

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} \leq 72$$

$$\begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ \log_2 x \geq 0 \text{ ОДЗ} \quad (x > 1) \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

~~$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = k$$~~

пусть $2^{\sqrt{\log_2 x}} = k$

тогда $x^{\sqrt{\log_2 2}} = k$

$$\sqrt{\log_2 2} \cdot \log_2 x = \log_2 k$$

$$\frac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2 2}} = \log_2 k$$

$$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 k \rightarrow k = 2^{\sqrt{\log_2 x}} = k$$

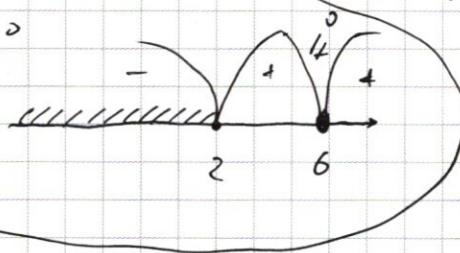
$$k^3 - 14k^2 + 60k - 72 \leq 0$$

$k = 2$

$$(k-2)(k^2 - 12k + 36) \leq 0$$

$$(k-2)(k-6)^2 \leq 0$$

$$k \in (-\infty; 2] \cup \{6\}$$



① $k = 6$
 $2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6$

$$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 6$$

$$\log_2 x = \log_2^2 6$$

$$x = 2^{\log_2^2 6}$$

② $k \leq 2$ $2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 2$

$$\sqrt{\log_2 x} \leq 1$$

$$\log_2 x \leq 1$$

$$x \leq 2, \text{ но с ОДЗ } x \in (1; 2]$$

Ответ: $x \in (1; 2] \cup \{2^{\log_2^2 6}\}$

$$\textcircled{2} \frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

ОАЗ:

$$\begin{cases} \cos 3x \neq \sin 3x \\ \cos 3x \neq -\sin 3x \end{cases} \rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

, $\cos 6x \neq 0$ из ОАЗ $\rightarrow$

$$\rightarrow \cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x = \cos 6x$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 6x$$

Ⓘ

$$7x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ не подходит по ОАЗ}$$

Ⓜ

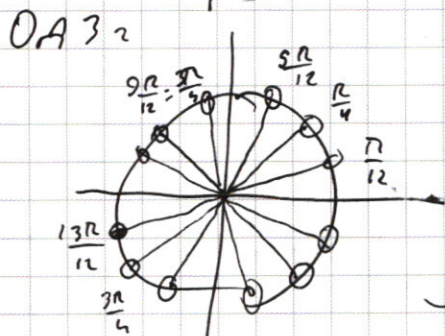
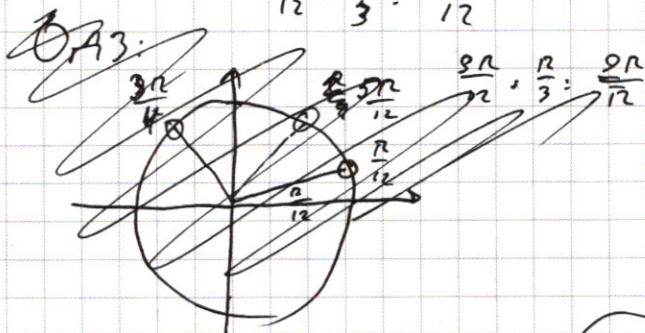
$$7x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k$$

$$13x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} = \frac{\pi + 8\pi k}{52}$$

попробуем из ОАЗ

$$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$$



Пересечем решение и ОАЗ
каждое есть $\rightarrow$ пересечение $\checkmark$

$\rightarrow$ Ответ: ~~не подходит~~

$$x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

если q - вероятность выпадения орла не более 28 раз $\Rightarrow$
 $\rightarrow q =$ вероятности того, что решка выпадает более 41
 раз. Т.е. выпадение орла и решки - события равновероятны,
 то q - вероятность того, что орел выпадает более 41 раз.

Если: p - вероятность больше 42 } $q - p$
 q - вероятность больше 41 } ~~$q - p$~~ - вероятность того
 $q = \frac{C_{70}^{42} - C_{70}^{70}}{2^{70}}$ $p = \frac{C_{70}^{43} + C_{70}^{44} - C_{70}^{70}}{2^{70}}$ орел выпадет ровно 42
 раз.

