

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.

✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.

✓ 3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$.

✓ 4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

✓ 6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} BH^2 &= BO_2^2 - O_2H^2 = R^2 - (2r - R)^2 = R^2 - (4r^2 - 4rR + R^2) = \\ &= R^2 - 4r^2 + 4rR - R^2 = 4rR - 4r^2 = \\ &= 4r(R - r) \end{aligned}$$

$$R = \frac{2}{3}r$$

$$R = \frac{3}{2}r$$

4кл

$$= 4r \cdot \frac{1}{2}r = 2r^2$$

$$DH = 2r$$

$$DH^2 = 4r^2$$

3

$$4r^2 + 4r^2 = 4$$

$$r^4 + r^2 = 1$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t = r^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$rR \sin \alpha = 2R(2r - R) \sin \alpha$$

$$r = 4r - 2R$$

$$3r = 2R$$

$$\frac{1}{2} \cdot R(2r - R) \sin \alpha$$

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$

$$y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$$

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25$$

I. $x \geq 0$
 $y \geq 0$
 $(4; 3) R = 5$

II. $x < 0$
 $y \geq 0$

$(-4; 3) R = 5$

III. $x < 0$
 $y < 0$

$(-4; -3) R = 5$

$y = 0$

$x = 0$

$(|y| - 3)^2 = 9$
 $|y| - 3 = 3$
 $y = \pm 6$

IV. $x \geq 0$
 $y < 0$

$(4; -3), R = 5$

$R^2 = (2r - R)^2$

$(|x| - 4)^2 = 16$
 $|x| - 4 = 4$
 $|x| = 8$

$|y| - 3 = -3$
 $y = 0$
 $(\sqrt{a}; \sqrt{a} - 2)$

$f(x) = x - 2$

$\sqrt{a} - 2$
 $|x| - 4 = -4$
 $x = 0$

$y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$

$x \geq \sqrt{a}$

$y = x - 2$

$r \cdot R = R(2r - R)$

$r = 2r - R$

$r = R$

$x < \sqrt{a}$

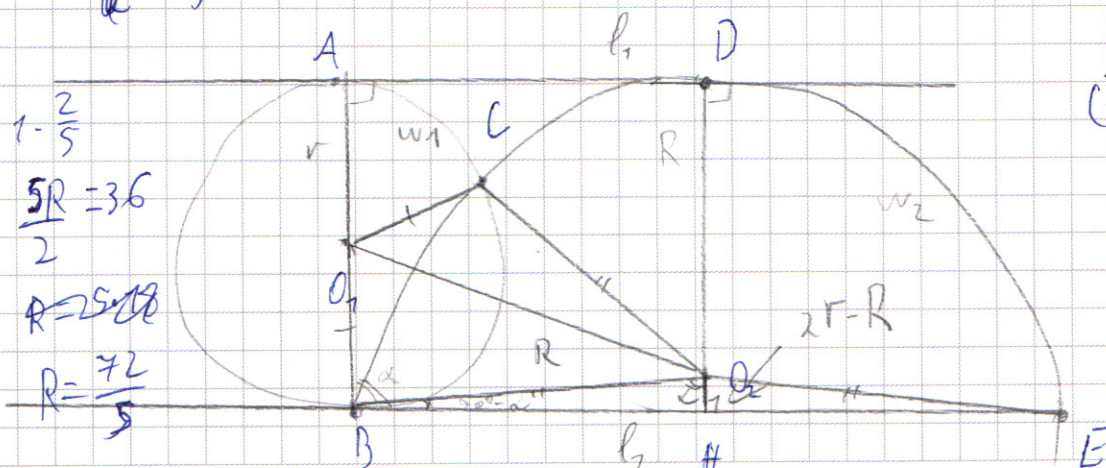
$y = -x + 2\sqrt{a} - 2$

$\frac{1}{2} \cdot r \cdot R \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R \cdot (2r - R) \cdot \sin \alpha$

$$\begin{array}{r} 649 \\ \times 49 \\ \hline 31701 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 7 \\ \hline 2391 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 4 \\ \hline 1372 \end{array}$$



$\left(\frac{7}{3}\right)^3 \cdot 36 =$
 $= \frac{7^3 \cdot 36}{9 \cdot 3} = \frac{7^3 \cdot 4}{3}$

