

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{\log_2 x}} + 60x^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\log_2 x}}} \leq 72$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} - 72 \leq 0$$

Пусть $2^{\sqrt{\log_2 x}} = m, m > 0$
 $x^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\log_2 x}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$

$$\sqrt{\log_2 x} \cdot \ln x = \ln 2 \cdot \sqrt{\log_2 x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} \cdot \ln x = \ln 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}$$

$$\frac{\ln x}{\ln 2} = \log_2 x$$

$$x^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\log_2 x}}} = m$$

тогда

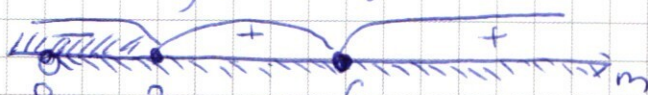
$$m^3 - 14m + 60m - 72 \leq 0$$

$$m^3 - 14m + 60m - 72 = 0$$

$$m = +2 \text{ (делитель -72)}$$

$$m^3 - 14m + 60m - 72 = (m-2)(m^2 - 12m + 36) =$$

$$= (m-2)(m-6)^2$$



$$m \in (-\infty, 2] \cup \{6\}$$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6 = 2^{\log_2 6}$$

$$0 < 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 2$$

$$\sqrt{\log_2 x} \leq 1$$

$$\log_2 x \leq 1 = \log_2 2$$

$$2 > 0 \Rightarrow x \leq 2$$

с учетом ОДЗ $x \in (1, 2] \cup \{6^{\log_2 6}\}$

Ответ: $x \in (1, 2] \cup \{6^{\log_2 6}\}$

ОДЗ $\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

$$\log_2 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\log_x 2 \geq 0$$

$$\log_2 x \geq \log_2 1$$

$$x \geq 1$$

или $x \geq 1, \log_x 2 \geq 0$
всегда

$$\begin{array}{r} m^3 - 14m + 60m - 72 \mid m-2 \\ m^3 - 2m \\ \hline -12m + 60m \\ -12m + 24m \\ \hline 36m - 72 \\ 36m - 72 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\log_2 x = \log_2^2 6$$

$$x = 2^{\log_2^2 6} = 6^{\log_2 6}$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2} \quad \text{OДЗ}$$

$$\cos 3x - \sin 3x \neq 0$$

$$\frac{\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x + \cos 3x \sin 3x - \sin 3x \cos 3x} = \sqrt{2}$$

$$\lg 3x \neq 1$$

$$\frac{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x + (-\sin 4x \sin 3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$3x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 6x$$

$$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\sin 7x - \sin x \cos 7x + \cos x \sin 7x + \sin x \cos 7x - \cos x \sin 7x}{2 \cos 6x} = \sqrt{2} \cos 3x + \sin 3x \neq 0$$

$$\frac{2 \sin 7x + 2 \cos 7x}{2 \cos 6x} = \sqrt{2} \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lg 3x \neq -1$$

$$3x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x}{\cos 6x} = 1$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 6x$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 6x = -2 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} + 6x}{2} \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} - 6x}{2} = 0$$

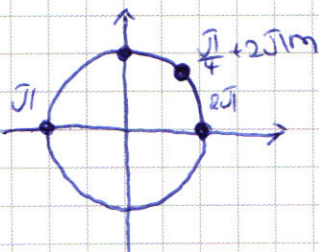
$$\sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

или

$$\sin \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$13x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

- не удовн. ОДЗ.

$$x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}, k \in \mathbb{Z}$$

Итого

$$\frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3} \quad | \cdot 52$$

$$1 + 8k = 13 + \frac{52n}{3}$$

$$8k = 12 + \frac{52n}{3}$$

$$k \neq \frac{12}{8} + \frac{52n}{24} \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z})$$

$$k = 1, 5 + 52 \cdot \left(\frac{n}{24} \right)$$

$$k \neq \frac{36 + 52n}{24}$$

$$\frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$$

$$| \cdot 52 = 4 \cdot 13$$

$$1 + 8k = \frac{13}{3} + \frac{52n}{3} = \frac{52n + 13}{3}$$

$$8k = \frac{52n + 10}{3} \quad k \neq \frac{52n + 10}{24}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}, k \in \mathbb{Z}$

$$k \neq \frac{36 + 52n}{24}$$

$$k \neq \frac{10 + 52n}{24}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 \\ ((|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 10^2 \end{cases}$$

