

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p - q$
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 18$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 5$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Если размер выгоды более 57 руб. ($O > 57$), значит решение должно
выполнить строго менее 29 раз. Следовательно, при $O > 57$ это равновероятные
события при всего 80 бросков; $O > 57$; $P \leq 29$; $O + P = 80$ / О-при;

У-решия. Значит решение должно выиграть 29 раз и менее или не
более 29 раз - для вероятности P .

Во второй игре при выигрывает не более 29 раз ($O \leq 29$) - для
вероятности q .

Полностью выполняя эти или решив это равновероятные события,
по игре можно заметить по решению и наоборот. Из этого следует,
что для вероятности p решение выигрывает не более 29 раз, а для q -
решение не более 29 раз. Следовательно функция равна: $p - q = 0$

Ответ: 0.

~ 5 Рассмотрим второе уравнение

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = 289,$$

Рассмотрим 4 случая: $(x=0; y=0; |y|=0; y=0)$

$$I) \begin{cases} x > 0; y > 0 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} x > 0; y < 0 \end{cases}$$

$$III) \begin{cases} x < 0; y < 0 \end{cases}$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = 289$$

$$(x-8)^2 + (y+15)^2 = 289$$

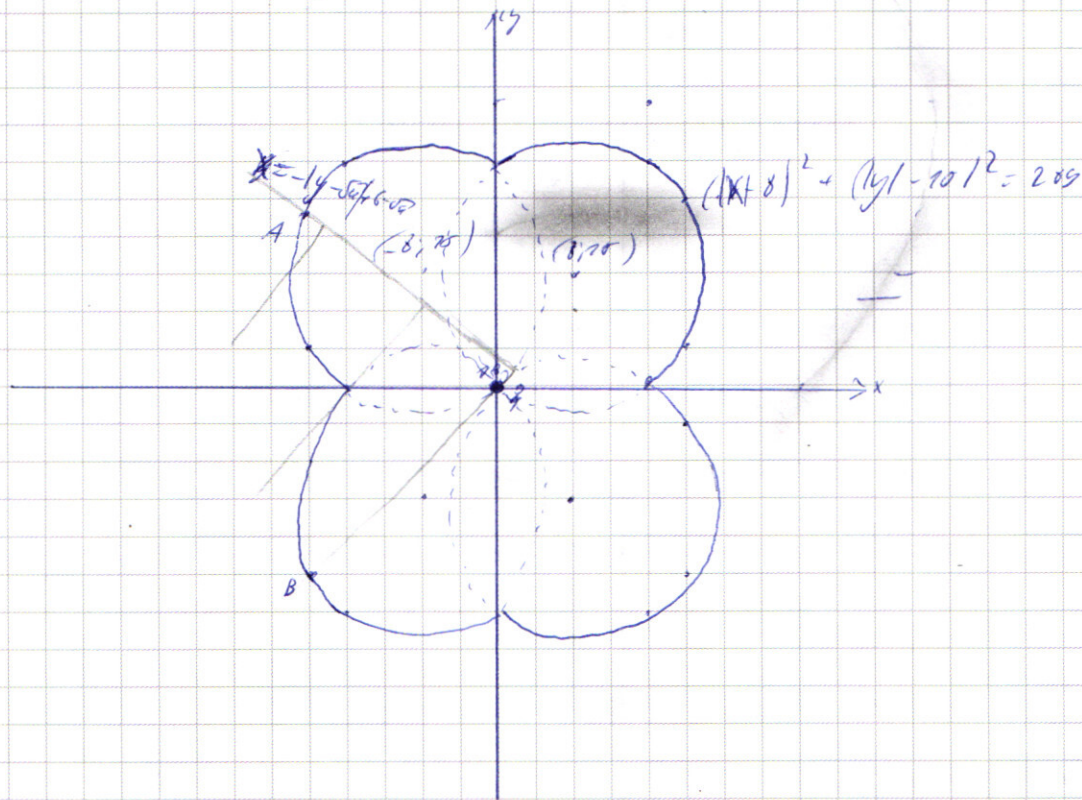
$$(x+8)^2 + (y+15)^2 = 289$$

$$IV) \begin{cases} x < 0; y > 0 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = 0$$