Орел может выпасть 0, 1, 2, ..., 70 раз, ровно 28
 раз решка выпадет $\Rightarrow p - q = \frac{1}{2}$

Всего 2^{70} различных комбинаций подброшен монеты.
 Из них C_{70}^{42} - вариант, когда выпадает ровно 42
 орла $\rightarrow$ ~~$p - q = \frac{1}{2}$~~

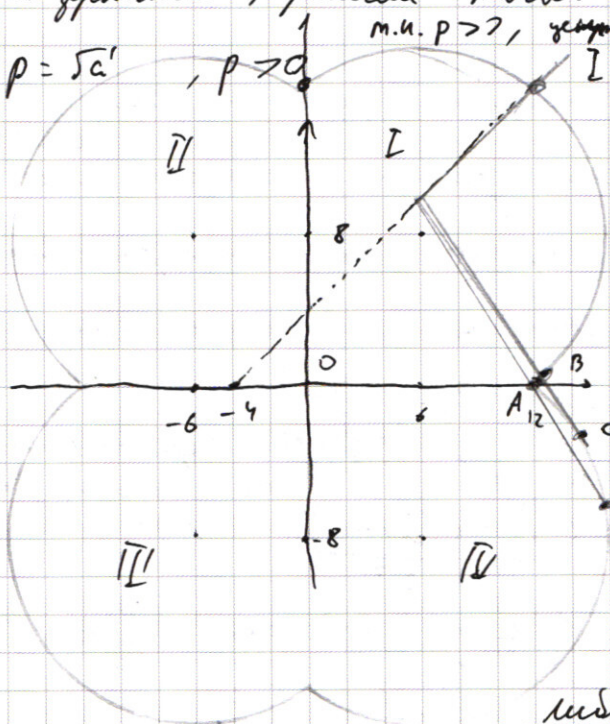
Ответ: $p - q = \frac{C_{70}^{42}}{2^{70}}$

$$5) \begin{cases} x = |y - 5a| + 5a - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

I - график модуля, получившийся
уменьшил центр на ось
 $y = x + 4$

II - окружности, все точки которых принадлежат II-IV четвертям, и графиком перенесен точки с первого четверти

пусть $p = 5a$, $p > 0$ м.и. $p > 7$, центр лежит либо в I либо в II кв.



$$I: x = |y - 5a| + 5a - 4$$

$$1) y > 5a$$

$$x = y - 4 \rightarrow y = x + 4$$

$$2) y \leq 5a \rightarrow x = 2p - 4 - y$$

$$\begin{aligned} \text{Вспомогательные: } y &= p \\ y &= 2p - 4 - x \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x &= p - 4 \\ x &= p - 4 \end{aligned} \rightarrow y = x + 4$$

Одна точка будет всегда, пока
центр лежит в кв. I.

Одна из точек образует

с прямой. III. и. $p \geq 7$

Вспомогательная линия

либо проходит через м. А.

общую точку окружностей I и IV, а затем пересекать окр. IV,
либо через м. C и быть касательной к окр. IV, но и
точка сн точки пересекать окр. I. Уточню всего 2 точки, когда
3 решения. A: (12, 0)

$$1) y = 2p - 4 - x \quad 0 = 2p - 4 - 12 \quad p = 8 \quad 5a = 8 \quad a = 6.4$$

$$2) \text{ окр. IV: } y = 2p - 4 - x \quad x = 2p - 4 - y$$

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + (y+8)^2 &= 10^2 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\ (2p-y-10)^2 + (y+8)^2 &= 100 \end{aligned}$$

Продолжение на стр. №5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

если S - произведение

П.ч. это значение $\rightarrow$ 1 кв. точка $\rightarrow D=0$

П.ч. значение $\rightarrow$ уравнен член $144x^2$

$$\frac{D}{4} = (p-1)^2 - (2p^2 + 8p - 24)p = 0$$

$$\frac{D}{4} = (p-1)^2 - (2p^2 + 8p - 24)p$$

$$p^2 - 2p - 49 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 550 \quad p = 1 \pm \sqrt{550}$$

$$p > 0 \rightarrow p = 1 + \sqrt{550} = \sqrt{551} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 51 + 2\sqrt{550}$$

$$\text{Answer: } a = 64$$

$$a = 51 + 2\sqrt{550}$$

$$\frac{D}{4} = 25 + 25 = 50$$

$$p = 5 \pm \sqrt{50} = 5(1 \pm \sqrt{2})$$

$$\sqrt{a} = 5(1 + \sqrt{2})$$

$$a = 25(3 + 2\sqrt{2}) = 75 + 50\sqrt{2}$$

$$\frac{D}{4} = 25 + 25 = 50$$

$$p = -5 \pm \sqrt{50} = -5(1 \pm \sqrt{2}) \quad p > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow p = 5(\sqrt{2} - 1)$$