$\frac{7372}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \pi - (\frac{\pi}{2} - 6x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 77 \\ \hline 72 \\ 72 \\ \hline 72 \\ 72 \\ \hline 72 \end{array}$$

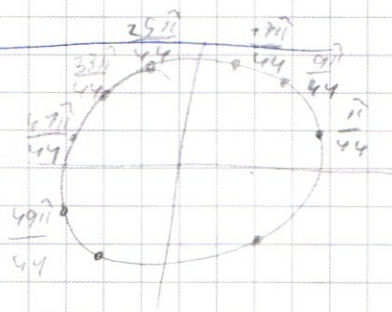
$$\begin{cases} 11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{44 \cdot 72}{4} = 792$$

$$\begin{array}{r} 44 \cdot 72 \\ 72 \cdot 72 \end{array}$$

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - 2\pi k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{77}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$6x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi k}{36}$$

$$\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{77} = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi k}{36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\pi + 24\pi k = 77\pi + 77\pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 24k = 77 + 77k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24k - 77k = 8$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{22}$$

$$I. -\frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi n}{6}$$

$$-3\pi + 24\pi k = \pi + 2\pi n$$

$$-3 + 24k = 1 + 2n$$

$$24k - 2n = 4$$

$$12k - n = 2$$

$$k = \frac{n+2}{12} \text{ при } n=70c$$

~~ка~~ ка

$$n = 12k - 2$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 6x + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

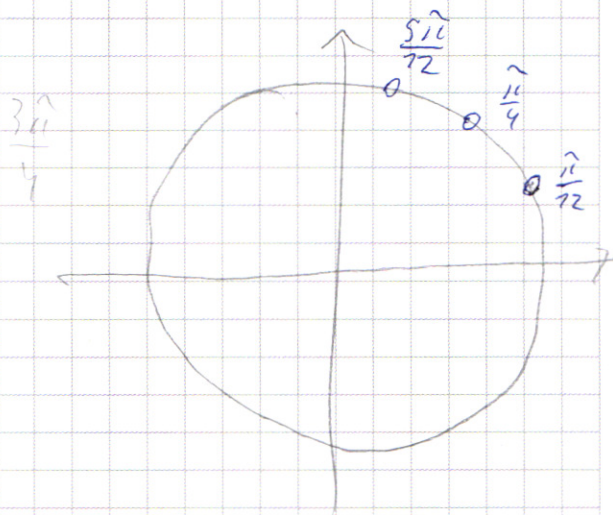
$$\frac{44 \cdot 12}{4} = 77 \cdot 12 = 44 \cdot 3$$

$$24k - 22n = 8$$

$$12k - 11n = 4$$

$$\cos 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi n}{6}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

v1

$$p \geq 55$$

$$q \leq 35$$

2^{90} комбинаций

$$p = C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \dots + C_{90}^{90}$$

$$C_n^k + C_n^{n-k}$$

$$q = C_{90}^0 + C_{90}^1 + \dots + C_{90}^{33} + C_{90}^{34}$$

$$n - (n - k) = k$$

$$C_n^k + C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{2n!}{k!(n-k)!}$$

$$p - q = (C_{90}^{90} - C_{90}^0) + (C_{90}^{89} - C_{90}^1) \neq \dots + (C_{90}^{55} - C_{90}^{35})$$

•

результат выпадает не четное 55 раз

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 8x(\cos 3x - \sin 3x) + \sin 8x(\cos 3x + \sin 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} =$$

$$= \frac{\overbrace{\cos 3x \cdot \cos 8x}^1 - \overbrace{\sin 3x \cdot \cos 8x}^2 + \overbrace{\sin 8x \cdot \cos 3x}^2 + \overbrace{\sin 3x \cdot \sin 8x}^1}{\cos 6x}$$

$$= \frac{(\cos 3x \cdot \cos 8x + \sin 3x \cdot \sin 8x) + (\sin 8x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 8x)}{\cos 6x} =$$

$$= \frac{\cos(3x - 8x) + \sin(8x - 3x)}{\cos 6x} =$$

$$= \frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x} = \frac{\sqrt{2} \sin(5x + \frac{\pi}{4})}{\cos 6x}$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\sin(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 6x}{\cos 6x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 6x \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases}$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - 6x))$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 6x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3 \sqrt{4 \log_3 x} + 40 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 48$$

$$x \sqrt{\log_3 x} = 3^{\log_3 x \sqrt{\log_3 x}} = 3^{\sqrt{\log_3 x \cdot \log_3 x}} =$$

$$= 3^{\sqrt{\frac{\log_3^2 x}{\log_3 x}}} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$$