Схематично построим этот график (в каждой четверти будет по
одному кругу с центром в $(8, 15)$ и радиусом $\sqrt{289} = 17$

Все для окружности будут проходить через точку $O(0,0)$, т.к. $75^2 + 8^2 = 77^2$



Получили 4 симметричные относительно центра точки окружности

Второе уравнение

$$x = -|y - \sqrt{4}| + 6 - \sqrt{4}$$

$$\begin{cases} |y - \sqrt{4}| > 0 \\ x = -y + \sqrt{4} + 6 - \sqrt{4}; \end{cases}$$

$$y \geq \sqrt{4}$$

$$y = -x + 6$$

$a \geq 0$, т.к. подкоренное выражение не отриц.

$$y \leq \sqrt{4}$$

$$x = y - \sqrt{4} + 6 - \sqrt{4}$$

$$y = x - 6 + 2\sqrt{4}$$

от график этого уравнения ^{всегда} содержит графика $y = -x + 6$ ~~тогда~~
то $y \in [\sqrt{4}; +\infty)$

$$\text{или } y = x - 6 + 2\sqrt{4}; y \in (-\infty; \sqrt{4})$$

Схематично изобразим и этот график

нам нужно 3 пересечения

то чтобы их получить, нужно, чтобы $y = -x + 6 + 2\sqrt{4}$ проходил через точку $(0,0)$; $0 = 6 + 2\sqrt{4}$; $a = 9$

В точке A и B ^{график} пересекают ~~три~~ ^{три} графика, всего - 3 решения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

График $y = -x + 6$ проходит через центр окружности $(-8; 75)$

$y(-8) = 74$; значит график пересечет окружность под углом меньше 90° (или радиус под углом 60°)

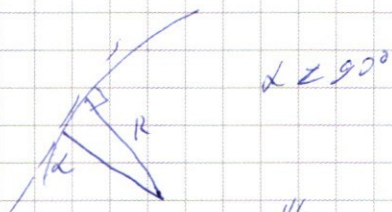


График $y = x + 2\sqrt{5} - 6$ не будет никогда пересекать эту окружность не более 1

т.к. в точке $A(-8; 75)$ решение для окружности существует $(-8; 75)$

График $y = x + 2\sqrt{5} - 6$ проходит через $(-16; 0)$

График будет пересекать окружность в точке $(-8; -75)$ в одной точке - единственной. При этом график будет иметь одно решение будет

исключением

$y = x - 6 + 2\sqrt{5}$ пересекать окружность в $(-8; 75)$ и не более чем

в точке

значит при этом только при $a = 9$

ответ: 9

$$\sqrt{\log_2 x} - 2 \sqrt{4 \log_2 x} + 3 \geq 27 \cdot x \sqrt{\log_2 x} \leq 78$$

$$\begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq 7 \\ x > 0 \end{cases} \quad x > 7$$

Корень $\sqrt{\log_2 x} = 6$

$$0^t - 2^{2t+3} + 27 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 78$$

$\sqrt{\log_2 x} = t$; $t \geq 0$, т.к. подлогарифмизм вып. не отриц.

