

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \quad 27^{\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{\sqrt{4 \log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leq 75$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases} \quad x \in (1; +\infty)$$

$$27^{\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 55 \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}} \leq 75$$

Замена:

$$t = \sqrt{\log_3 x}; \quad t^2 = \log_3 x; \quad x = 3^{t^2}; \quad t > 0$$

$$27^t - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot \left(3^{t^2}\right)^{\frac{1}{t}} - 75 \leq 0$$

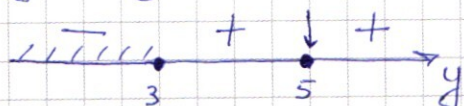
$$\left(3^t\right)^3 - 13 \cdot \left(3^t\right)^2 + 55 \cdot 3^t - 75 \leq 0$$

Замена: $3^t = y; \quad y > 1$

$$y^3 - 13y^2 + 55y - 75 \leq 0;$$

$$(y-3)(y^2 - 10y + 25) \leq 0;$$

$$(y-3)(y-5)^2 \leq 0;$$



$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Обр. замена

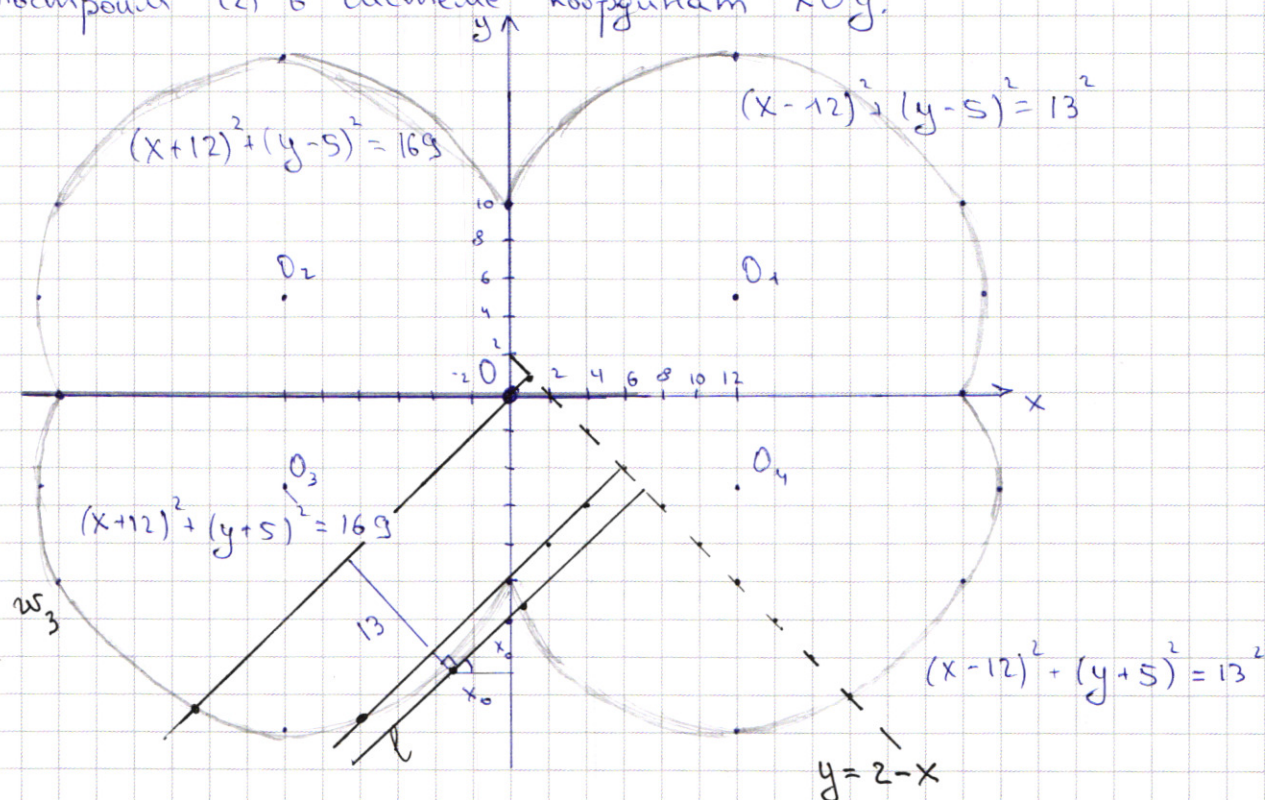
$$\begin{cases} 3^t \leq 3; \\ 3^t = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 1; \\ t = \log_3 5; \end{cases}$$