$$3 \text{ решения}$$

$$|y - \sqrt{a}| = x + 4 - \sqrt{a}$$

графиком является
часть окружности
 $R=10$ с центром в точке
 $O(6; 8)$ отраженная от-
носительно осей x и y
(из-за наличия
модулей)
и точка $(0; 0)$

$$\sqrt{a} > 0$$

$$|y - \sqrt{a}| = x + 4 - \sqrt{a}$$

- графиком функции
является линия
отраженная от ко-
ординатной системы
относительно $y = \sqrt{a}$
касательная
 a_3 - касательная

a_1 : 3 решения

$$x=0 \quad |-\sqrt{a}| = 4 - \sqrt{a}$$

$$y=0 \quad 2\sqrt{a} = 4$$

$$\sqrt{a} = 2$$

$$a = 4$$

$$a_2: \begin{cases} y=0 \\ x=12 \end{cases}$$

$$\sqrt{a_2} = 16 - \sqrt{a_2}$$

$$\sqrt{a_2} = 8$$

$$a_2 = 64$$

$$a \in [a_2; a_3) \cup \{a_1\}$$

a_3 : касательная проходит в IV четверти $\Rightarrow$

$$x > 0$$

$$y < 0$$

$$\sqrt{a} - y = x + 4 - \sqrt{a}$$

$$x = 2(\sqrt{a} - 2) - y$$

$$y = 2(\sqrt{a} - 2) - x$$

$$(x - 6)^2 + (-y + 8)^2 = 100$$

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 16y + 64 = 100$$

$$(2(\sqrt{a+2})-y)^2 - 12(2(\sqrt{a+2})-y) + 16y^2 + y^2 = 0$$

$$4(\sqrt{a+2})^2 - 4(\sqrt{a+2})y + y^2 + 28y - 24(\sqrt{a+2}) + y^2 = 0$$

$$2y^2 + y(4(5-\sqrt{a})) + 4(\sqrt{a+2})(\sqrt{a+2} - 6\sqrt{a} + 12) = 0 \quad |:2$$

$$y^2 + 2y(5-\sqrt{a}) + 2(\sqrt{a+2})(5\sqrt{a}+10) = 0$$

$$D = 4(5-\sqrt{a})^2 + 8(\sqrt{a+2})(5\sqrt{a}+10) = 0 \quad |:4$$

$$25 - 10\sqrt{a} + a + 2(5a + 20\sqrt{a} + 20) = 0$$

$$11a + 10\sqrt{a} + 45 = 0$$

$$4(\sqrt{a}-2)^2 - 4(\sqrt{a}-2)y + y^2 + 28y - 24(\sqrt{a}-2) + y^2 = 0$$

$$2y^2 + y(4(7-4\sqrt{a}+2)) + 4(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-2 - 6\sqrt{a} + 12) = 0 \quad |:2$$

$$y^2 + 2y(9-4\sqrt{a}) + 2(\sqrt{a}-2)(10-5\sqrt{a}) = 0$$

$$D = 4(9-4\sqrt{a})^2 + 8(\sqrt{a}-2)(10-5\sqrt{a}) = 0 \quad |:4$$

$$81 - 72\sqrt{a} + 16a - 2(10\sqrt{a} - 20 - 5a + 10\sqrt{a}) = 0$$

$$24a - 58\sqrt{a} + 121 = 0 \quad \text{Пусть } \sqrt{a} = k \quad k \geq 0$$

$$24k^2 - 58k + 121 = 0 \quad || k^2 - 58k + 121 = 0$$

$$D = 12544$$

$$D = 3364$$

$$x^2 - 2x(9-\sqrt{a}) + 18(\sqrt{a}-2)^2 = 0$$

$$D = (9-\sqrt{a})^2 - 18(\sqrt{a}-2)^2 = 0$$

$$81 - 18\sqrt{a} + a - 18(a - 4\sqrt{a} + 4) = 0$$

$$81 - 18\sqrt{a} + a - 18a + 72\sqrt{a} - 72 = 0$$

$$-17a + 54\sqrt{a} + 9 = 0 \quad 17a - 54\sqrt{a} - 9 = 0$$

$$17k^2 - 54k - 9 = 0$$

$$D = 2916 + 36 \cdot 17 = 2528 = 4 \cdot 632 = 16 \cdot 158 = 16 \cdot 2 \cdot 79$$

$$k_1 = \frac{54 - 4\sqrt{158}}{34}$$

$$k_2 = \frac{54 + 4\sqrt{158}}{34}$$

из рисунка
следует, что $k_1 < 1$
 k_1 не подходит.