$$\log_2 x = t^2$$

$$x = 2^{t^2}$$

$$x^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{t^2 \cdot \sqrt{\log_2 x}} = 2^{t^2 \cdot t} = 2^{t^3}$$

$$8^t = (2^3)^t = 2^{3t}$$

$$2^{2t+3} = 2^3 \cdot 2^{2t}$$

$$2^{3t} = 8 \cdot 2^{2t} + 27 \cdot 2^{t^3} - 78 \leq 0$$

Кладём $m = 2^t$; $m > 0$

$$m^3 - 8m + 27m - 78 \leq 0$$

Решаем кубик;

$$m = 2$$

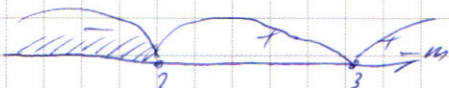
разделим на $m-2$

$$\begin{array}{r|l} m^3 - 8m + 27m - 78 & m-2 \\ - m^3 - 2m & \\ \hline -6m + 27m & \\ -6m + 12m & \\ \hline 9m - 78 & \\ -9m + 78 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} m^2 - 6m + 9 \\ m^2 - 6m + 9 \\ 0 \end{array}$$

$$(m-2)(m^2 - 6m + 9) \leq 0$$

$$(m-2)(m-3)^2 \leq 0$$

$$m = 2 \quad m = 3$$



$$m \leq 2 ; m > 0$$

$$m \in [0; 2]$$

окончательная запись

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^t \leq 2 \quad (t > 0 - \text{верно, можно не упр.})$$

$$2^t \leq 2^1$$

$$t \leq 1$$

Обратим зависимость:

$$\sqrt{\log_2 x} = t;$$

$$\sqrt{\log_2 x} \leq 1 \quad ; \quad \log_2 x \geq 0, \text{ значит возведем в квадрат, не меняя знака.}$$

$$\log_2 x \leq 1$$

$$\log_2 x \leq \log_2 2$$

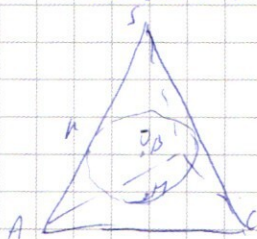
$$x \leq 2$$

$$x > 1 \quad (\text{по условию}) \text{ получим } 1 < x \leq 2$$

$$\text{Значит } x \in (1; 2]$$

$$\text{Ответ: } (1; 2]$$

~4



Точка K лежит на стороне BC в точке K



$KO = K_1O = OK_2$ - радиусы

$$\text{Пусть } \angle O = \alpha; \text{ тогда } KO = \frac{\sqrt{3}a}{4} \alpha; \quad KO = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} a = 0,25a$$

$$3 \sin \alpha, a \geq KO \quad (\text{по 2-му})$$

$$K = 0,25a$$

$$\frac{3x}{\frac{\sqrt{3}a}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{4} \cdot \frac{4}{1a}$$

$$3x = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = (1 + 0,25)a - 0,25a \cdot 2 = 0,25a$$

$$\frac{Kx}{K_1x} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}; \quad \frac{S_1}{S_2} = K^2; \quad S_2 = K^2 \cdot S_1 = 4 \cdot \frac{25}{16} = 6,25$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x - \sin 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