Обр. замена $\begin{cases} \sqrt{\log_3 x} \leq 1; \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 x \leq 1; \\ \log_3 x = \log_3^2 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 5^{\log_3 5} \end{cases}$

С учётом ОДЗ Ответ: $x \in (1; 3] \cup \{5^{\log_3 5}\}$

$$5. \begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a} & (1) \\ ((x-12)^2 + (y-5)^2 = 169 & (2) \end{cases}$$

Построим (2) в системе координат xOy :



$y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}$ — подвижная галочка с прямыми вниз, её вершина движется по прямой $y = 2 - x$ при неотрицательных x и находится в точке $(\sqrt{a}; 2 - \sqrt{a})$.

Рассмотрим положения данной галочки при которых она будет иметь 3 пересечения с (2):

а) Проходит левая ветвь через точку $(0; 0)$

$$0 = -|- \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}; \quad \sqrt{a} = 1 \quad a = 1$$

б) левая ветвь проходит через точку $(0; -10)$

$$-10 = -|- \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}; \quad \sqrt{a} = 6 \quad a = 36$$

в) левая ветвь касается окружности ω_3

Прямая l задаётся уравнением $x - y - 2\sqrt{a} = 0$

$$\rho(O_3; l) = \frac{|-12 + 5 - 2\sqrt{a}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 13 \quad \text{— расстояние от точки } O_3 \text{ до прямой } l.$$

$$|-5 - 2\sqrt{a}| = 13\sqrt{2}; \quad 2\sqrt{a} = 13\sqrt{2} - 5; \quad 4a = 338 + 25 - 130\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = \frac{363}{4} - \frac{130\sqrt{2}}{4} = 80,75 - 32,5\sqrt{2}$$

Ответ: $a=1$; $a=36$; $a = \frac{363}{4} - \frac{130\sqrt{2}}{4}$. $a = 80,75 - 32,5\sqrt{2}$.

$$2. \frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

ОДЗ: $\sin 5x \neq \pm \cos 5x$
 $\cos 10x \neq 0$

$$\frac{\cos 14x \cdot \cos 5x + \cos 14x \cdot \sin 5x - \sin 14x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \sin 14x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{(\cos 14x \cos 5x + \sin 14x \sin 5x) - (\sin 14x \cos 5x - \cos 14x \sin 5x)}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos(14x - 5x) - \sin(14x - 5x) = -\sqrt{2} \cdot \cos 10x \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 9x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 9x = -\cos 10x$$

$$\cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \cos 10x = 0$$

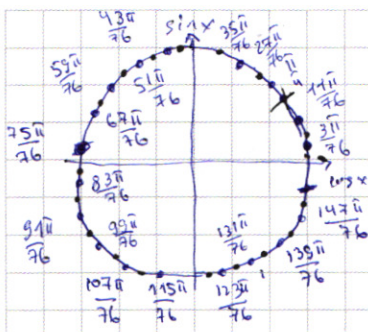
$$2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4} + 10x}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4} - 10x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{19x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{\frac{\pi}{4} - x}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \frac{19x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{19x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