~~0.5.11~~

$$t^3 - 8t^2 + 76t - 3t^2 + 24t - 48 =$$

~~= 2t~~

$$= t^3 - 11t^2 + 40t - 48$$

$$8 - 44 + 80 - 48 =$$

~~2.8.08~~

$$\log_3 x - \log_3 1$$

~~(x-1)~~

$$(x-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_3 x \geq 0 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underline{x \geq 1}$$

$$\begin{array}{r} 720 \\ + 27 \\ \hline 747 \\ 48 \\ + 99 \\ \hline 795 \end{array}$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48$$

$$(t-3)(t-4)^2$$

$$t=3$$

$$27 - 99 + 120 - 48 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 11t^2 + 40t - 48 & t-3 \\ \hline -(t^3 - 3t^2) & \\ \hline -8t^2 + 40t - 48 & \\ -(-8t^2 + 24t) & \\ \hline 16t - 48 & \\ -(16t - 48) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} = 3 \log_3 4 \quad \left(\frac{7}{3}\right)^3 \cdot 36 =$$

$$\log_3 x = \log_3^2 4 \quad \frac{PQ}{DS} = \frac{2}{5}$$

$$DS = \frac{9}{2} DQ = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\log_3 x - \log_3 3 \leq 0$$

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 32$$

$$x = 3^{\log_3^2 4} = 3^{\log_3 4 \cdot \log_3 4} = 4^{\log_3 4}$$

$$(x-3) \leq 0$$

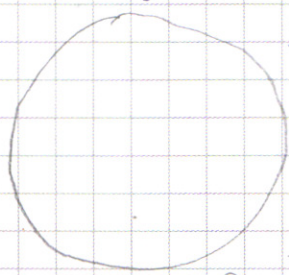
$$x \leq 3$$

$$\frac{r}{x+r} = \frac{2}{5}$$

$$5r = 2x + 2r$$

$$2x = 3r$$

$$x = \frac{3}{2}r$$



$$SQ = \frac{3 \cdot 72}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 36}{5}$$

$$S_{ADE} = 5$$

$$\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{27}}{5} = \arcsin \frac{2}{5}$$

$$\frac{S}{2} = 36$$

$$r = \frac{72}{5}$$

$$\frac{SD}{SK} = ?$$

$$SD = \frac{SD}{SD+DK} = \frac{7}{1+DK/SD}$$

$$\triangle SDQ = \triangle SFQ = \triangle SEQ \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q$ - центр описанной

окр. $\triangle DEF$

$$\frac{SQ}{SK} = \frac{SD}{SO}$$

$$\frac{27}{25}$$

$$\frac{4}{25}$$

$$= \frac{1}{7 + \frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{37}{5}} = \frac{5}{37}$$

$$\triangle DEF \sim \triangle KML$$

$$\frac{2}{\sqrt{27}}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\frac{27}{25}} - 1 = \frac{25}{27} - 1 = \frac{4}{27}$$

$$36 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{36 \cdot 7^3}{3 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 7^3}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Копеку подбрасывают 90 раз $\Rightarrow$ вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз, равна вероятности того, что решка выпадет не меньше 55 раз. $\Rightarrow$

p - вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз

q - вероятность того, что решка выпадет не меньше 55 раз

Вероятности выпадения орла и решки в каждой броске одинаковы $\Rightarrow$ вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, равна вероятности того, что решка выпадет не меньше 55 раз $\Rightarrow p = q \Rightarrow p - q = 0$

