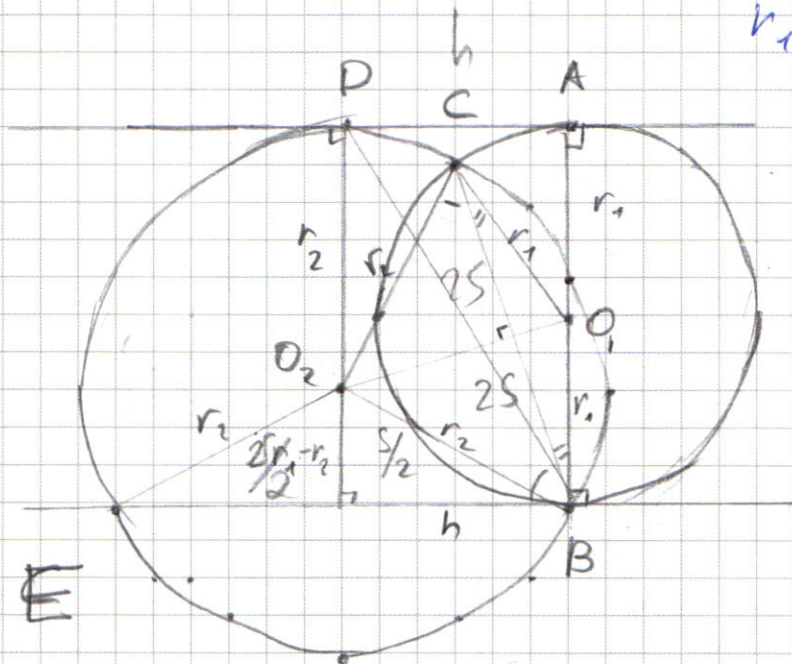
$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_1BE}} = 4$$

$$h^2 + 4r_1^2 = 16$$

$$4r_1^2 = 16$$

$$r_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$r_2 = \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{7}{4} = \sqrt{7}$$



$$h^2 + (2r_1 - r_2)^2 = \sqrt{r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2} =$$

$$\frac{r_1 \cdot h}{2} = \frac{(2r_1 - r_2) \cdot h}{2} \cdot 4$$

$$\frac{49}{16} r_1^2 - \frac{1}{16} r_1^2 = 3r_1^2$$

$$r_1 = 8r_1 - 4r_2$$

$$r_2 = \frac{7}{4} r_1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$p = \frac{\sum_{i=61}^{110} C_{110}^i}{2^{110}}$$

$$q = \frac{C_{110}^{49} \sum_{i=0}^{48} C_{110}^i}{2^{110} \sum_{i=0}^{48} 2^i}$$

$$n = \frac{4+38m}{10} = 3m + \frac{2+8m}{5}$$

$$2+4m = 5k =$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = -20a + 10$$

$$m = 5a + 2$$

$$= \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad n = 19a + 8$$

$$\frac{2C_{110}^{49} + C_{110}^{50} + \dots + C_{110}^{61}}{2^{110}}$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 4x}{\cos 5x - \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) = \frac{k-2}{4} = 4a$$

$$\frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos(9x + \frac{\pi}{4})}{\cos 10x} = -\sqrt{2} - 1$$

$$\cos(9x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - 10x)$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi - 10x + 2\pi n$$

$$19x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2}{19}\pi n$$

$$\alpha = \pm \beta + 2\pi n$$

$$\sin = \frac{5k-2}{4} = k + \frac{k-2}{4}$$

$$\frac{k-2}{4} = 4a$$

$$k = 4a + 2$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\alpha = \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$10x = \frac{30}{76}\pi + \frac{80}{76}\pi n$$