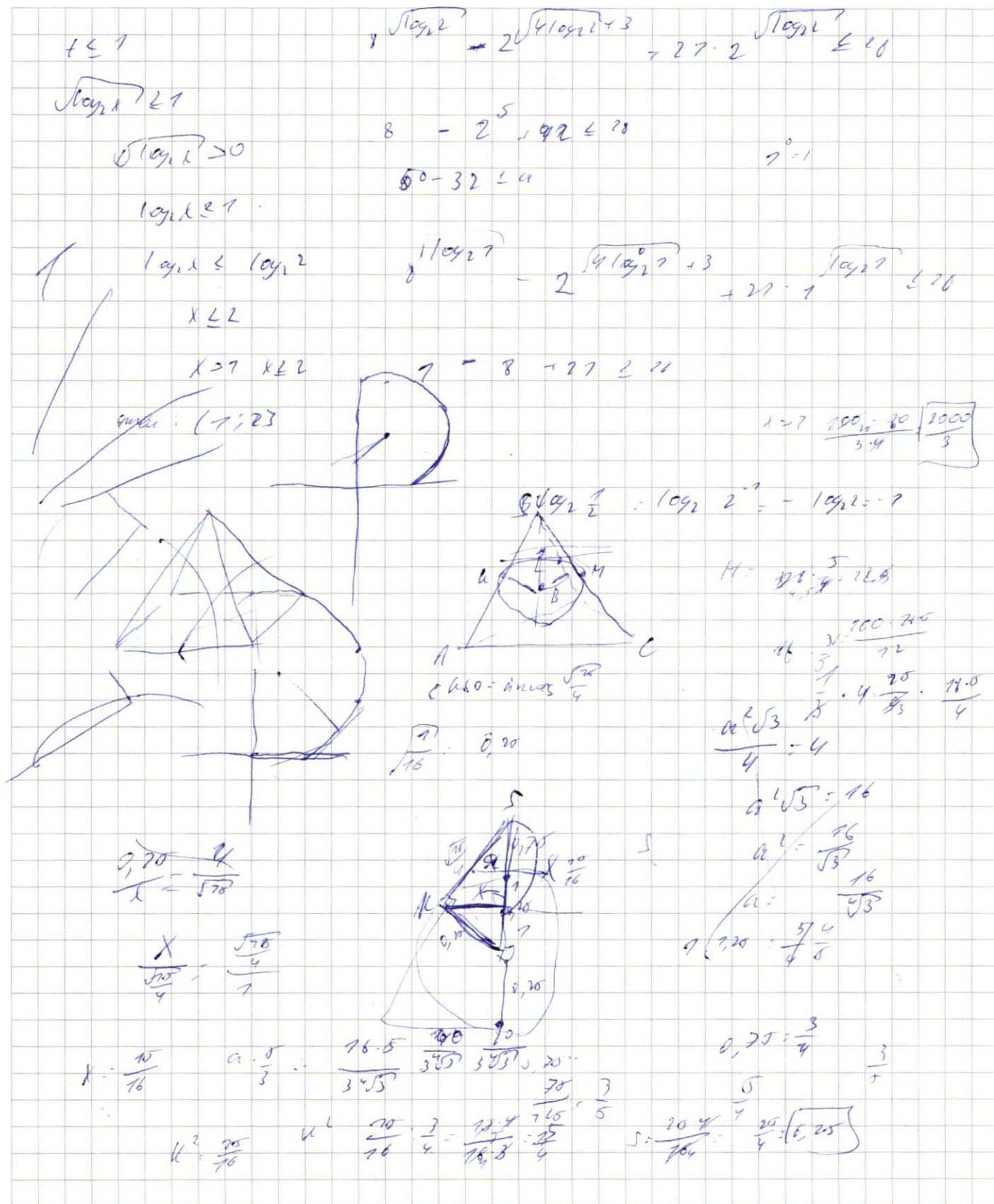
$$\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$$

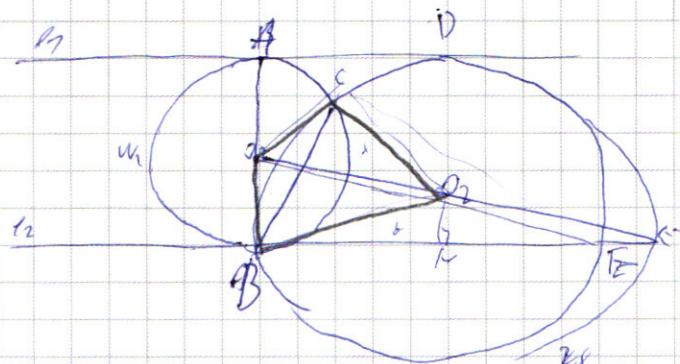
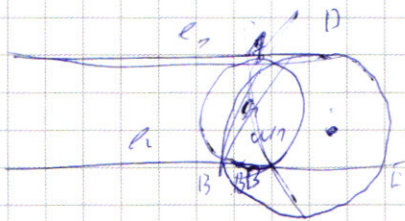
$$\frac{\sin 8x}{\cos 20x} = -\sqrt{2}; \sin$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\sin 20x}{\cos 20x} = -\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