$$(6, 8)$$

$$(8, 2) \quad 4 - 8 + 2$$

$$1^2 + 2^2 = 500$$

$$-8 + \sqrt{50} = 2p - 4 - (6 + \sqrt{50})$$

$$2x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

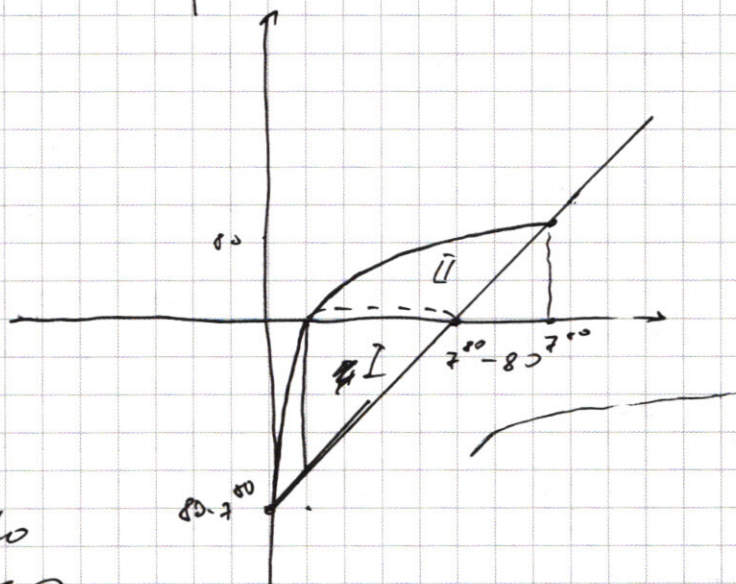
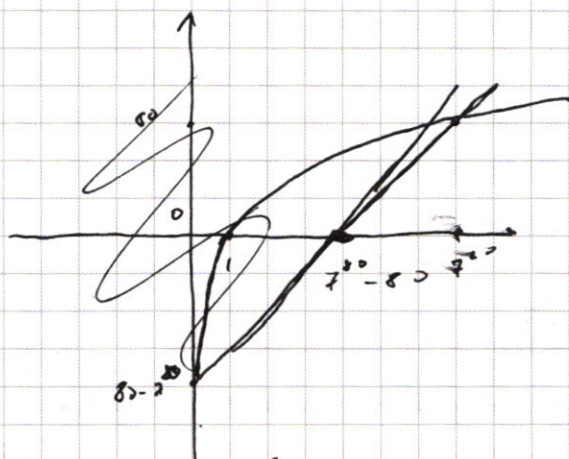
$$+8 + \sqrt{\frac{5}{2}} = 2p - 4 - (6 + \sqrt{\frac{5}{2}})$$

$$+8 + \sqrt{\frac{5}{2}} = 2p - 4 - 10 - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$2p = 2 + 2\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$p = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

⑦
$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80} \\ y \leq \log_7 x \end{cases}$$



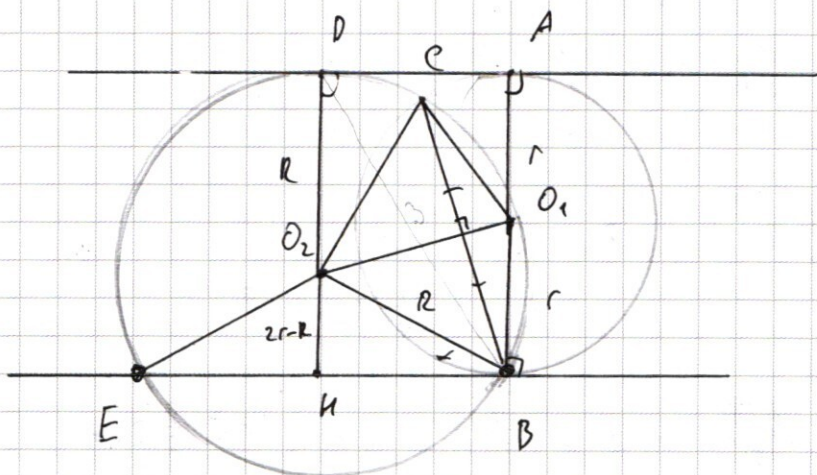
рассчитаем площадь
при $y \leq 0$

$$S_1: 7^{80} - 80 + 7^{80} - 81 + \dots + 1 = \frac{(7^{80} - 79)(7^{80} - 80)}{2}$$

или $7^{80} S_2: 7^{80} - 80 +$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



O_2H - перпендикуляр на EB тогда $R(\omega_1) = r \rightarrow O_2H = 2r - R$
 $R(\omega_2) = R$

пусть $\angle O_2BH = \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{2r - R}{R}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{4r^2 - 4rR + R^2}{R^2} = \frac{-4r^2 + 4rR}{R^2}$$

$$\cos \alpha = 2 \sqrt{\frac{-r^2 + rR}{R^2}}$$

$$S(O_2EBH) = R \sin \alpha \cdot R \cos \alpha$$

$$S(BO_1CO_2) = R \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R \cdot r \cos \alpha$$

$$S(BO_1CO_2) = 3S(O_2EBH)$$

$$R \cdot r \cos \alpha = 3R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{r}{R} = 3 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{2r - R}{R}$$

$$\frac{2r - R}{R} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = R$$

$$r = 6r - 3R$$

$$3R = 5r$$

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2r - R}{R} = \frac{2r}{R} - 1 =$$

$$= \frac{6r}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

- Проверяем на стороне 8

6 - продолжение

$$\sin \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow HB = \frac{\sqrt{24}}{5} R$$

$$HB^2 + HD^2 = BD^2$$

$$3^2 = 9$$

$$\frac{24}{25} R^2 + 4R^2 = 9$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow OD = \frac{1}{5} R \rightarrow DH = \frac{6}{5} R$$