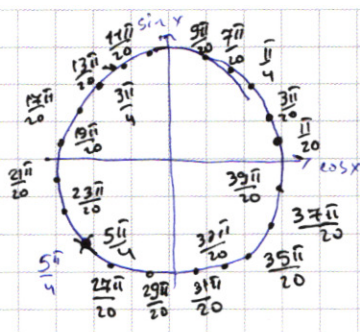
$$\begin{cases} 19x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{16} + \frac{2\pi n}{19}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Разберёмся с ОДЗ: $\cos 10x \neq 0$; $10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$

$$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{10}, m \in \mathbb{Z}.$$



$$x = \frac{3\pi + 8\pi n}{76}, n \in \mathbb{Z}$$



$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi + 2\pi m}{20}, m \in \mathbb{Z}$$

083-гёрным цветом

$$n \neq 2 + 19d, d \in \mathbb{Z}$$

нет решений.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi n}{19}$, где $n \neq 2 + 19d$; $d \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{Z}$.

1. $p = \text{орёл выпадет} \geq 61$

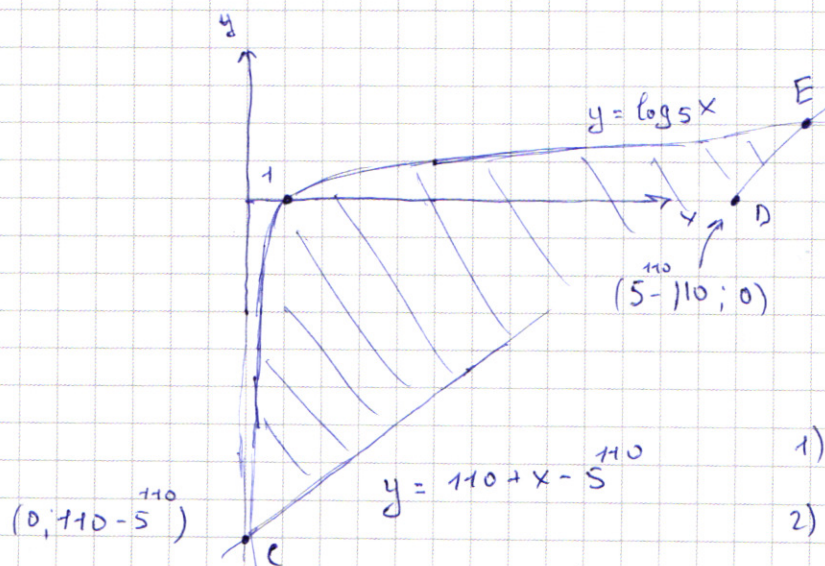
$q = \text{орёл выпадет} < 49$

Но q равнозначно тому, что решка выпадет $\geq (110 - 49) = 61$ раз. Отсюда следует, что вероятности p и q равны, тогда $p - q = 0$.

Ответ: 0.

$$7. \begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110} \\ y \leq \log_5 x \end{cases}$$

Схематично изобразим в системе xOy :



Подходят точки с целочисленными коорд., лежащие в заштрихованной области.

Разобьём её на 2 части:

- 1) под осью Ox
- 2) над осью Ox

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Для начала найдем точки C и D пересечения прямой с осями координат:

$$C: x = 0 \Rightarrow y = 110 - 5^{110}, \quad C(0; 110 - 5^{110})$$

$$D: y = 0 \Rightarrow x = 5^{110} - 110, \quad D(5^{110} - 110; 0)$$

Заметим, что в промежутке $x \in (0; 1)$ нет целочисленных решений системы. В силу того, что при данных x $y = \log_5 x$ не принимает целочисленные значения (например, $(10; 2)$). Тогда целочисленные решения находятся при $x \in [1; 5^{110} - 110]$.

При $x = 5^{110} - 110$ одно цел. решение $(5^{110} - 110; 0)$.

При $x = 5^{110} - 111$ два цел. решения $(5^{110} - 111; 0)$ и $(5^{110} - 111; 1)$.

При $x = 1$ $5^{110} - 110$ цел. решение.