Ответ: 0

N2

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \frac{\cos 8x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 8x (\cos 3x + \sin 3x)}{(\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x)} = \sqrt{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \frac{\cos 3x \cdot \cos 8x - \sin 3x \cdot \cos 8x + \sin 8x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \sin 8x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos 3x \cdot \cos 8x + \sin 3x \cdot \sin 8x) + (\sin 8x \cdot \cos 3x - \cos 8x \cdot \sin 3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(3x-8x) + \sin(8x-3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 5x + \cos 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} \left(\sin(5x + \frac{\pi}{4}) \right)}{\cos 6x} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(5x + \frac{\pi}{4})}{\cos 6x} = 1 \quad \Leftrightarrow \frac{\sin(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 6x}{\cos 6x} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 6x \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 6x) \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \pi - (\frac{\pi}{2} - 6x) + 2\pi k \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{72} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x \neq \frac{\pi}{72} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$I. \quad \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi n}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 3\pi + 24\pi k = 11\pi + 22\pi n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 24k = 11 + 22n \quad \Leftrightarrow \quad 24k - 22n = 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12k - 11n = 4 \quad 12k - \text{чётно}, 4 - \text{чётно} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11n \text{ должно быть чётно} \Rightarrow n = 0 \Rightarrow 12k - 11n = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12k = 4 \quad \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow k \notin \mathbb{Z} \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Серии не пересекаются.

$$\text{II. } -\frac{\widehat{11}}{4} + 2\widehat{11}k = \frac{\widehat{11}}{72} + \frac{\widehat{11}k^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\widehat{11} + 24\widehat{11}k = \widehat{11} + 2\widehat{11}k \Leftrightarrow -3 + 24k = 1 + 2k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k = 24k - 4 \Leftrightarrow k = 72k - 2 \Rightarrow \text{для любого}$$

 k найдётся такое n , что $-\frac{\widehat{11}}{4} + 2\widehat{11}k = \frac{\widehat{11}}{72} + \frac{\widehat{11}n}{6} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ серия $x = -\frac{\widehat{11}}{4} + 2\widehat{11}k$ входит в серию

$$x = \frac{\widehat{11}}{72} + \frac{\widehat{11}n}{6}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = \frac{\widehat{11}}{44} + \frac{2\widehat{11}k}{77}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\widehat{11}}{4} + 2\widehat{11}k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\widehat{11}}{44} + \frac{2\widehat{11}k}{77}, k \in \mathbb{Z}$$
$$x \neq \frac{\widehat{11}}{72} + \frac{\widehat{11}n}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\widehat{11}}{44} + \frac{2\widehat{11}k}{77}, k \in \mathbb{Z}.$

$$27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{\sqrt{4 \log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_3 3}} \leq 48$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_3 x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x > 1}$$

$$x^{\sqrt{\log_3 3}} = 3^{\log_3 x \cdot \sqrt{\log_3 3}} = 3^{\sqrt{\log_3^2 x \cdot \log_3 3}} = 3^{\sqrt{\frac{\log_3^2 x}{\log_3 3}}} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно:

$$3^{3\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 40 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 48$$

Введём замену $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}} > 1$

Тогда неравенство примет вид:

$$t^3 - 11t^2 + 40t \leq 48$$

Заметим, что $t=3$ является корнем многочлена

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48.$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 11t^2 + 40t - 48 & t-3 \\ - (t^3 - 3t^2) & \\ \hline -8t^2 + 40t - 48 & \\ - (-8t^2 + 24t) & \\ \hline 16t - 48 & \\ - (16t - 48) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

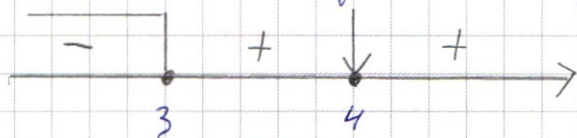
$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 = (t-3)(t^2 - 8t + 16) = (t-3)(t-4)^2$$

Следовательно,

$$t^3 - 11t^2 + 40t \leq 48 \Leftrightarrow (t-3)(t-4)^2 \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решим методом интервалов:



$$(t-3)(t-4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 3] \cup \{4\}.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям,
исходное неравенство равносильно

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3 \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_3 x} \leq 1 \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 4 \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \log_3 x \leq 1 \\ \log_3 x = \log_3^2 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 3^{\log_3^2 4} \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 4^{\log_3 4} \end{cases} \quad \log_3 4 > 1 \Rightarrow 4^{\log_3 4} > 4$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x = 4^{\log_3 4} \end{cases} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x \in [1; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}.$$

Ответ: $x \in [1; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}.$

N 4

Обозначим точку сферы, симметричную к
точке S, за Q, точки пересечения плоскости,
проходящей через эту точку касательно к
сфере, с ребрами SA, SB, SC за D, E, F
соответственно.