$$\frac{24}{25} R^2 + \frac{36}{25} R^2 = 9$$

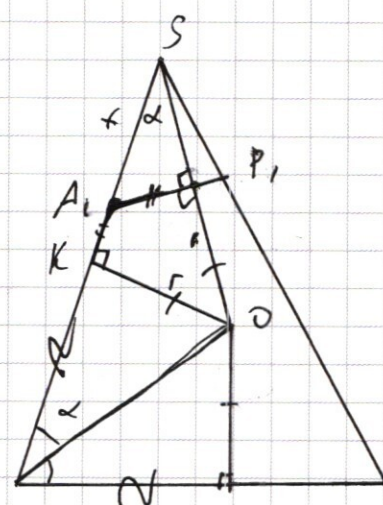
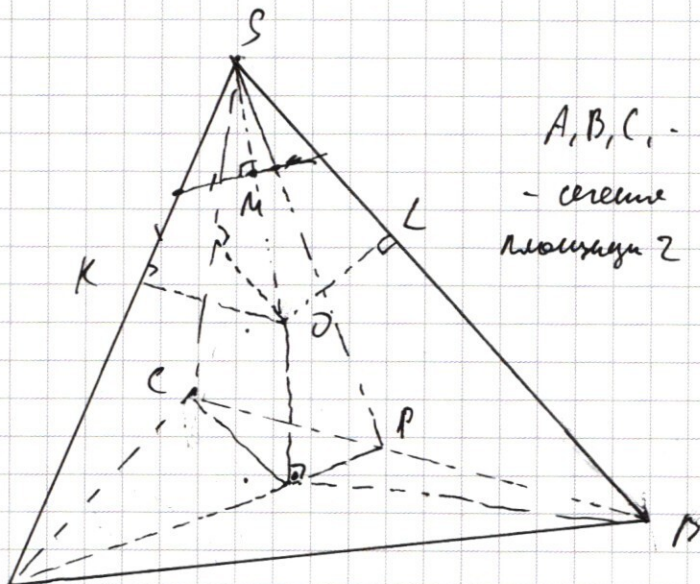
$$\frac{12}{5} R^2 = 9$$

$$R^2 = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} \rightarrow R = \frac{\sqrt{15}}{2}, \text{ т.е. } r = \frac{3}{5} R \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④



A

$$x \cos \alpha \cdot (x \cos \alpha + r) = KS^2 \quad KS = r \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{4}$$

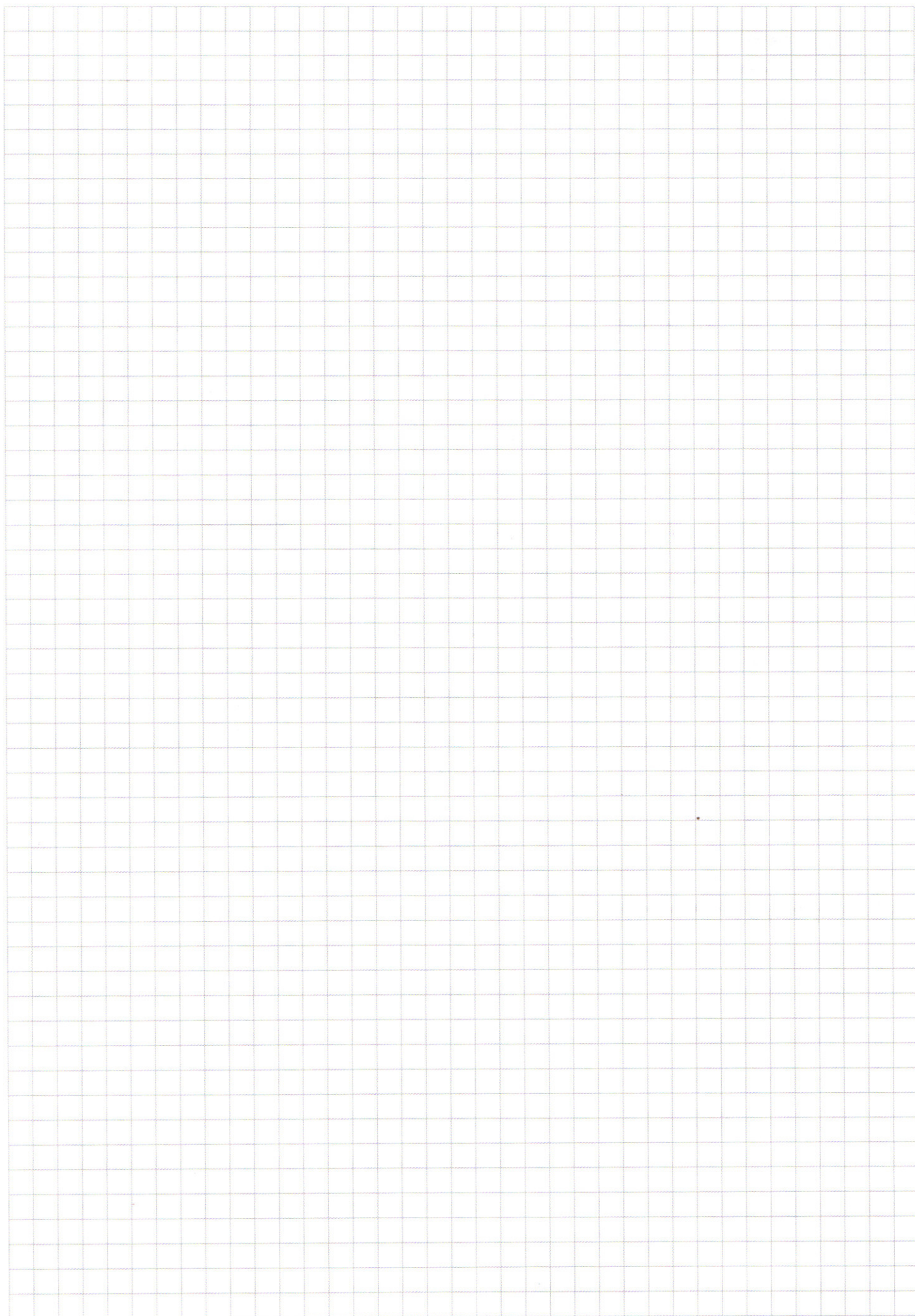
$$\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

