

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p - q$
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 18$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 5$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Обозначим кол-во всех возможных исходов -
 N . предбраемваний
метки сразу

- 1) m - кол-во исходов, в которых орел выпал
больше 51 раз. $\Rightarrow$ во всех исходах m
решка выпала меньше либо равно 29 раз

$$\Rightarrow p = \frac{m}{N}$$

и только в этих

- 2) Пусть n - кол-во исходов, в которых орел
выпал не больше 29 раз $\Rightarrow q = \frac{n}{N}$

Выпадение орла и решки ~~в~~ равновероятны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow q' - \text{вероятность выпадения решки не более 29 раз} : q' = q = \frac{n}{N}$$

- 3) Из пункта 1) можно получить, что $q' = \frac{m}{N} \Rightarrow$
 $p = \frac{m}{N} = q' = \frac{n}{N} = q \Rightarrow p - q = 0$

ответ: $p - q = 0$

Задача 2

$$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{(\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x) + (\sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos 9x + \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 10x \\ \cos 10x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x}_{\cos \frac{3}{4}\pi} + \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x}_{-\sin \frac{3}{4}\pi} = \cos 10x$$

$$\cos \left(9x + \frac{3}{4}\pi \right) = \cos 10x$$

$$\begin{cases} 9x + \frac{3}{4}\pi = 10x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x + \frac{3}{4}\pi = -10x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{20} + \frac{2}{19}\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Докажем, области ответов пересекается (ОДЗ) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k & 2 + 4k - 8k = 3 \Rightarrow k, k \in \emptyset \\ \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{5}{4}\pi + \frac{2}{19}\pi m & 38 + 16k - 8m = 5 \Rightarrow m, k \in \emptyset \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5}{20}\pi + \frac{2}{19}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$$(1) \begin{cases} x = -|y - 5a| + 6 - 5a \end{cases}$$

$$(2) [(x - 8)^2 + (y - 15)^2 = 289]$$

Не сложно заметить, что (2) в упр-е представляет собой уравнение четырех окр-стей

с центрами O_i в точках

O_1
 O_2
 O_3
 O_4

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow O_1(8, 15)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow O_4(8, -15)$$

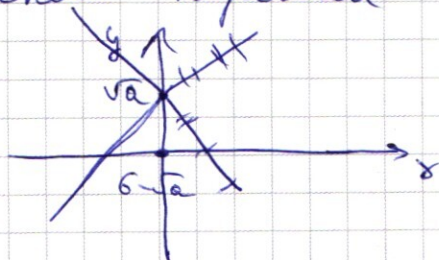
$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow O_3(-8, -15)$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow O_2(-8, 15)$$

Радиус всех окр-стей $= \sqrt{289} = 17$

1 ур-е будет представлять собой «галочку» с точкой перегиба $y = 5a, x = 6 - 5a$

вид:



наклон $\Rightarrow \tan \alpha$

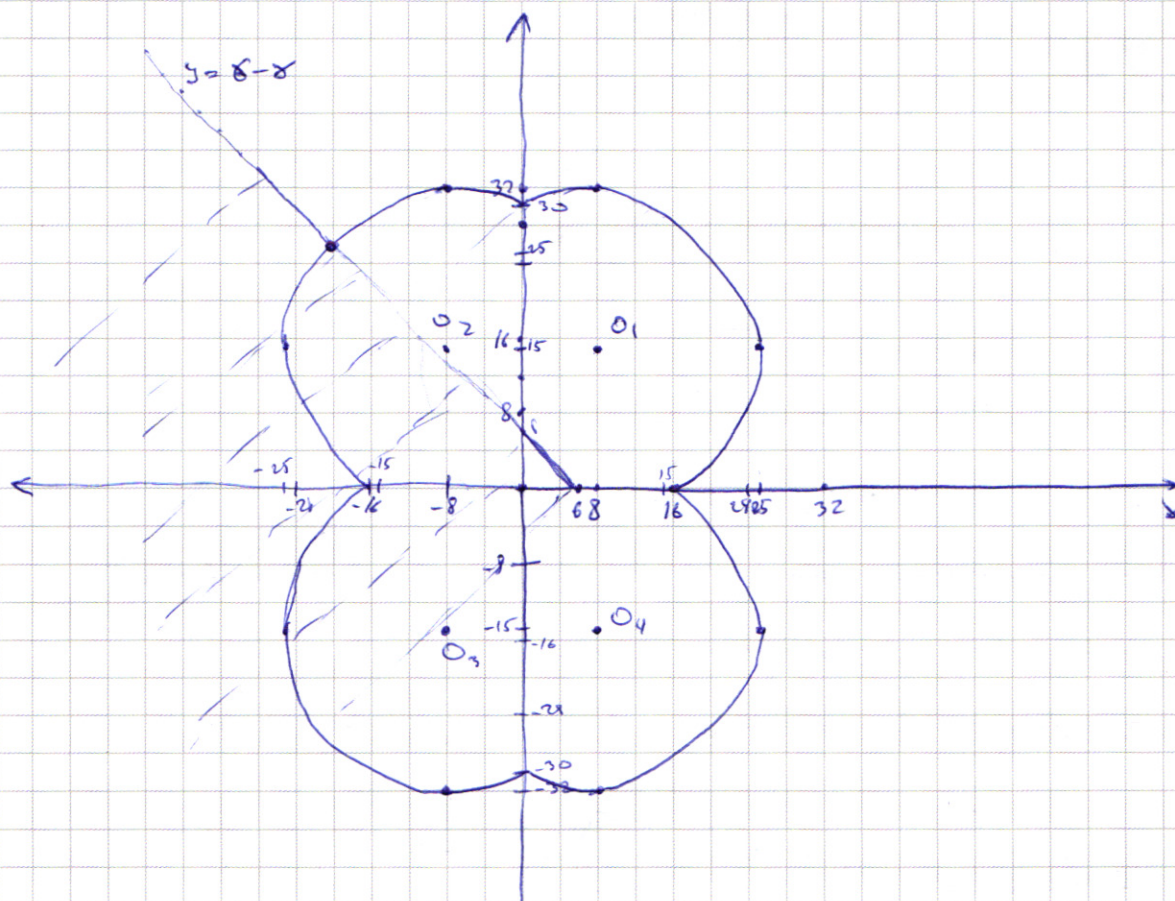
$$y \geq 5a \quad \tan \alpha = -1$$

$$y < 5a \quad \tan \alpha = +1$$

Геометрическим местом точек пересечения всех возможных вершин «галочки» будет прямая

$$\begin{cases} x = 6 - y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ y \geq 0, y = 5a \end{cases}$$



Как видно из графика, 3 точки пересечения
 между y и y "записки" с окружностями может
 быть только при двойном пересечении окр. O_2 , или
 как при касании окр. O_1 и пересечении
 с O_2 в двух точках

Рассмотрим нижний участок графика $y < 0$

$$x = y + 6 - 2\sqrt{a} \quad y = x - 6 + 2\sqrt{a}$$

Рассмотрим случай двойного пересечения
 с окр. O_2 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y = x - 6 + 2\sqrt{a} \\ (x+8)^2 + (y+15)^2 = 25 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

также из графика
 можно видеть, что

$$2x^2 + 4x + 4a + 4x\sqrt{a} - 24\sqrt{a} + 36 = 0$$

эта точка пересечения
 левее $x = -15$

$$x^2 + 2x(1+\sqrt{a}) + 4a - 12\sqrt{a} + 18 = 0$$

$$x^2 + 2x(1+\sqrt{a}) + 2a - 12\sqrt{a} + 18 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 продолжение

$$(1) \begin{cases} x^2 + 2x(1+\sqrt{a}) + 2a - 12\sqrt{a} + 18 = 0 \\ x \leq -16 \end{cases} \quad \text{— имеет 2 решения}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + 2x(1+\sqrt{a}) + 2a - 12\sqrt{a} + 18 = 0 \\ x < -16 \end{cases} \quad \text{— имеет одно решение}$$

$$D = 1 + 2\sqrt{a} + a - 2a + 12\sqrt{a} - 18 = -a + 14\sqrt{a} - 17$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = t \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 14t + 17 = 0 \\ D = 196 - 68 = 128 \Rightarrow t = \begin{cases} 7 + 4\sqrt{2} \\ 7 - 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} \in [7 - 4\sqrt{2}; 7 + 4\sqrt{2}]$$

$$x \leq -16 \Rightarrow 6 - \sqrt{a} \leq -16 \quad 22 \leq \sqrt{a}$$

$$a \in \left(\frac{484}{1}, \frac{484}{1} \right] \cup [984; \frac{484}{1}]$$

$$(1) : \begin{cases} \sqrt{a} \in [7 - 4\sqrt{2}; 7 + 4\sqrt{2}] \\ a \in \left(\frac{484}{1}, \frac{484}{1} \right] \cup [984; \frac{484}{1}] \end{cases} \Rightarrow a \in (81 - 56\sqrt{2}; 81 + 56\sqrt{2}) \Rightarrow a \in \emptyset$$

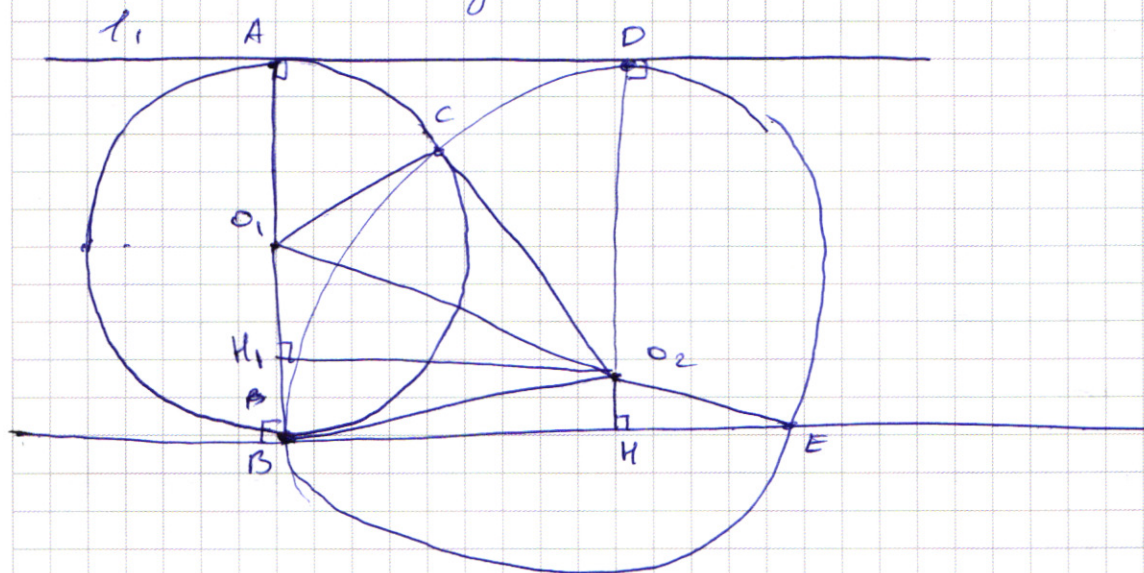
$$(2) \begin{cases} a \in (484; \frac{484}{1}] \\ a \in (81 - 56\sqrt{2}; 81 + 56\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$$