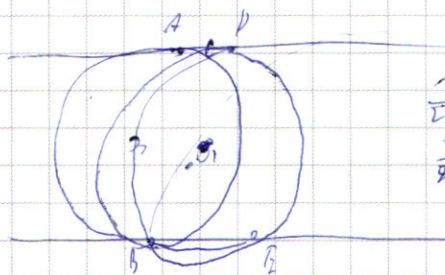




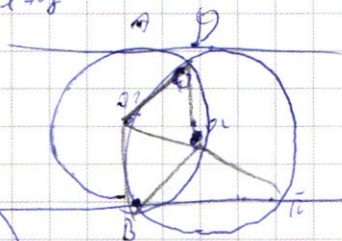
$$\frac{BO_1 \cdot O_2}{O_2 B \cdot E} = 0$$

$$\frac{2x}{xy} = 0 \quad \frac{2x}{y} = 0 \quad 2x - 0y = 0 \quad \frac{2x}{x+y} = 0$$

$$2x = 0 + 0y \quad y = 0.4x \quad = \frac{2x}{0.4x} = 5$$



$$\frac{BO_1 \cdot O_2}{O_2 B \cdot E} = 0$$

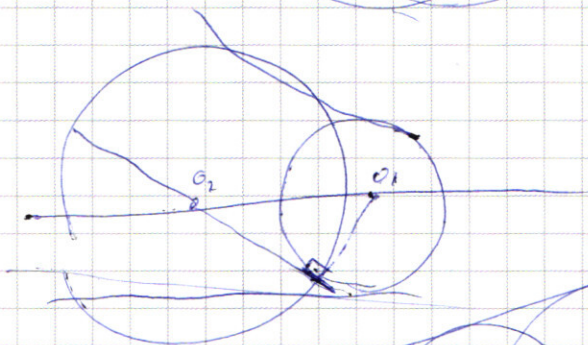


$$O_1 H = 2r_1 - r_2$$

$$S_{\triangle H} = r^2 - 4r_1^2 + 4r_1 r_2 - r_2^2$$

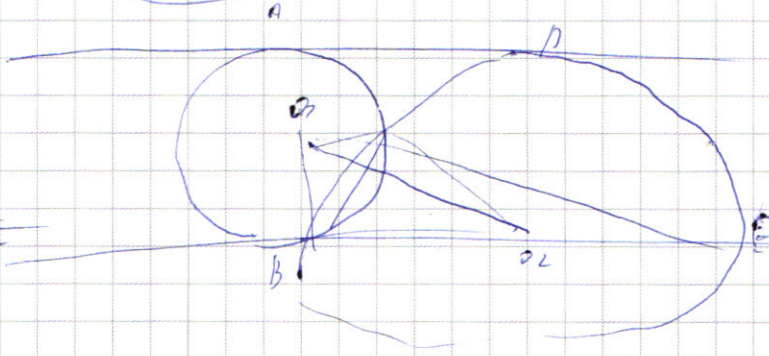
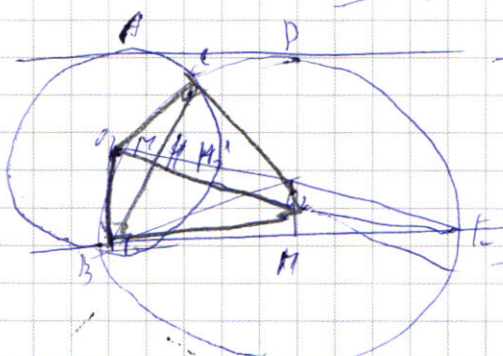
$$= 2r_1 \cdot \frac{1}{2} (r_1 + r_2) = 2r_1 (r_1 + r_2)$$

$$S_{\triangle O_1 E} = \frac{1}{2} BE \cdot O_1 H = \frac{1}{4} BE \cdot O_1 B = \frac{1}{4} BE \cdot r_1$$



$$S_{\triangle O_1 O_2} = \frac{1}{2} 2r_1 \cdot BE = \frac{1}{4} BE \cdot r_1$$

$$S_{\triangle} = r_1 r_2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 4x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x + \sin 5x} = \sqrt{2}$$