O - центр Основания

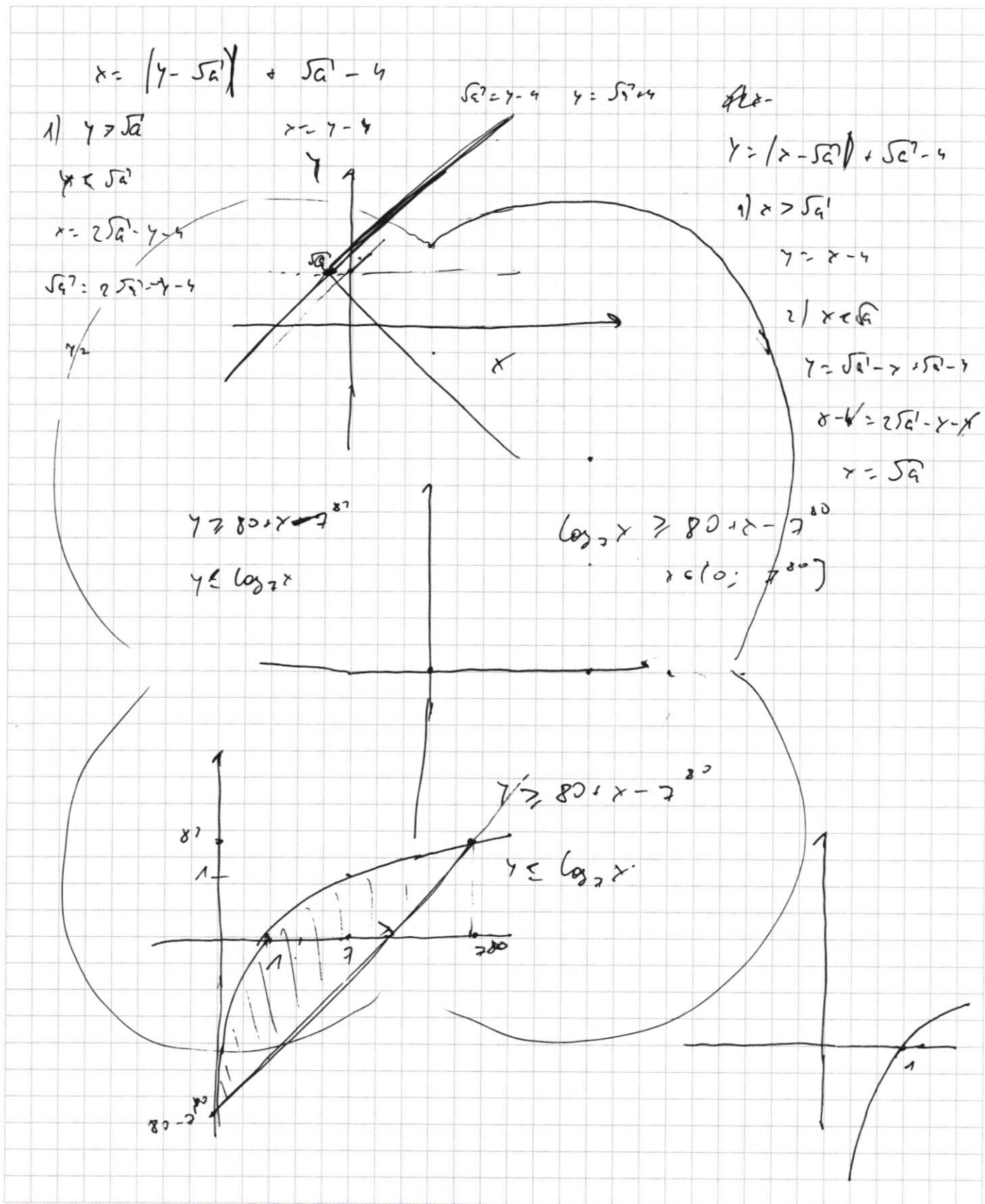
$$x^2 \cdot \frac{7}{16} + 8r \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = r^2 \cdot \frac{7}{9}$$