$$\begin{cases} a = 81 - 56\sqrt{2} \\ a = 81 + 56\sqrt{2} \end{cases}$$

Следовательно система имеет ≤ 2 решения

Следовательно $a \in \emptyset$ — ответ

Задача 6



а) 1) Найдем ~~площадь~~ $S_{O_1 O_2 B}$

• радиусы окр-сти с ц. в (.) $O_1 - r$
с ц. в (.) $O_2 - R$

$$\Rightarrow O_1 O_2 = R + r = \frac{2}{1} (R - r)$$

$$O_2 H + O_2 D = O_1 A + O_1 B \Rightarrow R + O_2 H = 2r$$

$$O_2 H = 2r - R$$

$$O_2 H = H_1 B$$

$$BO_2^2 = O_2 H^2 + BH^2$$

$$BH = 2\sqrt{r(R-r)}$$

$$BH = H_1 O_2 \Rightarrow O_1 O_2^2 = (O_1 B - H_1 B)^2 + H_1 O_2^2$$

$$O_1 O_2^2 = (R-r)^2 + 2\sqrt{r(R-r)}^2 = R^2 - 3r^2 + 2Rr$$

$$O_1 O_2 = \sqrt{R^2 - 3r^2 + 2Rr}$$

$$S_{O_1 O_2 B} = O_2 H_1 \cdot O_1 B \cdot \frac{1}{2} = r \cdot \sqrt{r(R-r)}$$

$\Delta O_1 C O_2 = \Delta O_1 O_2 B$ по 2-м сторонам $\Rightarrow$

$$S_{O_1 C O_2 B} = 2S_{O_1 O_2 B} = 2r\sqrt{r(R-r)}$$

2) Найдем $S_{BO_2 E}$

$$S_{BO_2 E} = O_2 H \cdot BE \cdot \frac{1}{2}$$

В $O_2 H$ - высота в равнобедренном треугольнике

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6 касания

2) O_2H - медиана $\Rightarrow$

$$KH = HE \Rightarrow S_{O_2EB} = KH \cdot O_2H$$

$$S_{O_2EB} = (2r - R) \cdot 2\sqrt{r(R-r)}$$

3) отношение $\frac{S_{O_1CO_2B}}{S_{O_2EB}} = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2r\sqrt{r} \cdot \sqrt{R-r}}{(2r-R) \cdot 2\sqrt{r} \cdot \sqrt{R-r}} = 5$$

$$\frac{r}{2r-R} = 5$$

$$5R = 9r$$

$$R = \frac{9}{5}r$$

Ответ: а) $R = \frac{9}{5}r$

R - радиус окружности ω_2 , r - радиус окружности ω_1

б) ~~BD = 5~~

Рассмотрим $\triangle BDH$, $\angle DHB = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow BD^2 = DH^2 + HB^2$$

$$\begin{cases} BD = 25 = 4r^2 + 4r(R-r) \\ R = \frac{9}{5}r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{125}{36} = r^2 \quad r = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

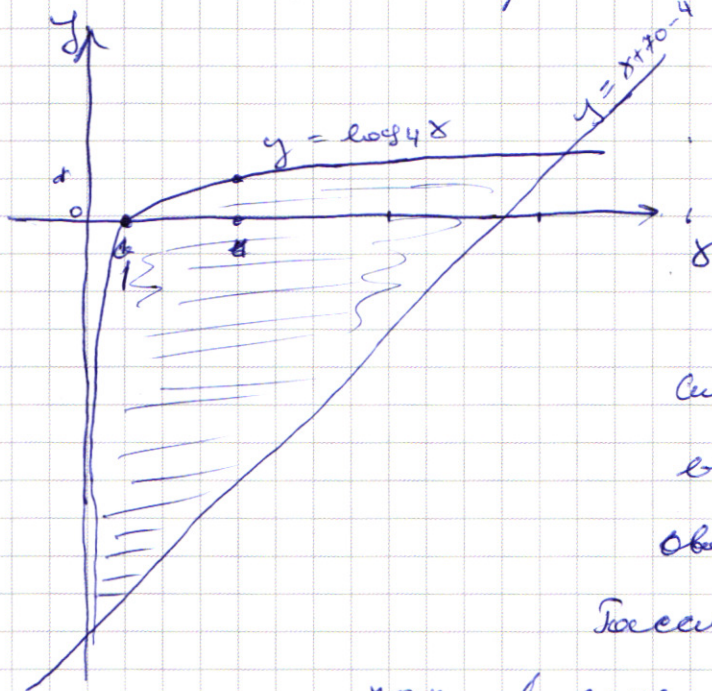
$$R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$$r = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Задача 7