Обозначим точку пересечения сферы и OS за G . Предположим, что G и Q не совпадают:

Рассмотрим $\triangle SQO$

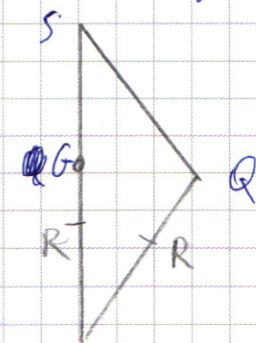
$OG = OQ$ (как радиусы сферы)

$SG > SQ \Rightarrow SG + R > SQ + R \Rightarrow$

$\Rightarrow SO > SQ + QO$, что противоречит

неравенству треугольника, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ предположение неверно, и точка Q является точкой пересечения SO со сферой.



$SK = SM = SL$ (как касательные к сфере)

$OK = OM = OL = OQ = R$ (R - радиус сферы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle SKO = \triangle SMO = \triangle SLO$ (по трём сторонам) $\Rightarrow \angle DSQ = \angle FSQ = \angle ESQ$

$DQ \perp SO, QF \perp SO, EQ \perp SO$ (т.к.

$SO \perp (DEF)$) $\Rightarrow \triangle SQD = \triangle SQF = \triangle SQE$ А

(по двум углам и стороне между ними) $\Rightarrow SD = SF = SE \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle SFD \sim \triangle SMK, \triangle SFE \sim \triangle SML, \triangle SED \sim \triangle SLK \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DFE \sim \triangle KML$ с коэффициентом, равным $\frac{SD}{SK}$.

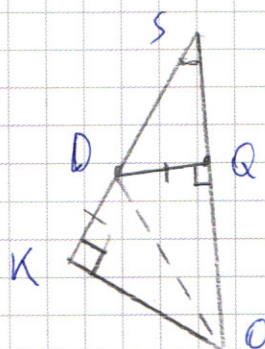
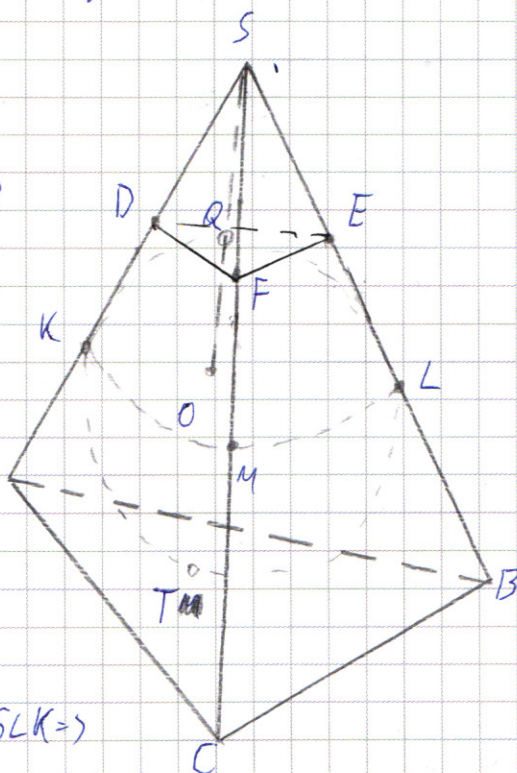
Рассмотрим $\triangle SKO$:

$OK \perp KS$ (как радиус и касательной)

$QO = KO = R, DO$ - общая $\Rightarrow \triangle DQO = \triangle DKO$

(по катету и гипотенузе) $\Rightarrow DQ = DK$.

Из пр / пр $\triangle SQD$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{DQ}{SD} = \sin \angle QSD = \sin \angle KSO = \sin(\arccos \frac{\sqrt{21}}{5}) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{SD}{SK} = \frac{SD}{SD+DK} = \frac{1}{1+DK/SD} = \frac{1}{1+\frac{DQ}{SD}} = \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{7}$$

$\Rightarrow \triangle DFE \sim \triangle KML$ с коэффициентом, равным $\frac{5}{7}$

$$\frac{S_{\triangle DFE}}{S_{\triangle KML}} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 \Rightarrow \underline{S_{\triangle KML}} = S_{\triangle DFE} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = 5 \cdot \frac{49}{25} = \underline{\underline{\frac{49}{5}}}$$