Вообще для $x \in [1; 5^{110} - 110]$ при $x = x_0$ существует $(5^{110} - 110 - x_0 + 1)$ решений

Тогда всего решений в первой области найдём как сумму арифметической прогрессии, где первый член = 1, последний член = $5^{110} - 110$, а всего $5^{110} - 110$ членов прогрессии.

$$S_1 = \frac{1 + 5^{110} - 110}{2} \cdot (5^{110} - 110)$$

2) Для начала найдём точку E пересечения графиков функции $y = \log_5 x$ и $y = 110 + x - 5^{110}$

$$110 + x - 5^{110} = \log_5 x. \quad \text{Заметим, что } x = 5^{110} \text{ — решение}$$

$$110 + 5^{110} - 5^{110} = \log_5 5^{110}; \quad 110 = 110. \quad \text{Других решений при } x > 1 \text{ нет.}$$

Тогда точка E имеет координаты $(5^{110}; 110)$.

Ось Ox уже была посчитана, поэтому при дальнейших расчётах не будем учитывать точки с целочисленными координатами $(x_0; 0)$

Итак, при $x \in [1; 5)$ нет целочисленных решений.

При $x \in [5; 25)$ по ^{цел.} 1 решению для каждого x .

При $x \in [25; 125)$ по 2 решения цел. для каждого x

...

При $x \in [5^n; 5^{n+1})$ по n решений цел. для каждого x

Тогда всего существует

$$S_2 = 20 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + \dots + 4 \cdot 5^n \cdot n \text{ решений, где } n = 110$$

$$S_2 = 4(5 + 50 + \dots + 5^{110} \cdot 110)$$

Но выполним про $x \in (5^{110} - 110; 5^{110}]$. При них некоторые решения из S_2 не подойдут, т.к. они будут находиться под прямой и не будут удовлетворять системе неравенств.

При $x = 5^{110} - 110 + 1$ таких решений нет

При $x = 5^{110} - 110 + 2$ одно такое решение

...

При $x = 5^{110} - 110 + a$ $(a-1)$ таких решений

Тогда на отрезке $x \in (5^{110} - 110; 5^{110}]$ было посчитано неверных решений:

$$S_3 = \frac{1 + 109}{2} \cdot 109 = 5995$$

Тогда всего решений, уд. исходной системе неравенств:

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = \frac{(1 + 5^{110} - 110)}{2} \cdot (5^{110} - 110) + 4(5 + 50 + \dots + 5^{110} \cdot 110) - 5995$$

$$\text{Ответ: } \frac{(1 + 5^{110} - 110)}{2} \cdot (5^{110} - 110) + 4(5 + 50 + \dots + 5^{110} \cdot 110) - 5995.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

35 5/6 (всего)

$$y = -1x - \frac{135-5}{2} + 2 = \frac{135-5}{2} - 1x - 2$$

$$3: 27 - 117 - 75 + 165 = 192 - 192$$

$$y^3 - 3y^2 - 10y^2 + 30y + 25y - 75 \vee$$

$$\log_3 x = \log_3 5$$

$$x = 3^{\log_3 5 \cdot \log_3 5} = 5^{\log_3 5} = 5^{\frac{1}{\log_5 3}}$$

$p \geq 61$; $q < 49$. p — орёл выпадет не меньше 61 раза

$$\begin{array}{r} 110 \\ - 49 \\ \hline 61 \end{array}$$

q — решка выпадет не меньше 61 раза

$$\cos 14x = \cos(10x + 4x) = \cos 10x \cos 4x - \sin 10x \sin 4x$$

$$\dots (\cos 10x) -$$

$$\cos \alpha (\cos \beta + \sin \beta) - \sin \alpha (\cos \beta - \sin \beta) =$$

$$\cos 5x - \sin 5x$$

$$= \cos \beta (\cos \alpha - \sin \alpha) + \sin \beta (\cos \alpha - \sin \alpha) =$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos 5x = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\beta$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin 5x =$$