Рассмотрим пер-ва на графике

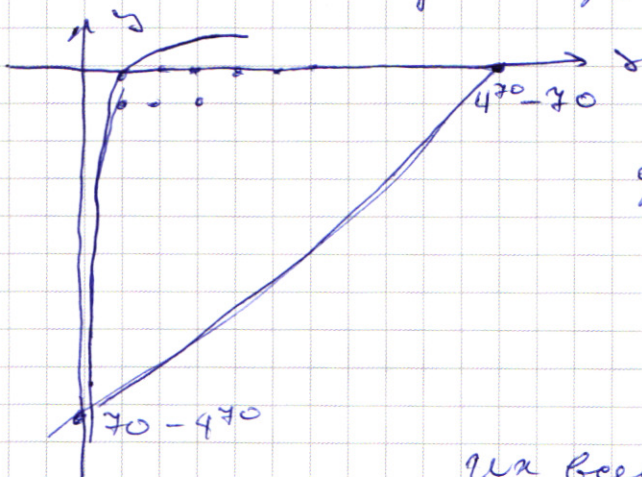


Нахождение
точка пересечения
на следующей
странице № 8

Системе удовлетворяют
все пары x, y в заштрих-
ованной зоне

Рассмотрим кол-во точек

пар в зоне $y \leq 0$



$$\text{для } y = 0 \quad \exists x^1 \text{ и } x^2$$

$$y = 0 \quad \exists x^1 \text{ и } x^2$$

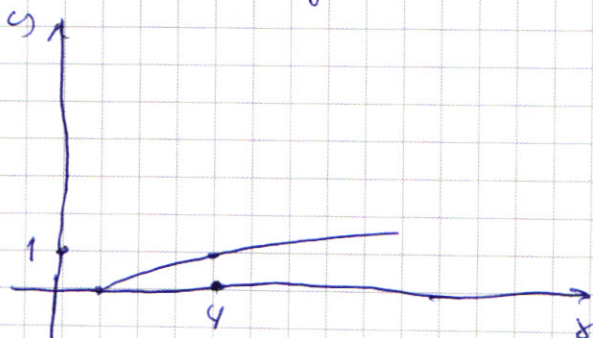
и так далее

$$\text{до } y = 0 = 4^{70} - 70 \cdot x^1$$

$$\text{или всего } \frac{(1 + 4^{70} - 70)(4^{70} - 70)}{2}$$

но для ряда прогрессии

Рассмотрим кол-во точек в паре для $y > 0$



$$\text{для } y = 1 \quad \exists 4^{70} - 70 + 1 - (4^1 - 1)$$

$$y = 2 \quad \exists 4^{70} - 70 + 2 - (4^2 - 1)$$

$$y = 70 \quad \exists 4^{70} - 70 + 70 - 4^{70} + 1 = 1$$

$$\text{Прогрессия от } 1 \text{ до } 70 \text{ получим } 70 \cdot 4^{70} - 70^2 + \frac{(1+70) \cdot 70}{2} + 70 - (4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{70})$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 + \sqrt{a}$$

$$1 + a + 2\sqrt{a} - 2a + 12\sqrt{a} - 18$$

$$14\sqrt{a} - a - 17 > 0$$

$$\sqrt{a} = y$$

$$y^2 - 14\sqrt{a}y + 17 < 0$$

$$D = 196 - 68 = 128$$

$$7\sqrt{2} + 7$$

$$7 - 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a} \in (7 - 7\sqrt{2}, 7 + 7\sqrt{2})$$

Итого 7 прогрессии

Рассчитаем $70 \cdot 4^{70} - 70^2 + 35 \cdot 71 + 70 - \frac{4(4^{70}-1)}{3} =$

по ф-ле суммы прогрессии

Сложим две суммы

Рассчитаем

N - кол-во пар

$$N = (4^{70} - 69) \cdot \left(\frac{4^{70} - 70}{2} \right) + 70 \cdot 4^{70} - 70^2 + 35 \cdot 71 + 70 - \frac{4}{3}(4^{70} - 1) =$$

$$= 35 \cdot 71 - 70^2 + 70 + \left(\frac{4^{140} - 70^2}{2} \right) - \left(\frac{4^{70} - 70}{2} \right) + 70 \cdot 4^{70} - \frac{4}{3}(4^{70} - 1) =$$

$$= 2 \cdot 4^{139} + 4^{70} \left(70 - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right) + 35 \cdot 71 - 70^2 + 70 - \frac{70^2}{2} + 35 + \frac{4}{3}$$

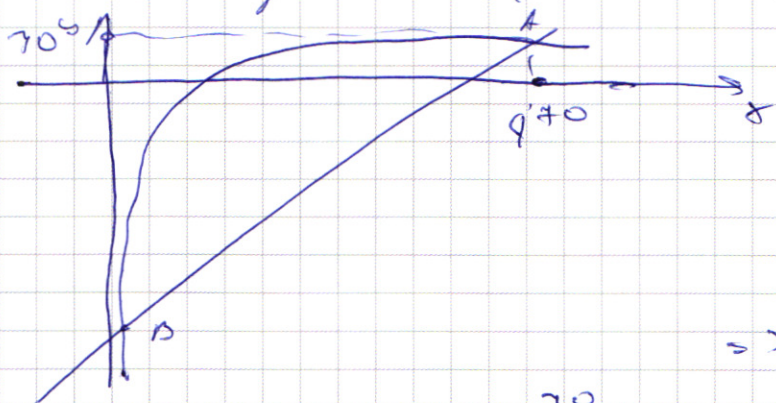
$$= 2 \cdot 4^{139} + 68\frac{1}{6} \cdot 4^{70} + 9941\frac{1}{3} \quad \text{— ответ}$$