$$a = \left(\frac{54 + 4\sqrt{158}}{34} \right)^2$$

$$a \in \left[64, \left(\frac{54 + 4\sqrt{158}}{34} \right)^2 \right) \cup \{4\} \quad \text{Ответ: } a \in \left[64, \left(\frac{54 + 4\sqrt{158}}{34} \right)^2 \right) \cup \{4\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

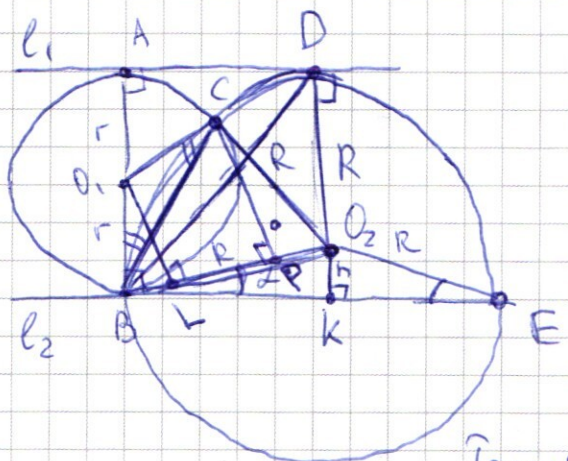
Дано: $\ell, \parallel \ell_2$

$\omega_1 (O_1, r)$

$\omega_2 (O_2, R)$

$S_{BO_1CO_2} = 3 S_{O_2BE}$

$\frac{R}{r} = ?$



Решение

$AB = DK$ - два перпендикуляра между параллельными прямыми

$AB = 2r$

$DK = h + R$

$2r = h + R$

$h = 2r - R$

Обозначим $\angle O_2BK = \alpha$

$\triangle O_2BE$ - равнобедренный

$\frac{BK}{R} = \cos \alpha$

$BK = R \cdot \cos \alpha$

$S_{O_2BE} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2BK = h \cdot BK$

$S_{O_2BE} = (2r - R) \cdot R \cos \alpha$

Пусть $BK = x$

$\angle O_1BK = 90^\circ$, т.к. ω_1 касается ℓ_2 , O_1B - радиус
 $\Rightarrow \angle O_1BO_2 = \angle O_1BK - \angle O_2BK = 90 - \alpha$ (приведенный в точку касания)

Рассмотрим $\triangle BO_2D$ $\angle BO_2D = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$
по т-е косинусов

$BD^2 = R^2 + R^2 - 2RR \cos(90 + \alpha) = 2R^2 + 2R^2 \sin \alpha = 2R^2(1 + \sin \alpha)$

Из $\triangle BO_2K$ по т-е Пифагора: $x^2 + h^2 = R^2$

Из $\triangle BKD$ по т-е Пифагора: $x^2 + (R + h)^2 = 2R^2(1 + \sin \alpha)$

$$x^2 = R^2 - h^2$$

$$x^2 = 2R^2(1 + \sin \alpha) - (R + h)^2$$

$$R^2 - h^2 = 2R^2(1 + \sin \alpha) - R^2 - 2Rh - h^2$$

$$2Rh = 2R^2(1 + \sin \alpha) - 2R^2$$

$$h = R(1 + \sin \alpha) - R = R \sin \alpha$$

$$OL \perp BO_2$$

$$CP \perp BO_2$$

$$O_1L = r \sin \alpha$$

$$O_1L = r \cos \alpha \text{ в } \triangle O_1LB$$

$$BO_1 = r \sin \alpha$$

$$\triangle PCO_2 = \triangle KBO_2 \Rightarrow$$

$$\text{в } \triangle PCO_2$$

$$CP = R \cos \alpha$$

$$PO_2 = h = R \sin \alpha = 2r - R$$

$$S_{BO_1CO_2} = \frac{1}{2} (r \cos \alpha + r \sin \alpha + R \cos \alpha \sin \alpha) + \frac{r \cos \alpha + R \cos \alpha}{2} \cdot (R -$$

$$- R \sin \alpha - r \sin \alpha) = \frac{r+R}{2} (\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha (R - \sin \alpha (r+R)))$$

$$S_{O_2BE} = (2r - R) R \cos \alpha$$

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = \frac{\frac{r+R}{2} (\sin \alpha + R - \sin \alpha (r+R))}{(2r - R) R} = 3$$