$$\cos 5x - \sin 5x = \sin(5x + \frac{\pi}{2}) - \sin 5x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \cos 5x + \cos(5x + \frac{\pi}{2}) = 2 \cos(5x + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 14x - \sin 14x = 2 \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 14x - \cos 14x = -2 \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos \cos 14x + (\sin(-14x)) = \cos 14x + \cos(\frac{\pi}{2} + 14x) = \cos 14x - \sin 14x =$$

$$= 2 \cos(14x + \frac{\pi}{4}) \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(14x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 14x - \sin 14x = 2 \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 2(\cos 5x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 5x \sin \frac{\pi}{4})$$

$$14x = 2 \quad 5x = \beta$$

$$\cos \beta (\cos \alpha - \sin \alpha) + \sin \beta (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta - \sin \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta + \sin \beta} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos \alpha (\cos \beta + \sin \beta) - \sin \alpha (\cos \beta - \sin \beta)}{\cos 2\beta} = -\sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

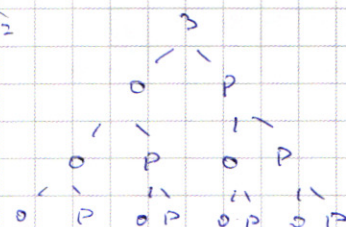
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$\sin$$



4 op. bom. ne < 2 p.

$$\frac{3\pi + 8\pi n}{76} + \frac{\pi + 2\pi m}{20}$$

$$\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 5x - \sin 5x = \sin(5x + \frac{\pi}{2}) - \sin 5x = \sin \frac{\pi}{4} \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \cos 5x + \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \cos 5x \sin 14x + \sin 5x \sin 14x$$

$$\cos(14x - 5x) = \cos 9x$$

$$\sin(5x - 14x) = \sin(-9x)$$

$$\cos 9x - \sin 9x = -\sqrt{2} \cdot \cos 10x \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x = -\cos 10x$$

$$\cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \cos 10x = 0$$

$$\frac{3\pi + 8\pi n}{76}$$

$$\frac{3\pi}{76} \cdot \frac{11\pi}{76} \cdot \frac{19\pi}{76} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{27\pi}{76} \cdot 3 \quad m \neq 2 + 19K$$

$$\frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi m}{19} \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{10} \quad | \cdot 20 \cdot 76$$

$$60\pi + 160\pi m \neq 76\pi + 152\pi m$$

$$m \neq \frac{160\pi + 152\pi m}{160} \neq \frac{1}{10} + \frac{19}{20} m \neq \frac{2 + 19m}{20}$$