Точка пересечения

$$70 + x - 4^{70} = \log_4 x$$

легко заметить, что

$$x_1 = 4^{70}$$



$$A(4^{70}, 70)$$

$$B(x_0, y_0)$$

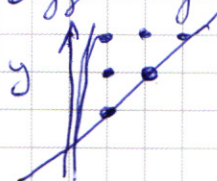
при $y < 0$

в ф-ле $\log_4 x$, $x < 1$

$$\Rightarrow x_0 < 1$$

$$71 - 4^{70} > y_0 > 70 - 4^{70}$$

Поскольку прямая $y = 70 + x - 4^{70}$ имеет наклон $\alpha = 1 \Rightarrow$ при увеличении y на 1 будет добавляться одна пара x, y -целых



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

80 раз

$\rho = \frac{20}{80}$ $\frac{28}{80}$

$\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$

$\frac{\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x(\cos 5x - \sin 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$

$\cos 10x$

$\cos 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x$

$\cos 5x(\cos 4x + \sin 4x)$

$\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x = \cos 9x$

$\cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x = \sin 9x$

$\frac{\sin 9x + \cos 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$

$\sin 9x + \cos 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$

$1 + 2 \sin 9x \cdot \cos 9x = 2 \cos^2 10x$

$1 + 2 \sin 18x = 2 \cos^2 10x$

$\cos 9x(1 + \sqrt{2} \cos x) = \sin 9x(\sin x + \sqrt{2} \sin x - 1)$

$\frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{2} \sin x - 1} = \tan 9x$

$x = \frac{3\pi}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}$

$y = \sqrt{a}$

$x = 6 - \sqrt{a}$

$38 + 76k = 5 + 8m$

$25 = 4rk$

$25 = 4 \cdot \frac{9}{5} r^2$

$\frac{125}{4 \cdot 9} = r^2$ $r = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

$x = \frac{3\pi}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}$

$y = \sqrt{a}$

$x = 6 - \sqrt{a}$

$38 + 76k = 5 + 8m$

$25 = 4rk$

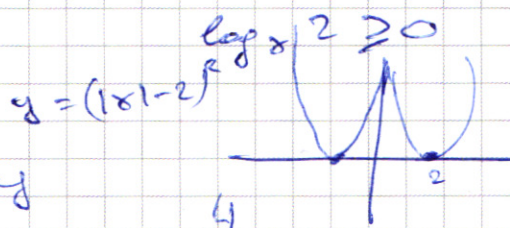
$25 = 4 \cdot \frac{9}{5} r^2$

$\frac{125}{4 \cdot 9} = r^2$ $r = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 2^{\sqrt{4 \log_2 x + 3}} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 18$$

$$\log \log x^2 = \frac{\log 2^2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x} \quad \sqrt{\frac{1}{y}} \quad x < 0$$

$$x > 1$$



$$\log x^2 \geq 0 \quad \log x^2 \geq \log x^2 \quad x > 1$$

$$\log_2 x = y$$

$$\frac{3y}{2} - 2 \cdot 8 + 4 \cdot \frac{1}{x^y} < 18$$

$$8^{3y} - 2^{6y} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\log_2 2^2}$$

$$\frac{1}{x^y} \quad 14 + 8$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{4\sqrt{2}}$$

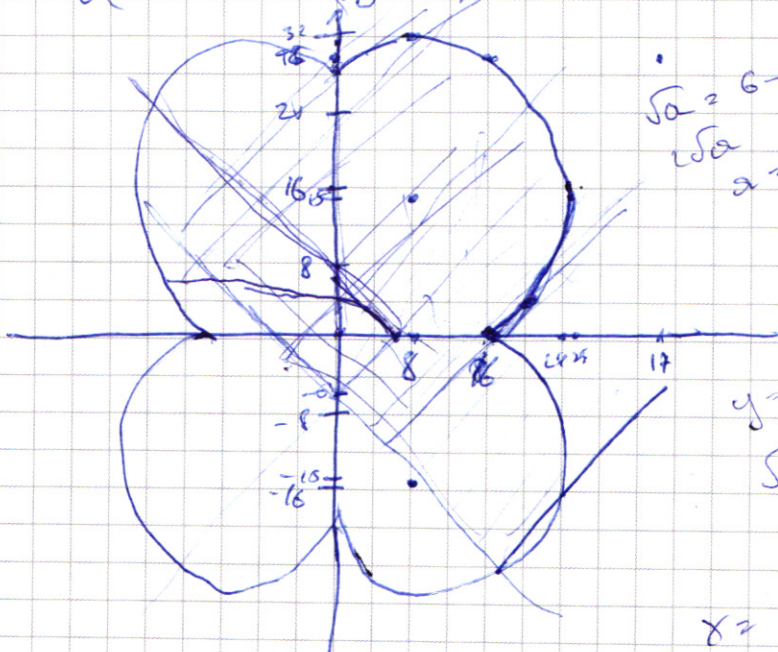
$$8^{3y} - 8 \cdot 2^{2y} + 21 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 18$$