д) $SO=36$, $(KLM) \parallel (ABC)$; $V_{SABC}=?$.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle SFD \sim \triangle SMK, \Rightarrow FD \parallel MK \\ \triangle SFE \sim \triangle SML \Rightarrow FE \parallel ML \end{array} \right\} \begin{array}{l} (DFE) \parallel (KML) \Rightarrow (DFE) \parallel (ABC) \\ (KLM) \parallel (ABC) \end{array}$$

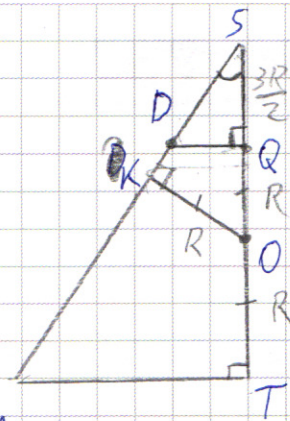
$SO \perp (DFE) \Rightarrow SO \perp (ABC)$ Пусть точка касания
сферы и $(ABC) - T \Rightarrow OT \perp (ABC)$, но $SO \perp (ABC) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \underline{\triangle ABO}$ T лежит на прямой SO .

$DF \parallel AC$, $FE \parallel BC$, $DE \parallel AB$ (каждая из прямых пересечения
плоскостей с двумя параллельными $\Rightarrow \triangle SFD \sim \triangle SCA$,
 $\triangle SEF \sim \triangle SBC$, $\triangle SED \sim \triangle SBA \Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$ с
коэффициентом, равным $\frac{SD}{SA}$. Рассмотрим $\triangle AST$:
 $ST \perp AT$ ($ST \perp (ABC)$)

$$U_3 \text{ мс/с} \approx 500 \quad \frac{KO}{OS} = \sin \angle KSO = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OS = KO / \frac{2}{5} = \frac{5R}{2}$$

$$SQ = OS - OQ = \frac{5R}{2} - R = \frac{3R}{2}$$



$$\triangle SQD \sim \triangle STA \text{ (по двум углам) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{SQ}{ST} = \frac{\frac{3R}{2}}{(2R + \frac{3R}{2})} = \frac{\frac{3R}{2}}{\frac{7R}{2}} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC \text{ с коэффициентом, равным } \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \cdot S_{DEF} = \frac{49}{9} \cdot 5 = \frac{245}{9}$$

$$SO = 36 \Rightarrow \frac{3R}{2} + R = 36 \Rightarrow \frac{5R}{2} = 36 \Rightarrow R = \frac{72}{5}$$

$$ST - \text{высота } \triangle ABC, \quad ST = \frac{7R}{2} = \frac{7 \cdot \frac{72}{5}}{2} = \frac{7 \cdot 36}{5}$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} ST \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 36}{5} \cdot \frac{245}{9} = \frac{49 \cdot 4}{3} = \frac{196}{3}$$

Ответ: а) $\frac{49}{5}$;

б) $\frac{1372}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(по камню и высоте) $\Rightarrow \int_{O_2 H B} = \int_{O_2 H E} = \frac{1}{2} \int_{O_2 B F} \Rightarrow$

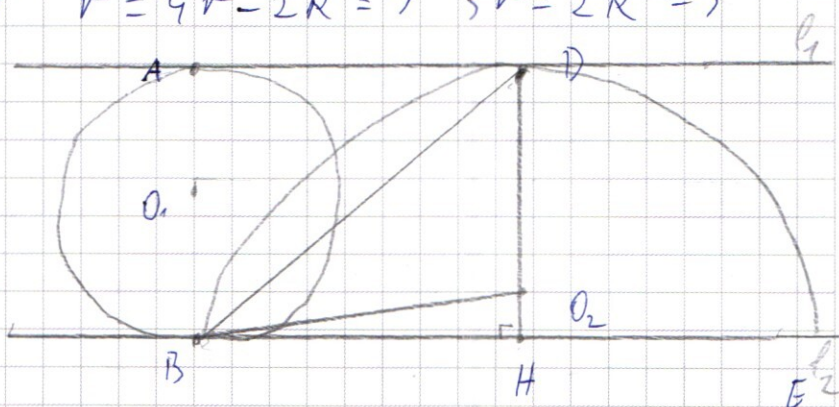
$$\Rightarrow S_{O_2BE} = 2 S_{O_2HB} = R(2r - R) \cdot \sin \alpha$$