$$m \neq 2$$

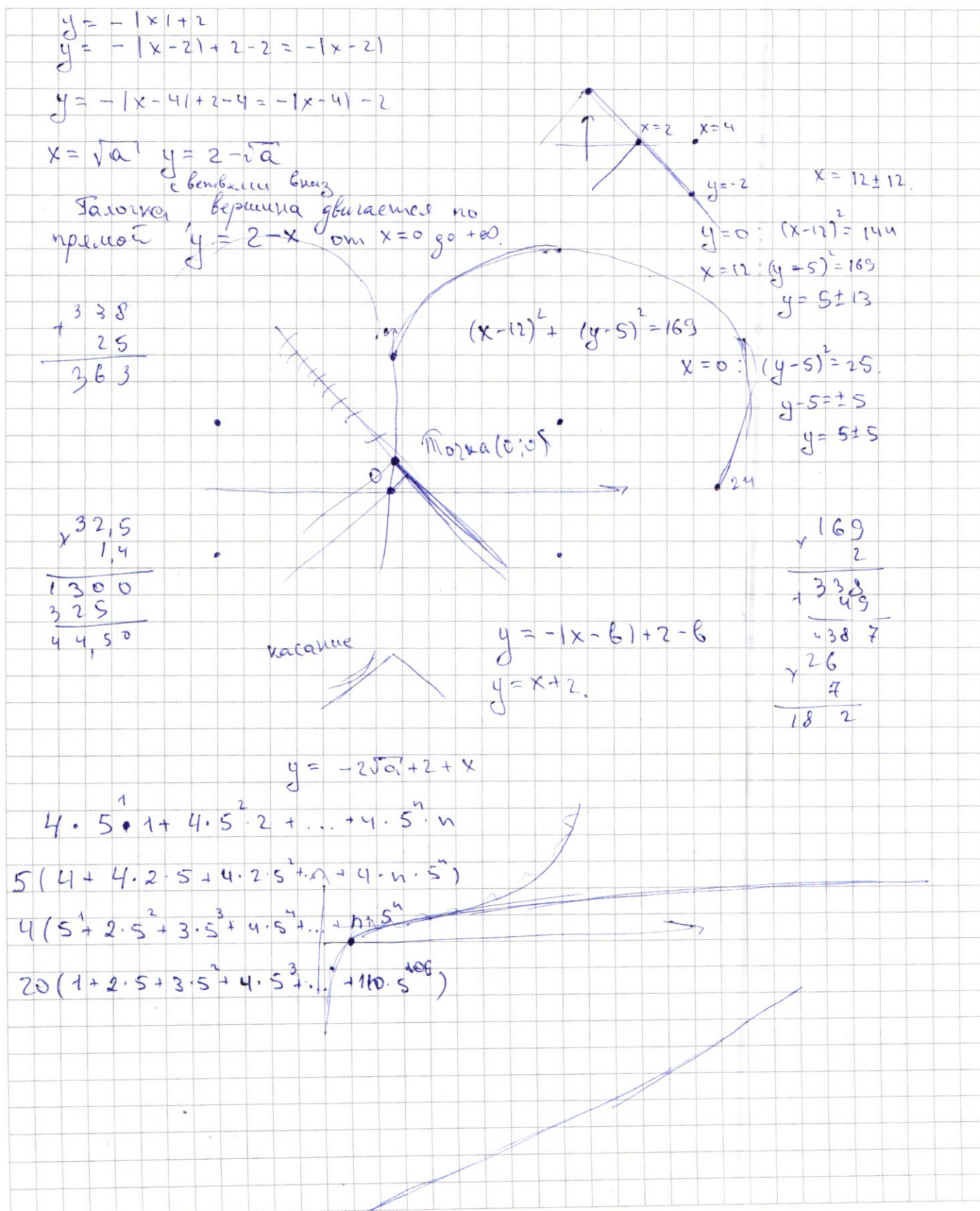
$$19m + 2 = 20K$$

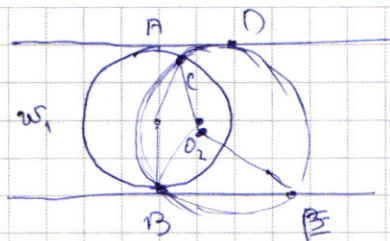
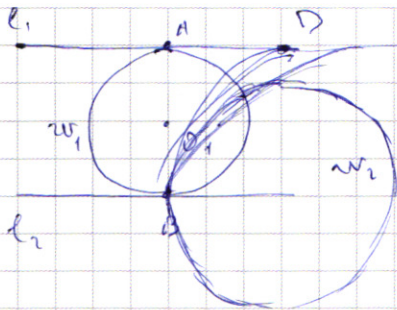
$$19m = 20K - 2$$

$$\frac{3\pi}{76} \cdot \frac{11\pi}{76} \cdot \frac{19\pi}{76} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{27\pi}{76} \cdot \frac{35\pi}{76} \cdot \frac{43}{76} \cdot \frac{51}{76} \cdot \frac{59}{76} \cdot \frac{67}{76} \cdot \frac{75}{76} \cdot \frac{83}{76} \cdot \frac{91}{76} \cdot \frac{99}{76} \cdot \frac{107}{76}$$