$$\sqrt[3]{\log_3 x} = \pm \sqrt[3]{\log_3 x}$$

$$x > 0$$

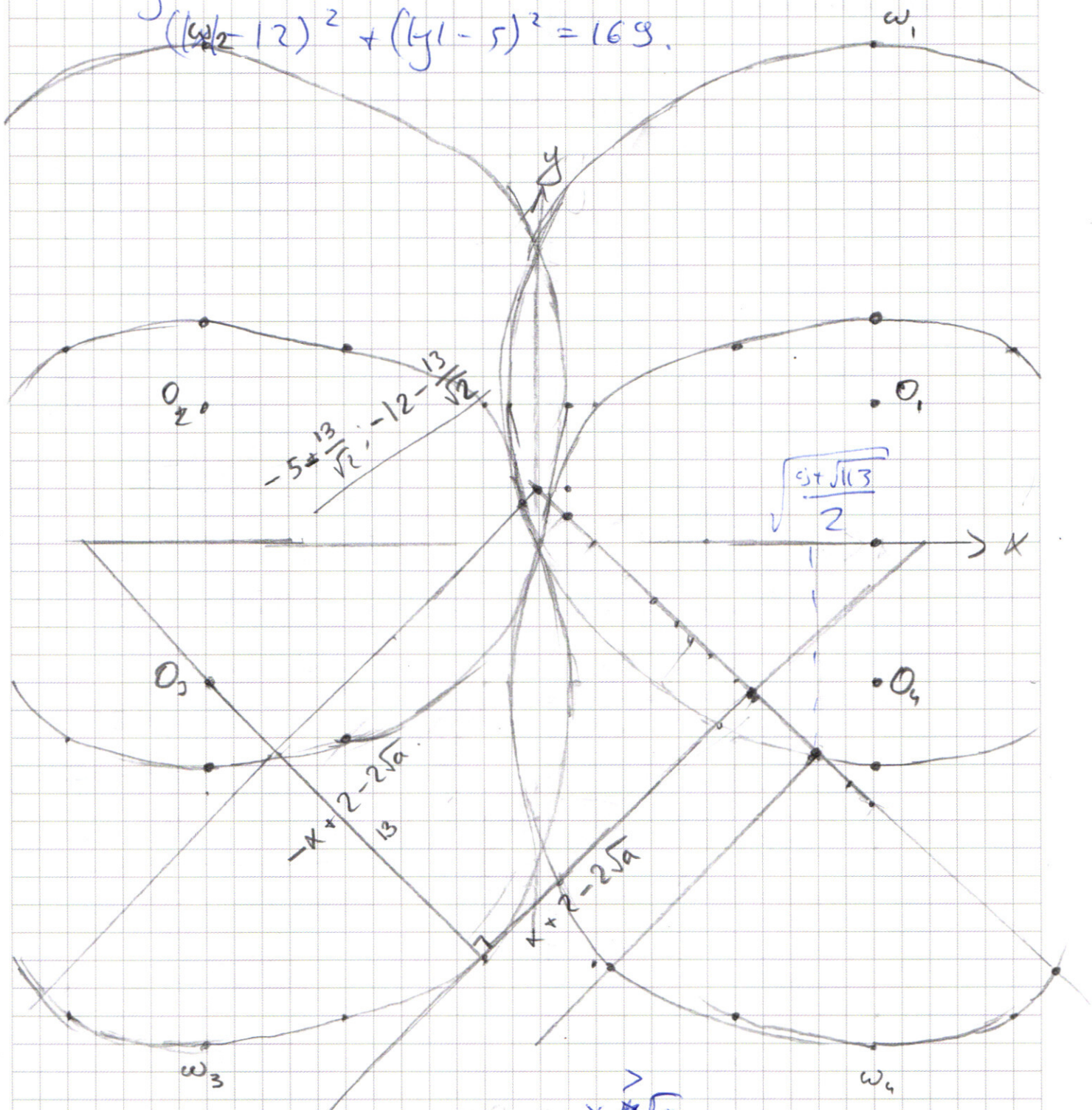
$$27\sqrt[3]{\log_3 x} - 13 \cdot 3^{\sqrt[3]{\log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt[3]{\log_3 x}} \leq 75$$

$$3^{3\sqrt[3]{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{\sqrt[3]{\log_3 x}} + 55 \cdot 3^{\sqrt[3]{\log_3 x}} - 75 \leq 0$$

$$t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leq 0$$

5. $y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}$.

$$9((4/2 - 12)^2 + (41 - 5)^2) = 169.$$



$A = 1$

$$x_3^2 - 29x_3 + 144 +$$

$$4x_3^2 + 6x_3 + 9 =$$

$$= 2x_3^2 - 18x_3 + 153$$

$$x \sqrt{a}$$

$$-x + \sqrt{a} + 2 - \sqrt{a} = 2 - x$$

$$x - \sqrt{a} + 2 - \sqrt{a} = x + 2 - 2\sqrt{a}$$