

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p - q$.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

*Р-орёл вып не мен 61
q-решка вып не мен 61 раз*

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

~~Вариант~~ Выпадение x орлов равносильно выпадению $(110-x)$ решек. (Т.к. выпадает орёл и решка, и всего 110 выпадений). След-но, выпадение орла меньше 49 раз эквивалентно выпадению решки больше 61 раз. Выпадение орла и решки равновероятно, след-но, вероятность выпадения орла больше 61 раз равна вероятности выпад. решки более 61 раз: $= q$. ~~решка больше 61 раз~~

Пусть A - кол-во вариантов выпадения орла ровно 61 раз, B - кол-во вариантов выпадения орла больше 61 раз (из всех возможных вариантов выпадения орлов и решек), C - кол-во всех вариантов выпадения орлов и решек. Тогда $p = \frac{A+B}{C}$, $q = \frac{B}{C}$, $p - q = \frac{A}{C}$. $A = \frac{110!}{61! \cdot 49!}$, $C = 2^{110}$. след-но, $p - q = \frac{110!}{61! \cdot 49! \cdot 2^{110}}$

Отв: $\frac{110!}{61! \cdot 49! \cdot 2^{110}}$

N 3

$$24 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 + 55 \cdot x \sqrt{\log_3 3} \leq 75$$

$$\frac{\sqrt{\log_3 x} \cdot 3}{3} - 13 \cdot 3 - 55 \cdot \left(3^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}} \leq 75$$

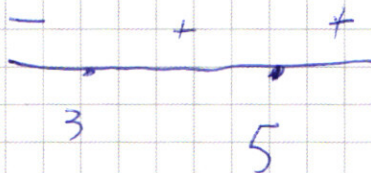
$$\left(\frac{\log_3 x}{3}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}} = 3 \sqrt{\frac{(\log_3 x)^2}{\log_3 x}} = 3 \sqrt{\log_3 x}$$

$$\left(3^{\sqrt{\log_3 x}}\right)^3 - \left(13 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}}\right)^2 + 55 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} - 75 \leq 0$$

Пусть $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$

$$t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leq 0$$

$$(t-3)(t-5)^2 \leq 0$$



$$t = 5, \quad t \leq 3$$

1) $t = 5$

$$3^{\sqrt{\log_3 x}} = 5$$

$$\sqrt{\log_3 x} = \log_3 5$$

$$\log_3 x = (\log_3 5)^2$$

$$x = 3^{(\log_3 5)^2}$$

2) $t \leq 3$

$$3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3$$

$$\sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\log_3 x \leq 1$$

$$x \in (0, 3]$$

Кроме ОДЗ: $\log_3 x \geq 0$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$\Rightarrow x > 1$. Тогда $x \in (1, 3] \cup 3^{(\log_3 5)^2}$

Оконч: $x \in (1, 3] \cup 3^{(\log_3 5)^2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

На графике обозначим все решения 2-го ур-я:

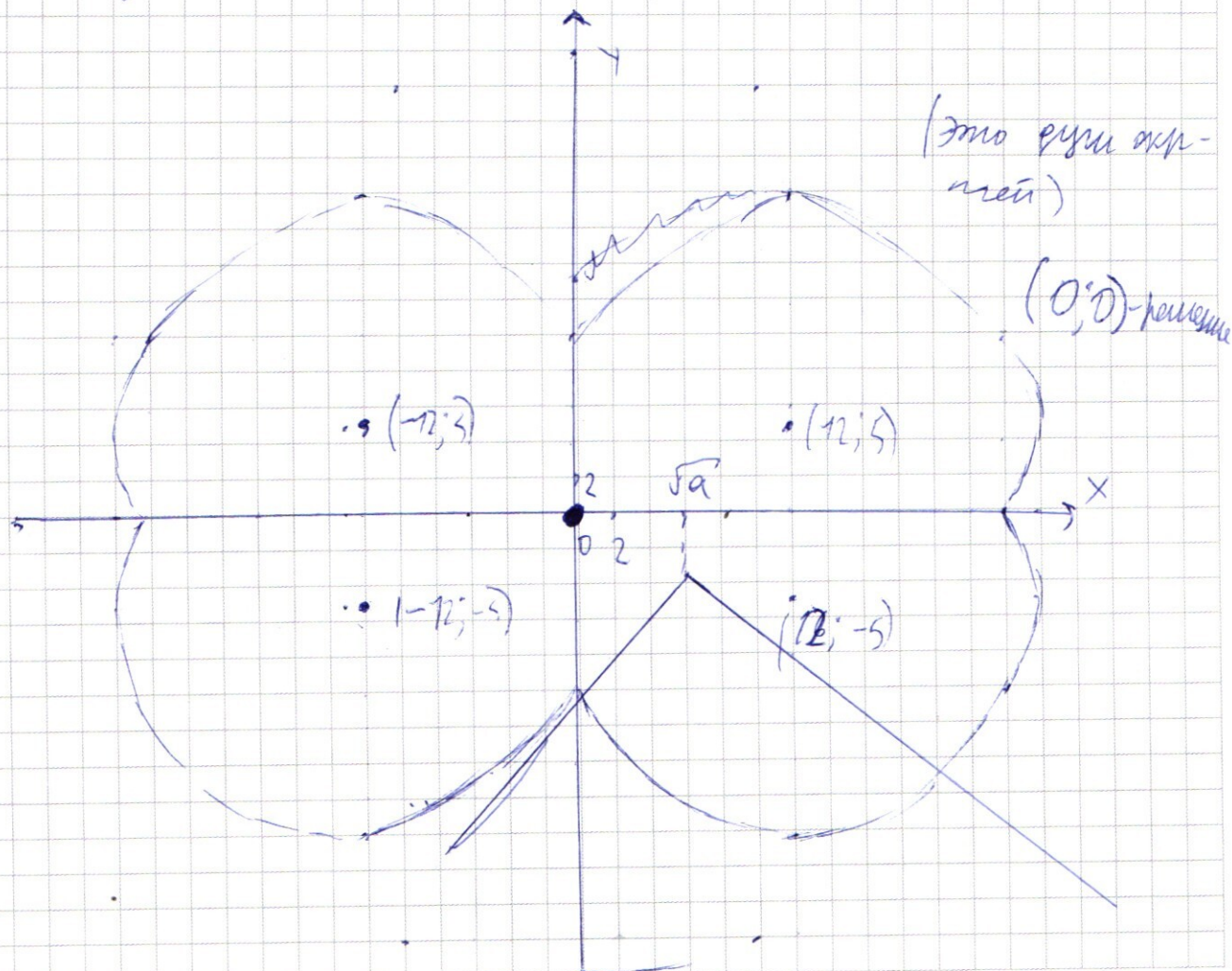
$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 169 = 13^2$$

при $x, y \geq 0$ график задаёт окр-ть радиусом 13, ~~с~~ с центром в точке $(-12; 5)$

при $x < 0, y \geq 0$ задаёт окр-ть с $R=13$ с центром в $(-12; 5)$

при $x \geq 0, y < 0$ с центром в $(12; -5)$

при $x, y < 0$ с центром в $(-12; -5)$



Получили 1-е ур-е: $y = -|x + \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}$

при $x \geq \sqrt{a}$ $y = -x + \sqrt{a} + 2 - \sqrt{a} = 2 - x$

при $x < \sqrt{a}$ $y = x - \sqrt{a} + 2 - 2\sqrt{a} = x + 2 - 3\sqrt{a}$

Заметим, что при $a > 144$ 1-й и 2-й графики не пересекаются, поэтому нет

При $a \in (4 - 2\sqrt{3}; 12)$ график 1-й ф-и пересекает часть окружности в 4-й коор. четверти в двух точках

При $a \in$

При $\sqrt{a} \in (-2.5 + 6.5\sqrt{2}; 12)$ график 1-й ф-и пересекает часть окружности в 4-й коор. четверти в 2-х точках

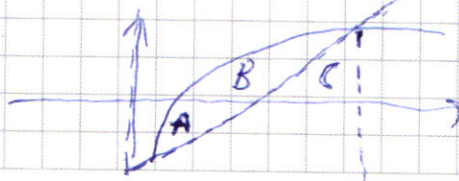
При $\sqrt{a} \in [6; 6.5\sqrt{2} - 2.5)$ график 1-й ф-и пересекает часть окружности в 3 коор. четверти в 2-х точках, часть в 4-й коор. четверти в одной точке, и есть ровно 3 реш.