π_0 yucukso $\frac{\int_{\text{BO}_2\text{CO}_2}}{\int_{\text{O}_2\text{BE}}} = 2 \Rightarrow \int_{\text{BO}_2\text{CO}_2} = 2 \int_{\text{O}_2\text{BE}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r \underline{R \sin \alpha} = 2 \underline{R} (2r - R) \underline{\sin \alpha} \quad \times \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 2(2r - R) \Rightarrow r = 4r - 2R \Rightarrow 3r = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$



8) BID = 2

Уз нр / yr $\approx 0.2 \text{ HB}$

$$BH^2 = BO_2^2 - O_2H^2 = R^2 - (2r-R)^2 = R^2 - (4r^2 - 4rR + R^2) = R^2 - 4r^2 + 4rR - R^2 = 4rR - 4r^2 = 4r(R-r)$$

$$R = \frac{3}{2}r \Rightarrow \underline{BH^2 = 4r \left(\frac{3}{2}r - r \right) = 4r \cdot \frac{1}{2}r = 2r^2}$$

U_2 ур/ур ± ДНВ

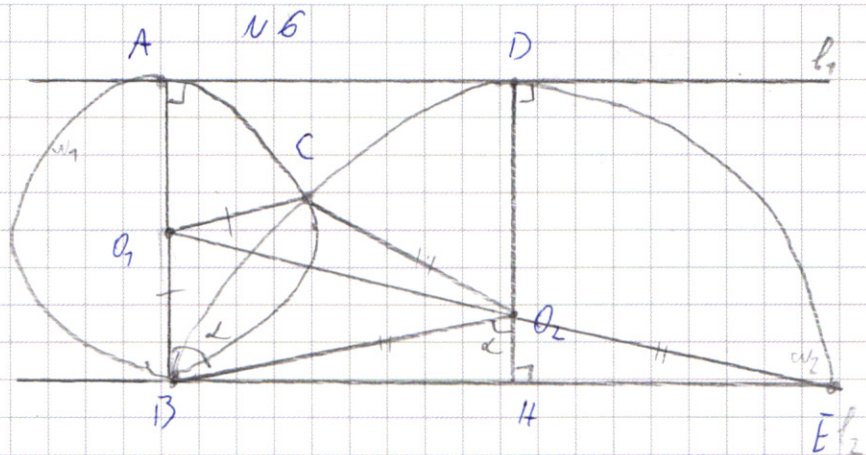
$$DH^2 + BH^2 = BD^2 = 4$$

~~$$DH^2 = Q^2 \pm \frac{g^2}{4}$$~~

$$\underline{DH^2 = (2r)^2 = 4r^2}$$

$$4r^2 + 2r^2 = 4 \Leftrightarrow 6r^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$R = \frac{3}{2}v = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Обозначим радиус w_1 за r , радиус w_2 за R

Продолжим DO_2 за O_2 до пересечения с l_2 в точке H .

$O_2D \perp l_1$ (как радиус и касательной), $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_2D \perp l_2$

$O_1A \perp l_1$, $O_1B \perp l_2$ (как радиусы и касательной),
 $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow O_1 \in AB$, $AB \perp l_1$, $AB \perp l_2$. $AD \parallel BH$, $AB \perp l_1$, $DH \perp l_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AB \parallel DH \Rightarrow ADHB$ - параллелограмм $\Rightarrow DH = AB = 2r$

$$\underline{O_2H = DH - DO_2 = DH - R = 2r - R}$$

$$\left. \begin{array}{l} O_1C = O_1B = r \\ O_2C = O_2B = R \\ O_1O_2 - \text{общая ст.} \end{array} \right\} \Rightarrow O_1CO_2 = \triangle O_1BO_2 \text{ (по трём сторонам)} \\ \Rightarrow S_{O_1O_2B} - S_{O_1CO_2} = \frac{1}{2} S_{BO_1CO_2}$$

Обозначим $\angle O_2BO_1 = \alpha$, тогда $S_{O_1O_2B} = \frac{1}{2} \cdot O_1B \cdot O_2B \cdot \sin \alpha =$
 $= \frac{1}{2} r R \sin \alpha \Rightarrow \underline{S_{BO_1CO_2} = r R \sin \alpha}$