44415

$$\frac{\cos 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x + \cos 4x \cos 5x - \sin 5x \sin 4x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

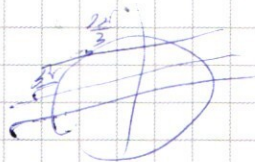
$$\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{6} + \cos$$

cos 3x

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x =$$

$$\cos 4x (\cos 5x - \sin 5x) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) = 4 \sin x \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ & \cos \frac{2\pi}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \right) + \sin \frac{2\pi}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \right) \end{aligned}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -1$$

$$\cos 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \cos 2.5\pi = 0$$

$\frac{\pi}{2}$

$$\cos 5\pi = 0$$

$$\cos 4\pi = 1$$

$$\sin 4\pi = 0$$

$$\cos 5.6\pi = 1$$

1

$$\cos 3x$$

$$\sin 5.5\pi = 0$$

$$\cos 6\pi = -1$$

$$\sin 9\pi$$

$$\cos 6\pi$$

$$\cos 6\pi$$

$$\cos 4\pi = 1$$

$$\sin 4\pi = 0$$

$$\cos 5\pi = -1$$

$$\sin 5\pi = 0$$

$$\cos 6\pi$$

206

288

-220

264

cos 3x = -1

cos 5.5x = -1

cos 5.5x = -1

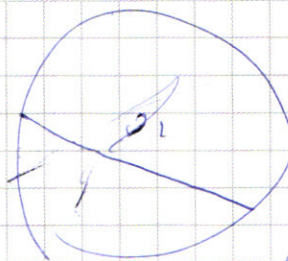
sin 5.5x = 1

sin 5.5x = 1

x = 5

9518

64



$$\begin{array}{r} 80 \\ - 24 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$(2v_1 - v_2)^2 + x^2 = v^2$$

$$4v^2 = 4v_1v_2 + v^2 + v^2 = v^2$$

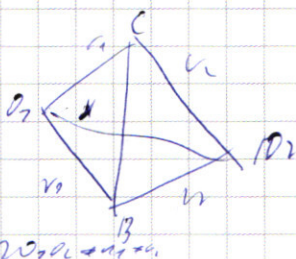
$$x^2 = 4v_1 v_2 - 4v_1^2 = 4v_1(v_2 - v_1)$$

BK: $200 \sqrt{2-0.9}$

$$4v_1(v_2 - v_1) + 4v_1^2 = 4v_1v_2 + v_1^2 = 1^2$$

$$SA = \frac{1}{2} 2r_1 \sqrt{r_2 - r_1} \cdot (2r_1 - r_2)$$

5B



$$v_2 v_2 = ((v_1 v_2 - v_1) + (v_2 v_2 - v_1)) = 14v_1 + v_2 + v_2 - v_1 v_2$$

$$BH = 2a_2 \sqrt{k_2 - a_2}$$

55. 110

$$x = 21$$
$$y = 2$$

y. loyul

$$x = 4^y$$

for 470-20

0	0	0	0
0	0	0	P
0	0	R	0
0	0	P	P
0	P	0	0
0	P	0	P
0	P	P	0
0	P	P	P
P	0	0	0
P	0	0	P
P	0	P	0
P	0	P	P
P	P	0	0
P	P	0	P
P	P	P	0
P	P	P	P

$$\frac{3}{16}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on graph paper, including trigonometric identities, algebraic equations, and a coordinate system with a plotted curve.