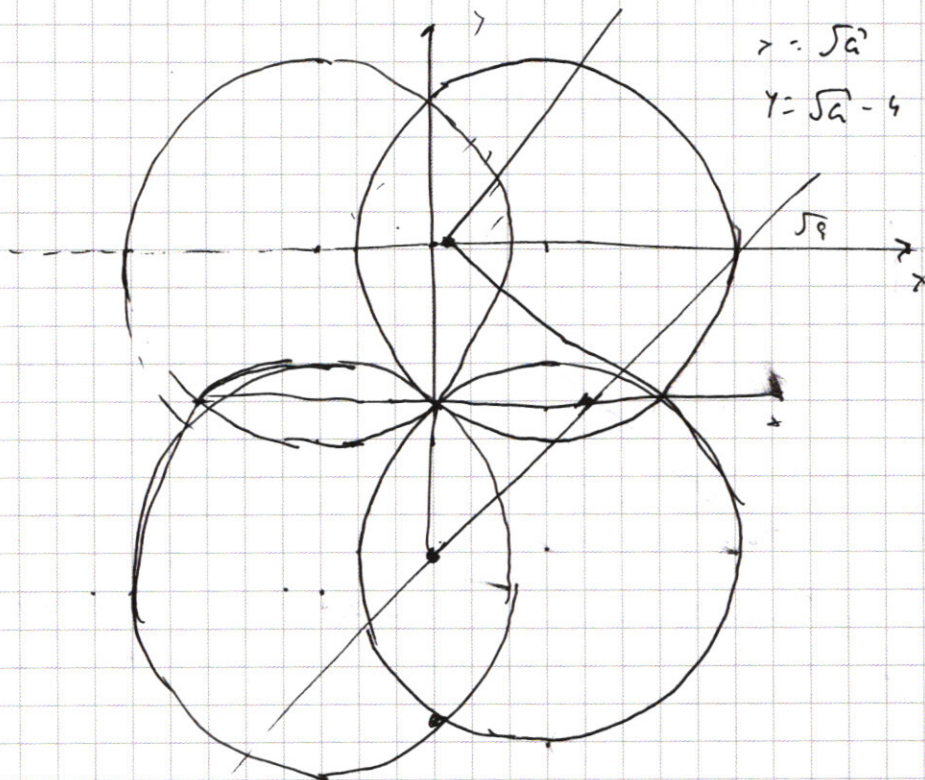
$$\frac{x}{r} = t$$

$$\frac{7}{16} t^2 + \frac{t \sqrt{7}}{4} = \frac{7}{9}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

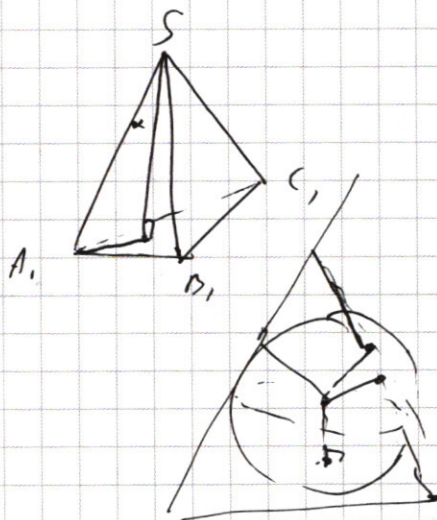
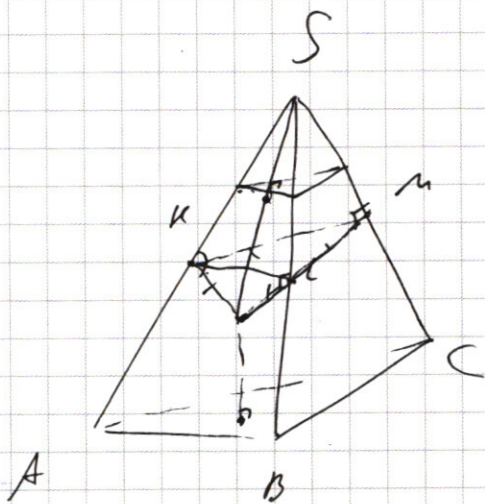




$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 3x \cos 4x + \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cdot \cos 6x$$