При $\sqrt{a} = 1$ график 1-й ф-и пересекает график 2-й в точке $(0; 0)$, а также по одному разу в 3 и 4 коор. четверти, есть ровно 3 решения.

При всех остальных $\sqrt{a}$ графики пересекаются в 2-х точках (т.к. $\sqrt{a} \geq 0$)

Поэтому $a = 1$, и $a \in$ ~~$[2.5 - 6.5\sqrt{2}; 12)$~~
и $a \in [36; 90.75 - 32.5\sqrt{2}) \leftarrow \text{отв}$

Заметим, что при $x = 5^{110}$ $\log_5 x = 110 + x - 5 = 110$,
след-но, графики пересекаются в точке $(5^{110}; 110)$. Схематично изображены графики.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что ~~любой x удовлетворяет~~ ^{любой $x > 0$} любой y , удовлетворяющей $0 < y < 110 + x - 5$ удовлетворяет системе неравенств. Наибольшее кол-во таких y : Оно равно $5 - 110 + 5 - 110 + \dots + 5 - 109 + \dots + 2 + 1 = \frac{(5 - 110) + 5 - 110}{2}$

Все y , удовлетворяющие $0 \leq y \leq \log_5 x$ удовлетворяют системе неравенств, кроме тех, которые меньше $110 + x - 5$. Наибольшее количество y в $0 \leq y \leq \log_5 x$, а потом вычтем кол-во $y \leq 110 + x - 5$.

1) при $x \in [5^k, 5^{k+1})$ равно $k+1$ пар (x, y) подходит к условию. Тогда кол-во пар чисел (x, y) , где $0 \leq y \leq \log_5 x$ равно $(5-1) + 2 \cdot (25-5) + 3 \cdot (5^3-5^2) + 4 \cdot (5^4-5^3) + \dots + 110 \cdot (5^{109}-5^{108}) =$
 $= 5 - 1 + (5^2 - 2 \cdot 5) + (2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5) + \dots + (109 \cdot 5^{109} - 110 \cdot 5^{108}) + 110 \cdot 5^{110} = 110 \cdot 5^{110} - (5^{109} + 5^{108} + \dots + 25 + 5 + 1) = 110 \cdot 5^{110} - \frac{5^{110} - 1}{4}$

Из этих пар равно $(1 + 2 + 3 + \dots + 109)$ пар не подходят к условию $y = 110 + x - 5$, их $\frac{109 \cdot 110}{2}$

Тогда всего пар чисел $\frac{(5^{110} - 111) + 5^{110} - 111}{2} + 110 \cdot 5^{110} - \frac{5^{110} - 1 - 109 \cdot 110}{2} =$
 $= \frac{5^{220} - 222 \cdot 5^{110} + 111 \cdot 2 + 5^{110} - 111 + 220 \cdot 5^{110} - 109 - 109}{2} - \frac{5^{110} - 1}{4} =$
 $= \frac{5^{220} - 5^{110} + 220}{2} - \frac{5^{110} - 1}{4} = \frac{5^{220}}{2} - \frac{3}{4} \cdot 5^{110} + \frac{441}{4}$

12

$$\frac{\cos 11x - \sin 14x}{\cos 5x - \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 11x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \cos 5x \sin 11x + \sin 5x \sin 14x = -\sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\cos(9x) - \sin(9x) = -\sqrt{2} \cos(10x)$$

$$\cos(9x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) = -\sqrt{2} \cos(10x)$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(18x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos(10x)$$

$$\sin\left(18x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos(10x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 18x\right) = \cos(10x)$$

$$\cos\left(18x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(10x)$$

$$18x - \frac{\pi}{4} = 10x + 2\pi k$$

$$18x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi k}{9} + \frac{\pi}{36}$$