Trigonometric Identities:

$$\frac{\cos 4x}{\cos 8x - \sqrt{2} \sin 8x} + \frac{\sin 4x}{\cos 8x + \sqrt{2} \sin 8x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = 2 \sin 2x \cos 2x$$

$$\cos 4x \cos 8x + \cos 4x \sin 8x + \sin 4x \cos 8x = \sin 4x \cos 8x \sin 8x$$

$$\cos^2 8x - \sin^2 8x = \cos 16x$$

Algebraic Equations:

$$x = -|y - \sqrt{2}| + 6 - \sqrt{2}$$

$$(x-8)^2 + (y-10)^2 = 289$$

Coordinate System and Curve:

The coordinate system shows a curve with four loops, centered at (8, 10). The axes are labeled x and y. The curve is defined by the equation $(x-8)^2 + (y-10)^2 = 289$.

Other Handwritten Notes:

- $y = \sqrt{2} > 0$, $y > \sqrt{2}$
- $x = -y - \sqrt{2} + 6 - \sqrt{2}$
- $x = -y + 6$
- $y + x = 6$, $y = -x + 6$
- $y < \sqrt{2}$
- $x = y - \sqrt{2} - 6 - \sqrt{2}$
- $x = y - x - 6 + 2\sqrt{2}$
- $a = 9$ ($a = 9$)
- $y = x + 6$
- $2 = 0 - 6 + 2\sqrt{2}$
- $2\sqrt{2} = 6$
- $a = 9$

$$x^2 + 11x + 10^2 - (y - 10)^2 = 289$$

$$x^2 + 11x - 15 = -1 - 9$$

$$x^2 + 26x + 164 - x^2 - 26x + 87 = 289$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 288 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$2x^2 + 34x + 744 = 0$$

$$\begin{array}{r} 87 \\ 164 \\ \hline 745 \end{array}$$

$$x^2 + 17x - 72 = 0$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ -740 \\ \hline 944 \end{array}$$

$$0 \rightarrow x_1 = -8, x_2 = -9$$

$$x = 289, 72, 4$$

$$78, 4$$

$$36, 2$$

$$72, 4$$

$$288$$

$$189$$

$$577$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} x = \sqrt{10}$$

$$\frac{\pi \cdot 10}{2} = 15, 7$$

$$-5, 7 = -1$$

$$9 \cdot \frac{\pi}{6} = 4, 5$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi \cdot 10}{4} = 7, 85$$

$$\frac{\pi \cdot 3\pi \cdot 10}{4} = 23, 56$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} x = \sqrt{10}$$

$$\frac{0}{3} = 2, 3$$

$$\frac{\pi \cdot 10}{4} = 7, 85$$

$$\sqrt{\log_2 x} = 2 \quad \sqrt{4 \log_2 8} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sqrt{\log_2 x} = t$$

$$\log_2 x = t^2$$

$$x = 2^{t^2}$$

$$x \neq 7$$

$$x > 0$$

$$8^t = 8 \cdot 2^{t-1} \cdot 4^t$$

$$8^t = 8 \cdot 4^t + 27 \cdot 2^t \leq 50$$

$$2^{3t} = 8 \cdot 2^{2t} + 27 \cdot 2^t - 79 \leq 0$$

$$2^t = m$$

$$2m^3 - 8m^2 + 27m - 79 \leq 0$$

$$-8 \cdot 10$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$m > 0$$

$$6 \cdot 8 = 48$$

$$m^3 - 8m^2 + 27m - 79$$

$$m^3 - 2m^2$$

$$-6m^2 + 27m$$

$$-6m^2 + 22m$$

$$9m - 78$$

$$(m-2) \mid (m-3)^2 \leq 0$$

$$m^2 \mid m^3$$

$$m \in [0; 27]$$

$$m \in [0; 27]$$

$$m \in [0; 27]$$

$$m \in [0; 27]$$

$$m \in [0; 27]$$