$$x = \frac{1}{8} |y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a} \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = 20 \Rightarrow 17^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{8} |y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}$$

$$\begin{aligned} x &= -y + 6 \\ y &= 6 - x \\ y &= x - 6 \\ x &= +y - 2\sqrt{a} + 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= 6 - \sqrt{a} \\ 2\sqrt{a} &= 6 \\ \sqrt{a} &= 3 \end{aligned}$$

$$x = 0$$

$$y = \sqrt{a} = 3$$

$$x = 6 - y$$

$$(x-8)^2 + (15+y)^2$$

$$y = x + 2\sqrt{a} - 6$$

$$y = x - 6$$

$$x^2 + 16x + y^2 + 30y$$

$$\begin{aligned} (x-6+2\sqrt{a})^2 &= x^2 + 36 + 4\sqrt{a}x - 6x + 24\sqrt{a} - 6x - 12\sqrt{a} + 2\sqrt{a}x - 22\sqrt{a} \\ &= x^2 + 36 + 4\sqrt{a}x - 12x + 4\sqrt{a}x - 22\sqrt{a} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sin 9x + \cos 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\sin 9x + \cos 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x = \cos 10x$$

$$\cos 9x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 9x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 10x$$

$$\cos 9x \cdot \cos \frac{7\pi}{4} - \sin 9x \cdot \sin \frac{7\pi}{4} = \cos 10x$$

$$\cos \left(9x + \frac{7\pi}{4} \right) = \cos 10x$$

$$9x + \frac{7\pi}{4} = 10x + 2\pi k$$

$$9x + \frac{7\pi}{4} = 10x + 2\pi k$$

$$\cos \frac{9\pi}{76} + \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{10\pi}{76}$$

$$\frac{18}{4} \cdot \frac{6}{133}$$

$$\frac{142}{76} \cos \frac{71}{38} = \cos \frac{5}{38} = \cos \frac{76}{38} = \cos \frac{5}{38}$$

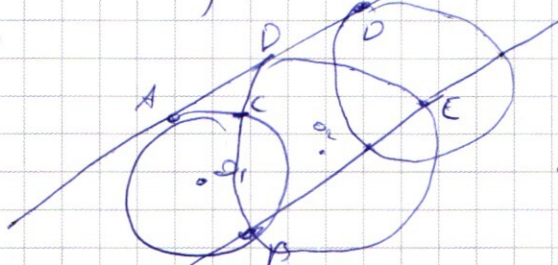
$$3 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 20$$

$$\cos x = \cos -x$$

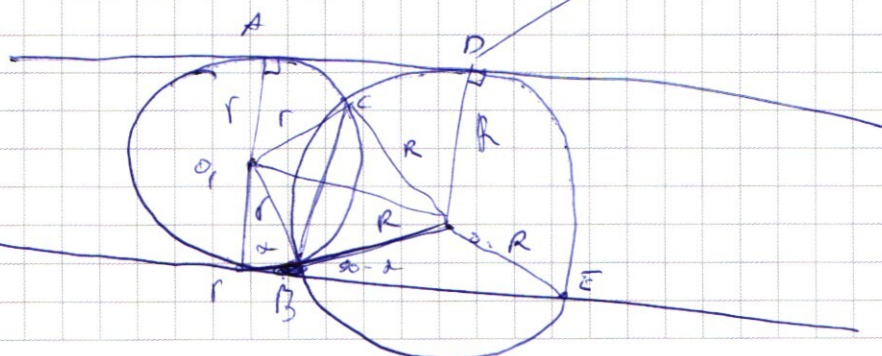
$$2 \sqrt{\cos 2x} - 8 \cdot 2 \sqrt{\cos 2x}$$

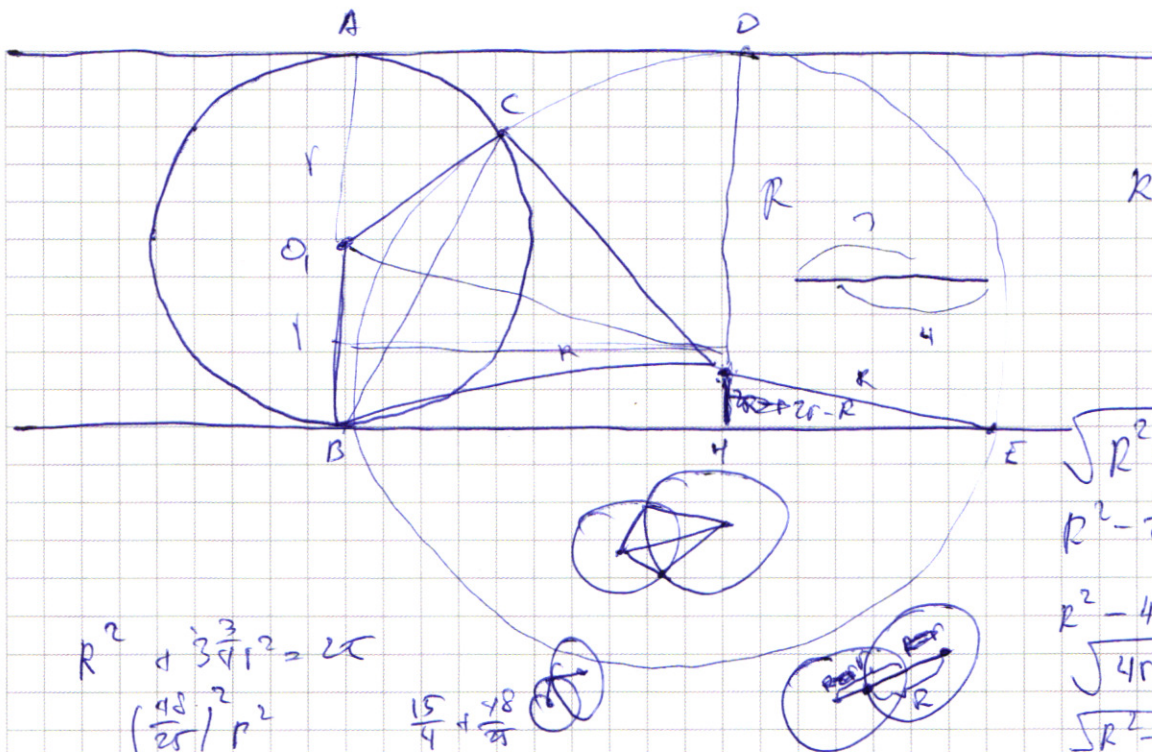
$$2 \sqrt{\cos 2x} (2 \sqrt{\cos 2x} - 8) + 3(7 \cdot x \sqrt{\cos 2x} - 6) \leq 0$$