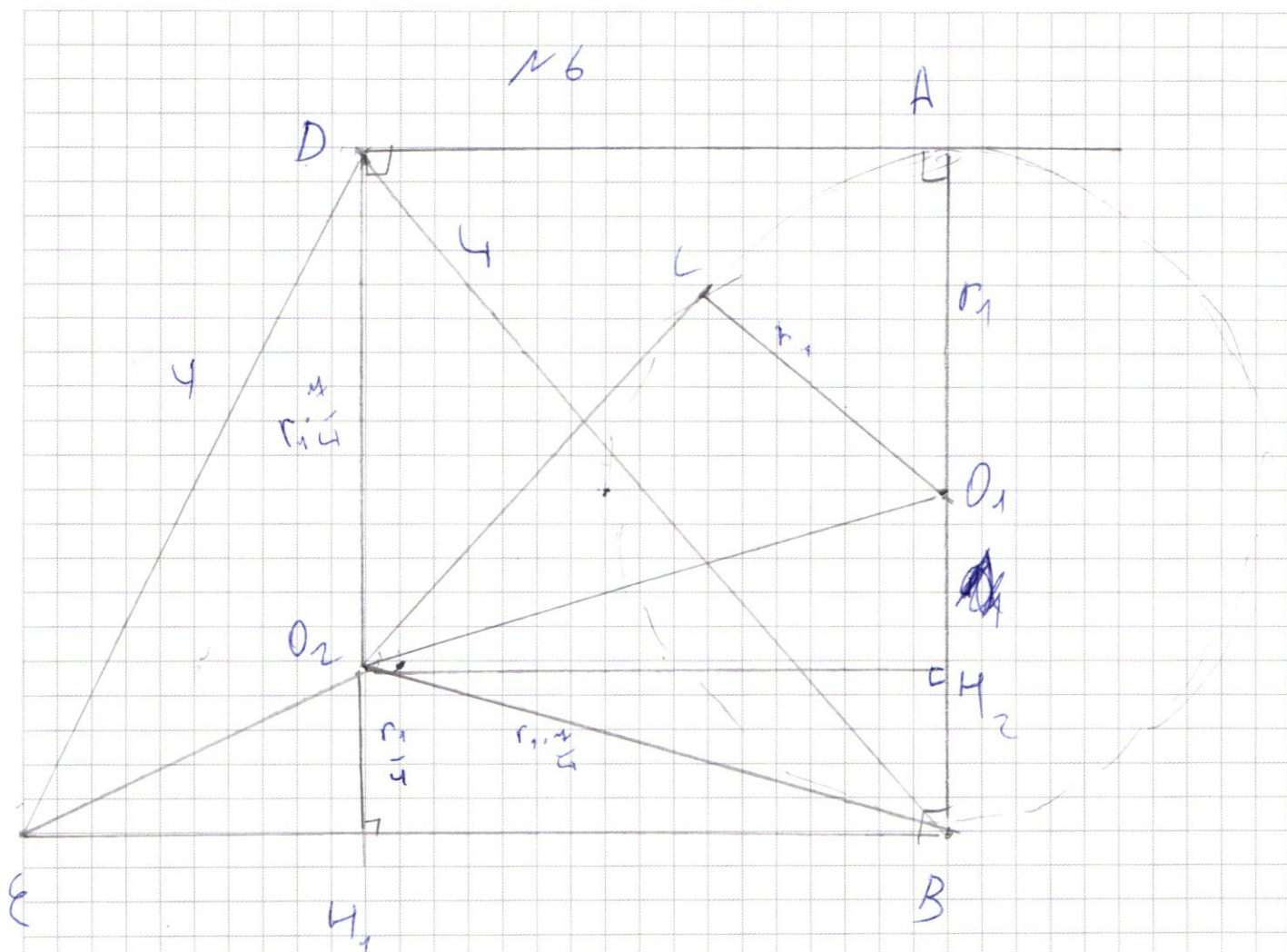
$$2) \quad 18x - \frac{\pi}{4} = -10x + 2\pi k$$

$$28x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi k}{14} + \frac{\pi}{112}$$