~~$\angle ABH = 90^\circ$~~ $AB \parallel DH \Rightarrow \angle BO_2H = \angle ABO_2$ (как α/α) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BO_2H = \alpha$

$$S_{\triangle O_2HB} = \frac{1}{2} O_2B \cdot O_2H \cdot \sin \angle BO_2H = \frac{1}{2} \cdot R(2r - R) \cdot \sin \alpha$$

$O_2B = O_2E = R$, O_2H - общая, $\angle O_2HD = \angle O_2HE = 90^\circ \Rightarrow \triangle O_2HB = \triangle O_2HE$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) $3:2$;

б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ и $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (w_2 и w_1 соответственно)

N 5

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

Второе уравнение системы задаёт:

I. $x \geq 0, y \geq 0$ окр. с центром $(4; 3)$

II. $x < 0, y \geq 0$ окр. с центром $(-4; 3)$

III. $x < 0, y < 0$ окр. с центром $(-4; -3)$

IV. $x \geq 0, y < 0$ окр. с центром $(4; -3)$

Радиус этих окружностей равен 5.

Первое уравнение задаёт „галку“ с вершиной $(\sqrt{a}; \sqrt{a} - 2)$ при $x \geq \sqrt{a}: y = x - 2$

при $x < \sqrt{a}: y = -x + 2\sqrt{a} - 2$

Найдём a , при котором $y = -x + 2\sqrt{a} - 2$ касается

~~Обозначим $t = \sqrt{a} \geq 0$~~

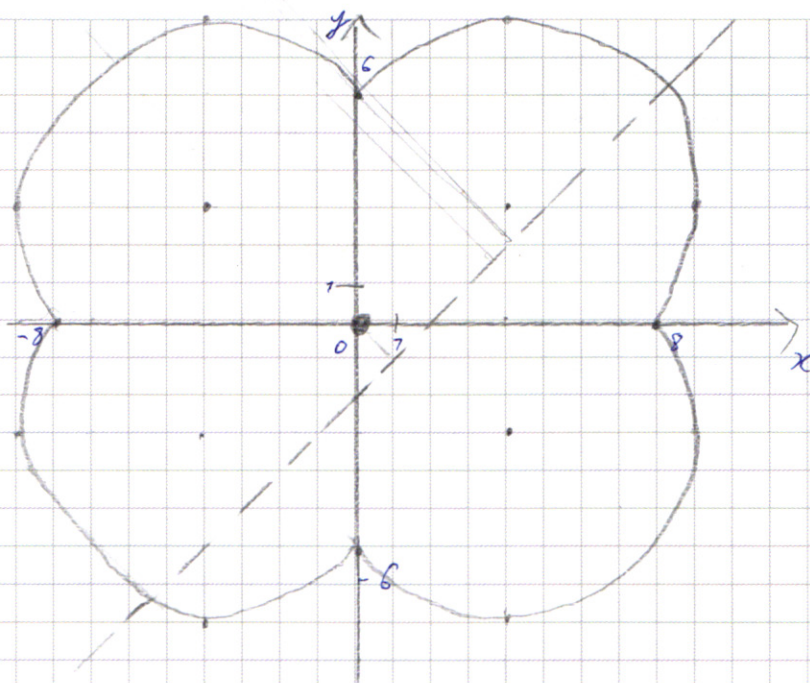
окружности с центром $(-4; 3)$ и $R = 5$.

Уравнение окружности:

~~$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$~~

Обозначим $t = 2\sqrt{a} - 2$

~~$$(x + 4)^2 + (-x + 2\sqrt{a} - 3)^2 = 25$$~~



$$(x+4)^2 + (t-x)^2 = 25$$

$$\underline{x^2} + 8x + \underline{16} + t^2 - 2tx + \underline{x^2} = \underline{25}$$

$$2x^2 + (8+2t)x + (t^2-9) = 0$$

$$D = 64 + 32t + 4t^2 - 8t^2 + 72 = -4t^2 + 32t + 136 =$$

$$= 4(t^2 - 8t - 34) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t - 34 = 0$$

$$D = 64 + 736 = 800$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{800}}{2} = 4 \pm 10\sqrt{2} \quad t > 0 \Rightarrow t = 4 + 10\sqrt{2}$$

☒ Путь мая — $x + 2\sqrt{9}$