$$\frac{2 \sqrt{\cos 2x}}{2 \sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{2 \sqrt{\cos 2x}}$$



$$O_1O_2 = r + R - 2(r - R) = 3r - R$$





$$R + r - 2(R - r)$$

$$3r - R$$

$$\frac{1}{2}r \quad R$$

$$\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}r^2} = OH$$

$$R^2 - \frac{1}{4}r^2 + 4r^2 = 25$$

$$R^2 - 4r^2 - R^2 + 4rR$$

$$\sqrt{4r(R - r)}$$

$$\sqrt{R^2 - R^2 - 4r^2 + 4rR}$$

$$\sqrt{4Rr - r^2 - 3R^2}$$

$$r(R - r) + 3R(r - R)$$

$$4Rr - r^2 - 3R^2$$

$$r(R - r) + 3R(R - r)$$

$$3Rr - 3R^2$$

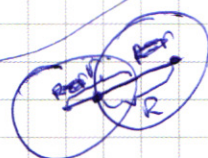
$$3R(r - R) + r(R - r)$$

$$(r - 3R)$$

$$R^2 + 3\frac{3}{4}r^2 = 25$$

$$\left(\frac{48}{25}\right)^2 r^2$$

$$\frac{15}{4} + \frac{48}{25}$$



$$h = w - R \quad \frac{15}{4}r$$

$$BH = \sqrt{R^2 - 4R^2 + r^2 + 4Rr}$$

$$25 - R$$

$$S_{O, CO_2 B} = 2r \sqrt{2(2r - R)(R - r)}$$

$$4r^2 + R^2 - 4rR$$

$$4$$

$$\frac{4r^2 + R^2 - 4rR}{\sqrt{R^2 - R^2 - 4r^2 + 4rR}}$$

$$HB = \sqrt{4r(R - r)}$$

$$BH = \sqrt{4r(R - r)}$$

$$R^2 - 4r^2$$

$$S_{DO_2 E} = 2(2R - r) \cdot \sqrt{r(R - r)}$$

$$4r^2 + 4r$$

$$\frac{2r \sqrt{2} \cdot \sqrt{2(2R - r)} \cdot \sqrt{R - r}}{2(2R - r)(\sqrt{R}) \sqrt{R - r}}$$

$$= 5$$

$$4r^2 - 4r^2 + 4rR = 25$$

$$\frac{4 \cdot r^2 \cdot 48}{25} = 25$$

$$R^2 - 4r^2 - R^2 + 4rR$$

$$r^2 = \frac{625}{48 \cdot 4}$$

$$25 = 50R - 25r$$

$$2 + r = 50R$$

$$r = \frac{25}{8\sqrt{3}}$$

$$r, R, 3r - R$$

$$p = 2r(R - r)$$

$$2S = \sqrt{2r(r)(2r - R)(R - r)} = 2r \sqrt{2(2r - R)(R - r)}$$

$$R = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{648}{25} \cdot \frac{25}{8\sqrt{3}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$S_2 = (2r - R) \cdot 2\sqrt{r(R - r)}$$

$$R^2 + r^2 - 2rR + 4rR$$

$$R + r$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 5 \Rightarrow \frac{r \sqrt{2(2r - R)(R - r)}}{(2r - R) \sqrt{r(R - r)}}$$

$$= \frac{\sqrt{r} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2r - R}}{\sqrt{2r - R}} = 5$$