$$\frac{R}{r} = \frac{2}{2 - 4R - 14r + 12r - 8R} = \frac{2}{2 - 4R - 14r}$$

$$\frac{r+R}{2} (\sin \alpha (1 - (r+R)) + R) = 3R(2r - R) \quad | : R$$

$$\frac{r}{R} (\sin \alpha (1 - (r+R)) + R) = 12r - 6R$$

$$\frac{2}{1 + \sin \alpha} (\sin \alpha (1 - (r+R)) + R) = 12r - 6R$$

$$(2 \sin \alpha (1 - (r+R)) + 2R) = 12r - 6R + 6(2r - R) \sin \alpha$$

$$- 2 \sin \alpha R + 2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha r + 2R = 12r - 6R + 6(2r - R) \sin \alpha$$

$$\sin \alpha (2 - 2(r+R) + 6(R - 2r)) = 12r - 8R$$

$$\sin \alpha (2 - 2r - 2R + 6R - 12r) = 12r - 8R$$

$$\sin \alpha (2 - 4R - 14r) = 12r - 8R \quad \sin \alpha = \frac{12r - 8R}{2 - 4R - 14r}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Всего 2^{70} - вариантов.

Когда орел выпадает больше 42 раз
нам важно, чтобы он выпал хотя
бы 43 раза, а остальное не важно:
орел или решка, тогда N_1 - количество
таких исходов (~~больше 42 раз~~)
 $N_1 = 1^{43} \cdot 2^{70-43} = 2^{27}$ Орел больше 42 раз

$$p = \frac{2^{27}}{2^{70}} = \frac{1}{2^{43}}$$

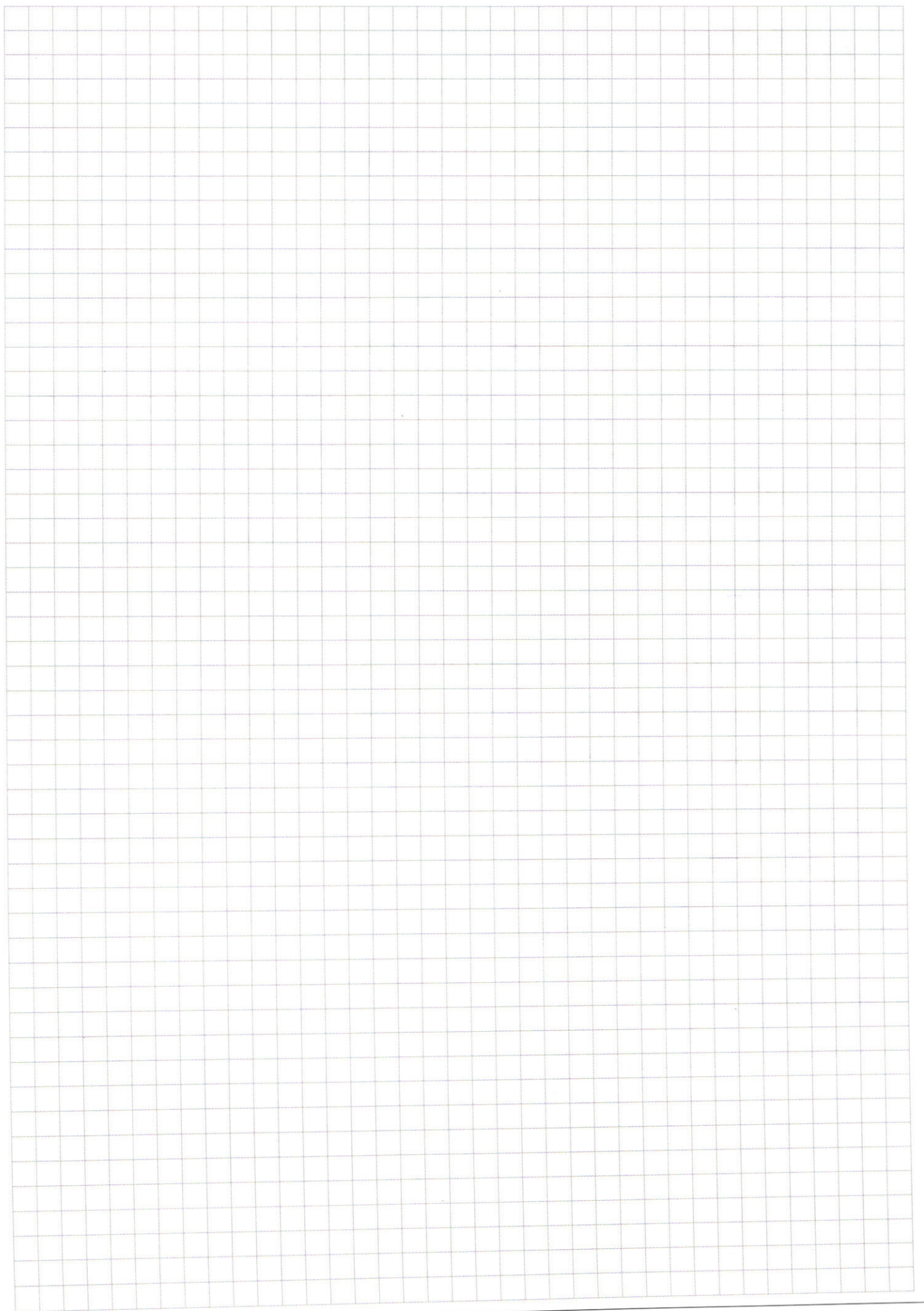
Когда орел выпадает не больше 28 раз
нам не важно, чтобы 42 раза обяза-
тельно выпала решка, тогда