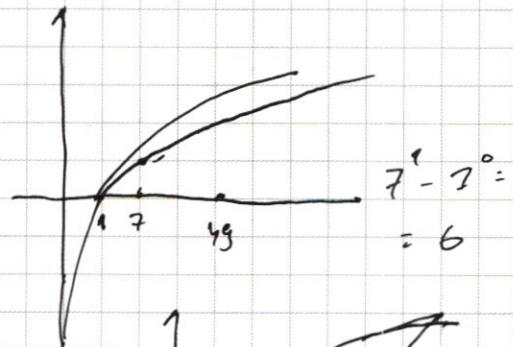


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

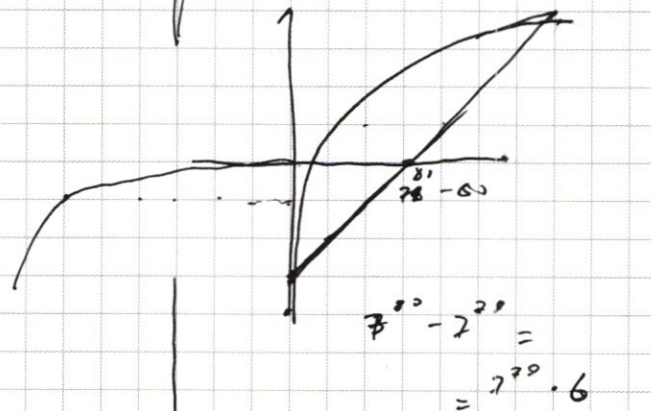
1)
$$\frac{51 + 2\sqrt{5}}{2^{20}} \cdot 69$$

$$\frac{43}{2^{20}} + \frac{44}{2^{20}} + \frac{45}{2^{20}} + \dots + \frac{20}{2^{20}}$$

$$q = \frac{C_{20}^1 + C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{20}}{2^{20}}$$



$$q = \frac{C_{20}^1 + C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{20}}{2^{20}}$$



2)
$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - \cos 4x \sin 3x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

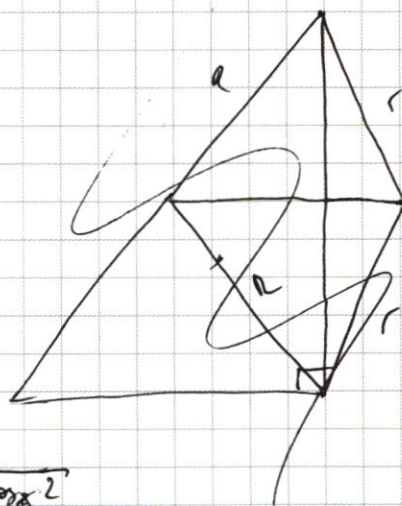
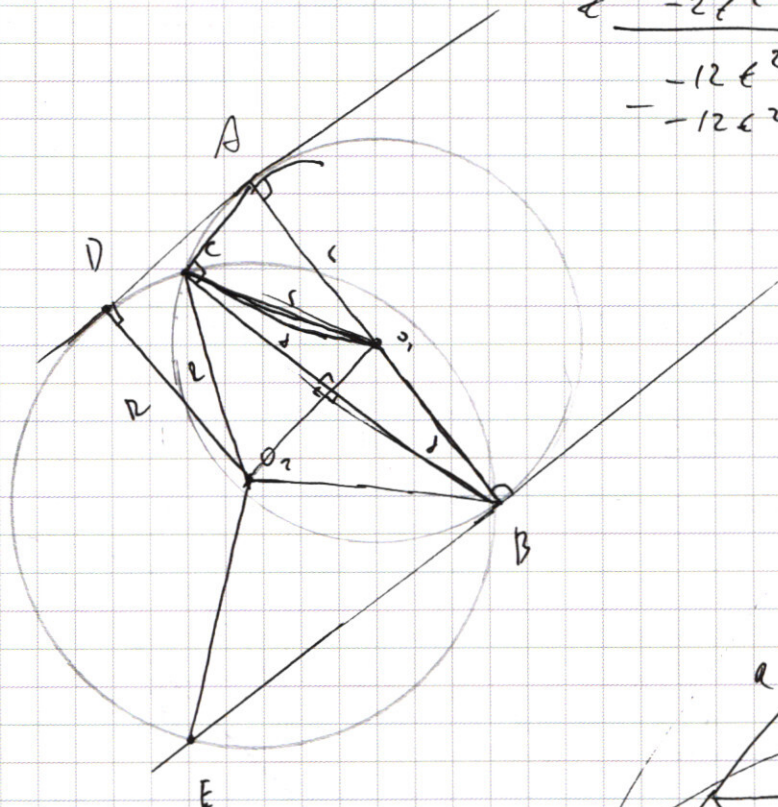
$$\cos 4x = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x$$

$$\sin 4x = \sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x$$

$$\sin x \cos^2 3x + \cos x \cos 3x \sin 3x - \sin 3x \sin x \cos 3x - \cos x \sin^2 3x = \cos x \sin^2 3x$$

$$\cos^2 3x \cos x - \cos 3x \sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x \sin 3x - \sin x \sin^2 3x$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 14x^2 + 60x - 72 & x - 2 \\
 \hline
 -x^2 + 2x^2 & \\
 \hline
 -12x^2 + 60x - 72 & \\
 -12x^2 + 24x & \\
 \hline
 36x - 72 &
 \end{array}$$



$$3) \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$\begin{aligned}
 a^{b^{\frac{1}{2}}} &= (a^b)^{\frac{1}{2}} \\
 8 - 56 + 120 - 72 &= \\
 &= 128 - 128
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^{4^{\frac{1}{2}}} &= (2^4)^{\frac{1}{2}} = 4 \\
 2^{1^{\frac{1}{2}}} &= 2
 \end{aligned}$$