$$12L \quad \frac{26}{50}$$

$$R = 1,92r$$

$$R^2 + r^2 - 2rR + 4rR - 4r^2$$

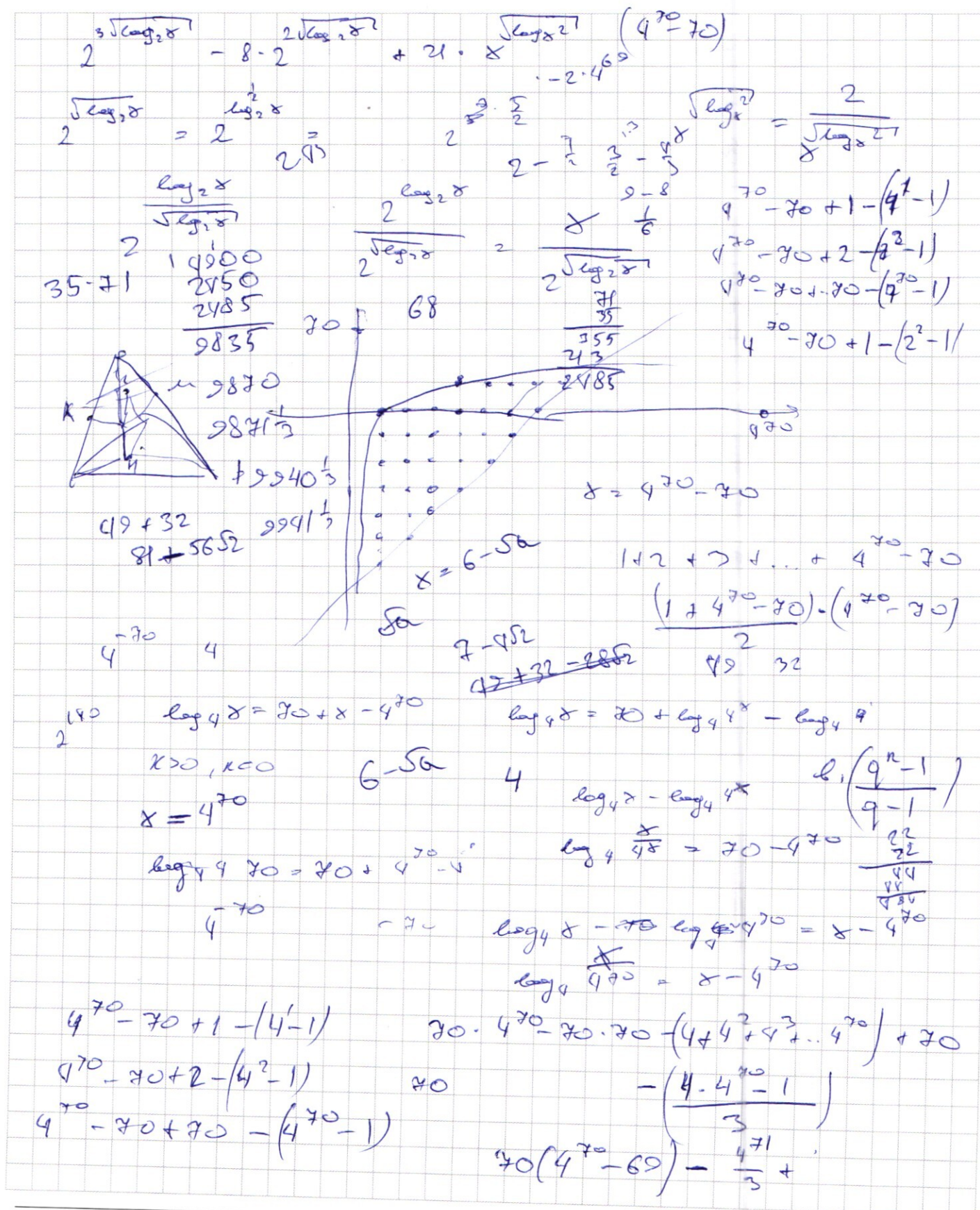
$$R^2$$

$$25 = 50r - 25R$$

$$25R = 48r$$

$$R = \frac{48}{25}r$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$70(4^{70}-69) + \frac{4^{71}-4}{3} + \frac{(1+4^{70}-70)(4^{70}-70)}{2}$$

$$\frac{4(4^{70}-1)}{3} \quad \frac{4(4^{35}-1)(4^{35}+1)}{3}$$

$$70(4^{70}-69) + \frac{4^{71}-4}{3} + \frac{(4^{70}-69)(4^{70}-70)}{2}$$

$$(4^{70}-69)(70 + 4^{70} \cdot 2 - 35) + \frac{4^{71}-4}{3}$$

$$(4^{70}-69)(35 + 2 \cdot 4^{69}) + 4$$

$$\frac{(4^{70}-69)(70+4^{70})}{2} + \frac{4^{71}-4}{3}$$

$$\frac{(4^{70}-70)(4^{70}+70)}{2} - 35 - 2 \cdot 4^{69} + \frac{4^{71}-4}{3}$$

$$\frac{4^{140} - 70^2}{2}$$

$$2 \cdot 4^{139} - 4 \cdot 35 \cdot 70 - 35 - 2 \cdot 4^{69} + \frac{4^{71}-4}{3}$$

$$-35-69 = 35-71 \quad 2 \cdot 4^{69}(4^{70}-1) - 35 \cdot 71 + \frac{4(4^{70}-1)}{3} =$$

$$= (4^{70}-1)\left(\frac{4}{3} + 2 \cdot 4^{69}\right) - 35 \cdot 71$$

$$\frac{1}{3}(4^{70}-1)(4 + 2 \cdot 4^{69}) - 35 \cdot 71$$

$$\frac{4}{3}(4^{70}-1) \cdot \frac{1}{2}(1 + 2 \cdot 4^{69}) - 35 \cdot 71$$

4 2 1 40
2 1 2
1 2 1