$$N_2 = 1^{42} \cdot 2^{28} = 2^{28}$$

$$q = \frac{2^{28}}{2^{70}} = \frac{1}{2^{42}}$$

$$p - q = \frac{1}{2^{43}} - \frac{2}{2^{43}} = -\frac{1}{2^{43}}$$

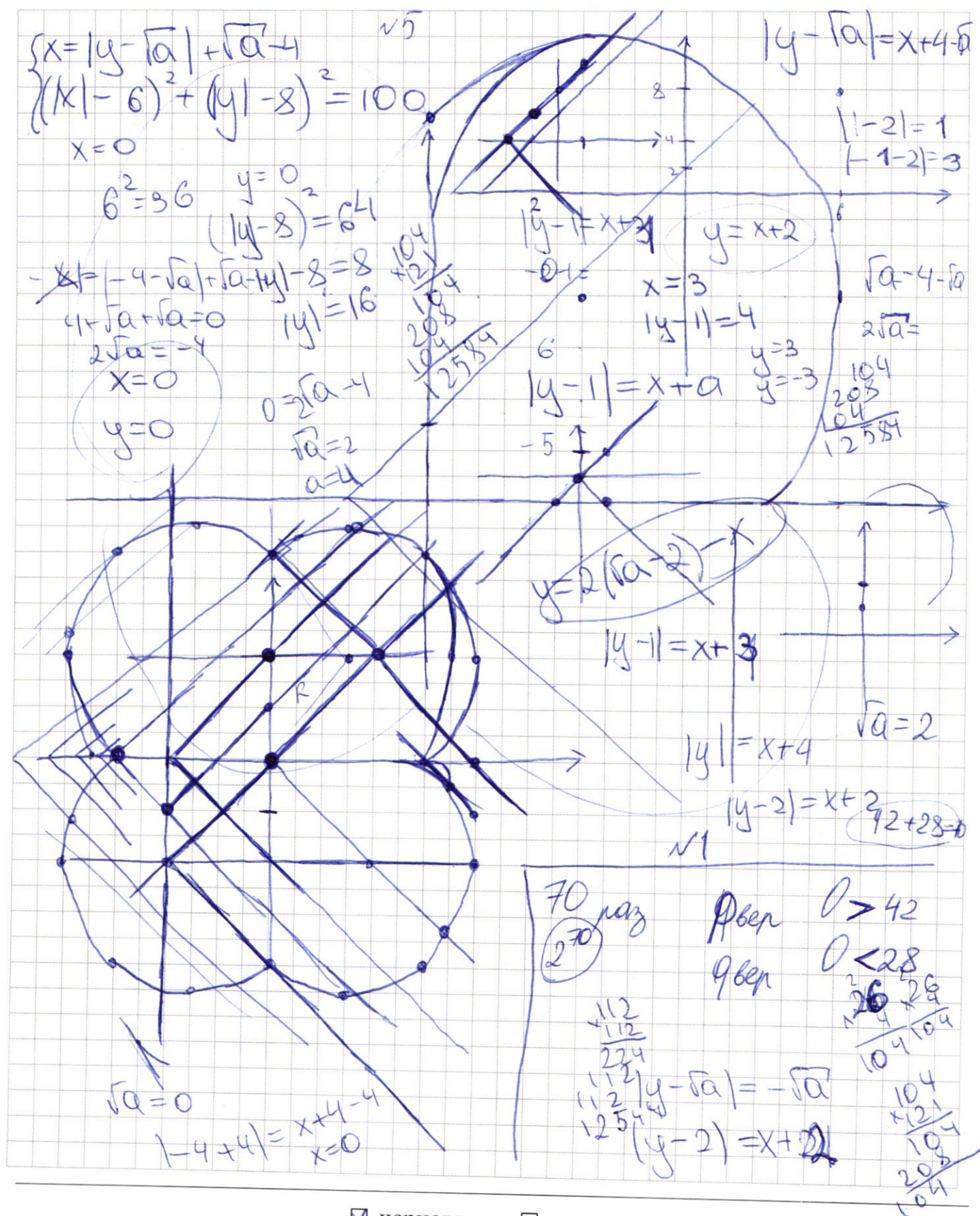
Ответ: $-\frac{1}{2^{43}}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