Оконч.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Решение. Опустим перпендикуляры OH_1 и OH_2 на EB и O_1B соответственно. $O_2E = O_2B = r_2$, O_2H - общая, $\angle EHO_2 = \angle O_2H_1B \Rightarrow \triangle O_2H_1 = \triangle O_2H_1B$, $S(\triangle O_2H_1B) = S(\triangle O_2EB)$

$O_2C = O_2B = r_2$, $O_1C = O_1B = r_1$, O_1O_2 - общая, следовательно, $\triangle O_2O_1B \Rightarrow \triangle O_2CO_1 =$

$= \frac{S(\triangle BO_1CO_2)}{2}$. Следовательно, $\frac{S(\triangle O_1O_2B) \cdot S(\triangle BO_1CO_2)}{S(\triangle O_2H_1B) \cdot S(\triangle O_2EB)} = 1$.

$$S(\triangle O_2HB) = \frac{H_1B \cdot O_2H_1}{2}, \quad S(\triangle O_2O_1B) = \frac{H_2O_2 \cdot O_1B}{2} = \frac{H_1B \cdot O_1B}{2}$$

След-но, $O_1B = 4 O_2H_1 = r_1$.

$\angle O_2DA = \angle O_2HB = 90^\circ$, след-но, D, O_2, H лежат на 1 прямой. DH, BA - взаимно перпендикуляр, след-но $DH_1 = AB$. $DH_1 = DO_2 + O_2H_1 = r_2 + \frac{r_1}{4} = 2r_1$

$$r_2 = 2r_1 - \frac{r_1}{4} = \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right)r_1$$

$$BH_1 = \sqrt{\left(\frac{4}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} r_1 = r_1 \cdot \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16}} = \sqrt{3} r_1$$