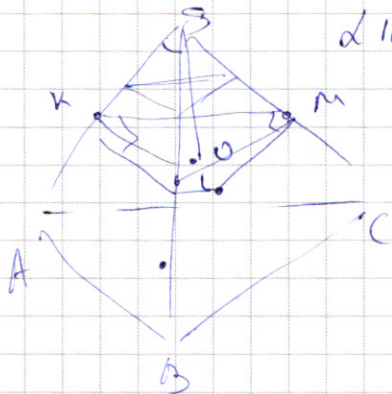
$$\frac{115}{76} \cdot \frac{123}{76} \cdot \frac{131}{76} \cdot \frac{139}{76} \cdot \frac{147}{76} \cdot \frac{155}{76} \cdot \frac{163}{76} \cdot \frac{171}{76} = \frac{9}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{array}{r} x \ 109 \\ 55 \\ \hline 7545 \\ 5595 \\ \hline \end{array}$$



$$\alpha \parallel ABC. \quad \alpha = 9$$

$$\angle \beta = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$y = 110 + x - 5 = 0 \quad x = 5 - 110.$$

$$\log_5 x = 110 + x - 5$$

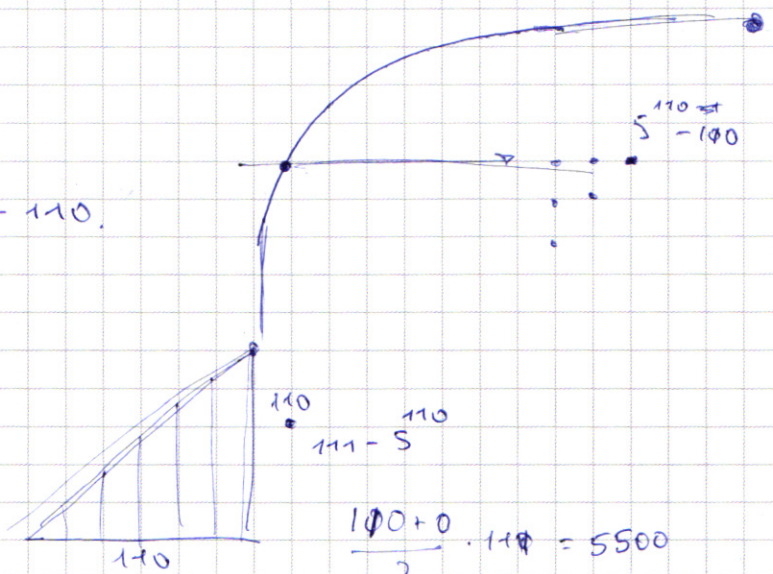
$$y = 110 - 5$$

$$y = 0 - 1 \text{ морская}$$

$$y = -1 - 2 \text{ морская}$$

$$y = -2 - 3 \text{ морская}$$

$$y = 111 - 5 - 112 - 5 - 111 + 1 = 5 - 110$$



$$\frac{100+0}{2} \cdot 110 = 5500$$

$$5390$$

$$5^{n+1} - 5^n = 5^n (5^1 - 5^0) = 5^n \cdot 4$$

$$4+3+2+1=10.$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\frac{1+a}{2} \cdot a = \frac{a+a^2}{2}$$

$$x = 110$$

$$y = 110 + x - 5 = \log_5 x$$

$$x = 5$$

$$20 \cdot 2 + 100 \cdot 2 + 500 \cdot 3 + 2500 \cdot 4$$

$$625 \cdot 5 - 625 = 625 \cdot 4 = 2500$$

$$a + 110 : 109$$

$$\frac{a+5+a+2}{2}$$

$$\frac{a+110-a-2+1}{2} = 109.$$

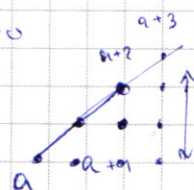
$$x = 2 - 1$$

$$a+2-1 \quad x = 3 - 1+2$$

$$x = 4 - 1+2+3$$

$$a+110 = 109.$$

$$x = a - 1 + \dots + a-1$$



$$a = 110$$

$$a+2 - 1$$

$$a+3 - 2$$

$$\dots$$

$$a+110 = 109.$$