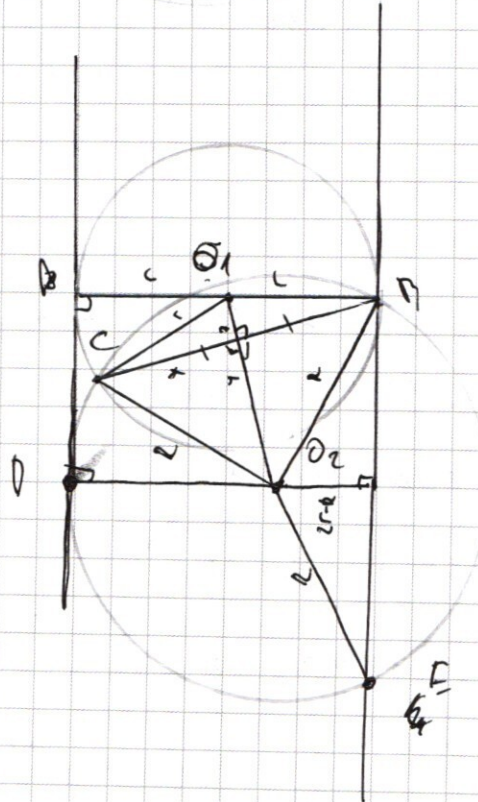
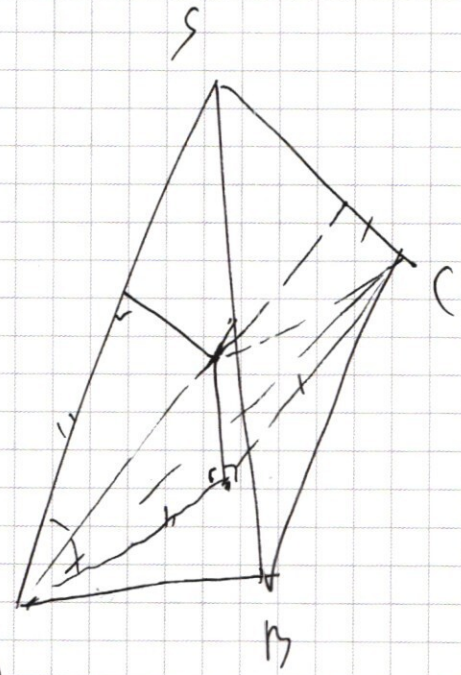
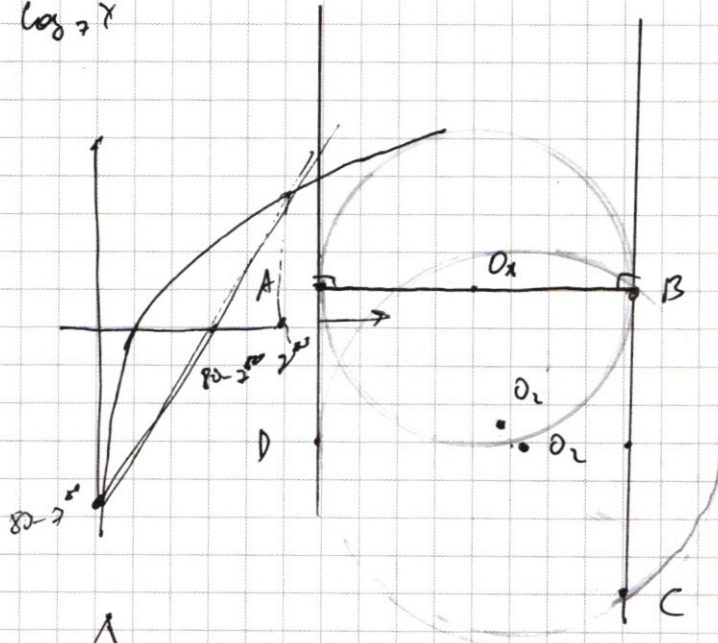
$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = e$$

$$x^{\sqrt{\log_2 x}} = k$$

$$\sqrt{\log_2 x} \cdot \log_2 x = \log_2 k$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \gamma \approx 80^\circ \\ \gamma \in \log \gamma \end{cases}$$



$$\begin{cases} \gamma \approx 80^\circ \\ \gamma \in \log \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma \approx 80^\circ \\ \gamma \in \log \gamma \end{cases}$$