$$DB^2 = H_1B^2 + DH_1^2 = 16 = 4r_1^2 + 3r_1^2$$

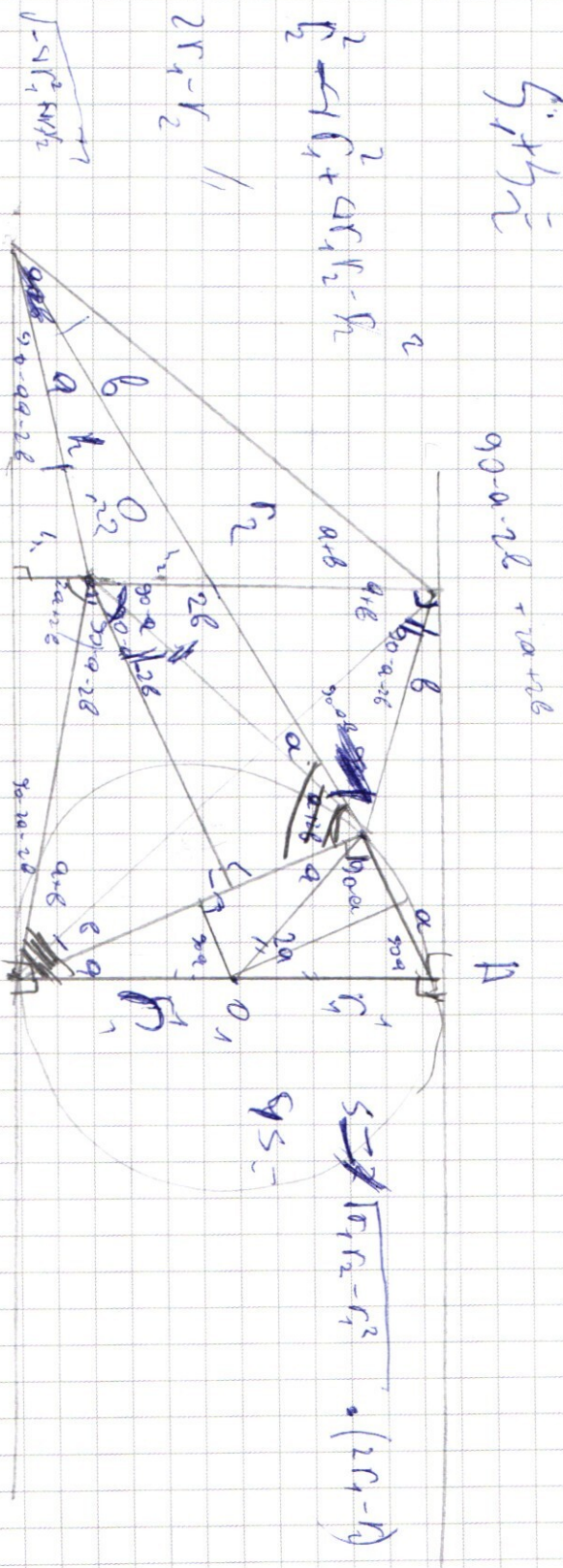
$$r_1^2 = \frac{16}{7}$$

$$r_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$r_2 = \sqrt{4}$$

Отв: $r_2 = \frac{4}{\sqrt{7}} r_1$, $r_2 = \sqrt{4}$, $r_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$i \cos x - \sin x = -\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2 - r^2}} \cdot (2r_1 - r)$$

$$\frac{\cos^2 5x - \sin^2 x}{\cos^2 5x - \sin^2 x} = -\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2 \cos^2 5x}$$

$$s = \frac{r^2 \sin^2(\theta + \frac{1}{2}\pi)}{r^2 \sin(2\theta + \frac{1}{2}\pi) + r_1^2 \sin 2\alpha}$$

$$\frac{S_F}{r^2 \sin \theta}$$

$$-\sqrt{2} \int_2^2 \cos 5x \sin x + \cos 5x \cos x +$$

$$\sin \sin \sin$$

$$s_1 + s_2 + ks_1 +$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos(90 - 9x) = 1$
 $\cos 14x - \sin 14x = -\sqrt{2}$
 $\cos 5x - \sin 5x = -\sqrt{2}$
 $2 \sin 45$
 $0, 10$
 $\cos 14x + \cos 14x = \frac{13}{2}$
 $12^2 + 2 = 165$
 $\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \sin 14x \cos 5x + \sin 14x \sin 5x$
 $\cos^2 5x - \sin^2 5x$
 $\cos 10x$
 $\frac{-12 + \sqrt{13}}{2}$
 $0.5, 6.5$
 $\cos(a+b) = \cos a \cos b$
 $t - 13t + 55t - 45 \leq 0$
 $t = 3$
 $\cos(a+b) = 2 \cos(a/2) \cos(b/2)$
 $\sqrt{109}x$
 10.5
 $\sqrt{109}x$
 3
 $\sqrt{109}x$
 $\cos(a+b) = \cos(a/2) \cos(b/2)$
 $165 = 45$

$$t^2 - 13t + 55t - 45 = (t-3)$$

$$t^2 - 3t^2$$

$$t^2 - 10t + 25 = (t-5)^2$$

$$t=7$$

$$-1(t^2 - 30t)$$

$$0=11$$

$$25t = 75$$

$$5.45 + 52.45 - 40$$

$$1) x > \sqrt{a}$$

$$y = -x - \sqrt{a} + 2 - \sqrt{a}$$

$$y = -x^2$$

$$2) x < 0$$

$$x + 2\sqrt{a}$$

$$1) t=5$$

$$2) t=3$$

$$5.45 - 5.08$$

$$52$$

$$x - 10 = 2 - x$$

$$\sqrt[10]{3} x < 3$$

$$< 3$$

$$2x = -12$$

$$\sqrt[10]{3} x < 1$$

$$\sqrt[10]{3} x < 1$$

$$x \in (0; 3)$$

$$7 - 13\sqrt{2} + x = 2$$

$$x = 6$$

$$2x = -5 + 13\sqrt{2}$$

$$z = 7 - 13\sqrt{2}$$

$$-12 + \frac{13}{\sqrt{2}} + z = -5 - \frac{13}{\sqrt{2}}$$

$$или x < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