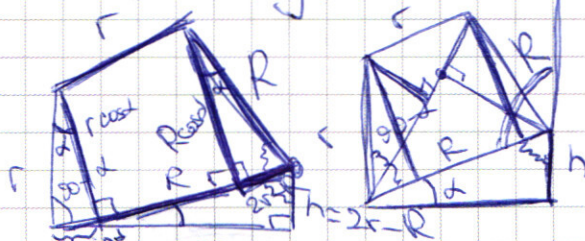
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y \geq 80 + x - 7^{80}$$

$$y \leq \log_7 x$$

$$x \leq y - 80 + 7^{80}$$



$$8 - 14 \cdot 4 + 60 \cdot 2 - 72 \leq 0$$

$$R - r \sin \alpha -$$

$$8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2 \cdot 2 \sqrt{\log_2 x} + 60 \cdot x \sqrt{\log_2 x} \leq 72$$

$$2 \sqrt{\log_2 x} - 14 \cdot 2 \sqrt{\log_2 x} + 60 \sqrt{x} \leq 72$$

$$x \sqrt{\log_2 x} = 2 \sqrt{\log_2 x}$$

$$x \sqrt{\log_2 x}$$

$$\text{Пусть } 2 \sqrt{\log_2 x} = m$$

$$m > 0$$

$$m^3 - 14m^2 + 60x \sqrt{\log_2 x} \leq 72 \leq 0$$

$$1 - 14 + 60 - 72$$

$$② 8 + 120 - 56 - 72 = 0$$

$$(m-2)(m^2-12m+36)=0$$

$$\begin{array}{r} m^3 - 14m^2 + 60m - 72 \quad | \quad m-2 \\ m^3 - 2m^2 \\ \hline -12m^2 + 60m \\ -12m^2 + 24m \\ \hline 36m - 72 \\ -36m + 72 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -12m^2 + 60m \\ -12m^2 + 24m \\ \hline 36m - 72 \\ -36m + 72 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{\log_2 x} = 1$$

$$\log_2 x = 1$$

$$x = 1$$

$$\sqrt{3} \checkmark$$

$$\sqrt{5} \checkmark$$

$$(m-2)(m-6)^2 = 0$$

$$2 \sqrt{\log_2 x} = 6$$

$$6^{\log_2 6} = 2$$

$$2 = 6^{\log_6 2}$$

$$\log_2 6 = \frac{1}{\log_6 2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)} + \frac{\sin 4x}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + 3x)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x}{\sin(\frac{\pi}{4} - 3x)} + \frac{\sin 4x}{\sin(\frac{\pi}{4} + 3x)} = 2$$

$$2 = \frac{\cos 4x \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + 3x) + \sin 4x \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)}{\sin(\frac{\pi}{4} - 3x) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + 3x)}$$

$$20 + 12 + 3 = 35$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 112 \\ \hline 224 \\ 112 \\ \hline 12544 \end{array}$$

$$2r - R = R \sin \alpha$$

$$R - r \sin \alpha - 2r + R = H$$

$$H = 2R - r \left(\frac{2}{\sin \alpha} \right)$$

$$x \sqrt{\log_2 x} = m = 2 \sqrt{\log_2 x}$$

$$\sqrt{1}$$

$$\frac{70}{+2} = 28$$

$$28 \text{ раз}$$

$$\log_2 x \geq 0$$

$$\log_4 x \geq 0$$

$$\frac{14}{56}$$

$$t = \sqrt{\log_2 x}$$

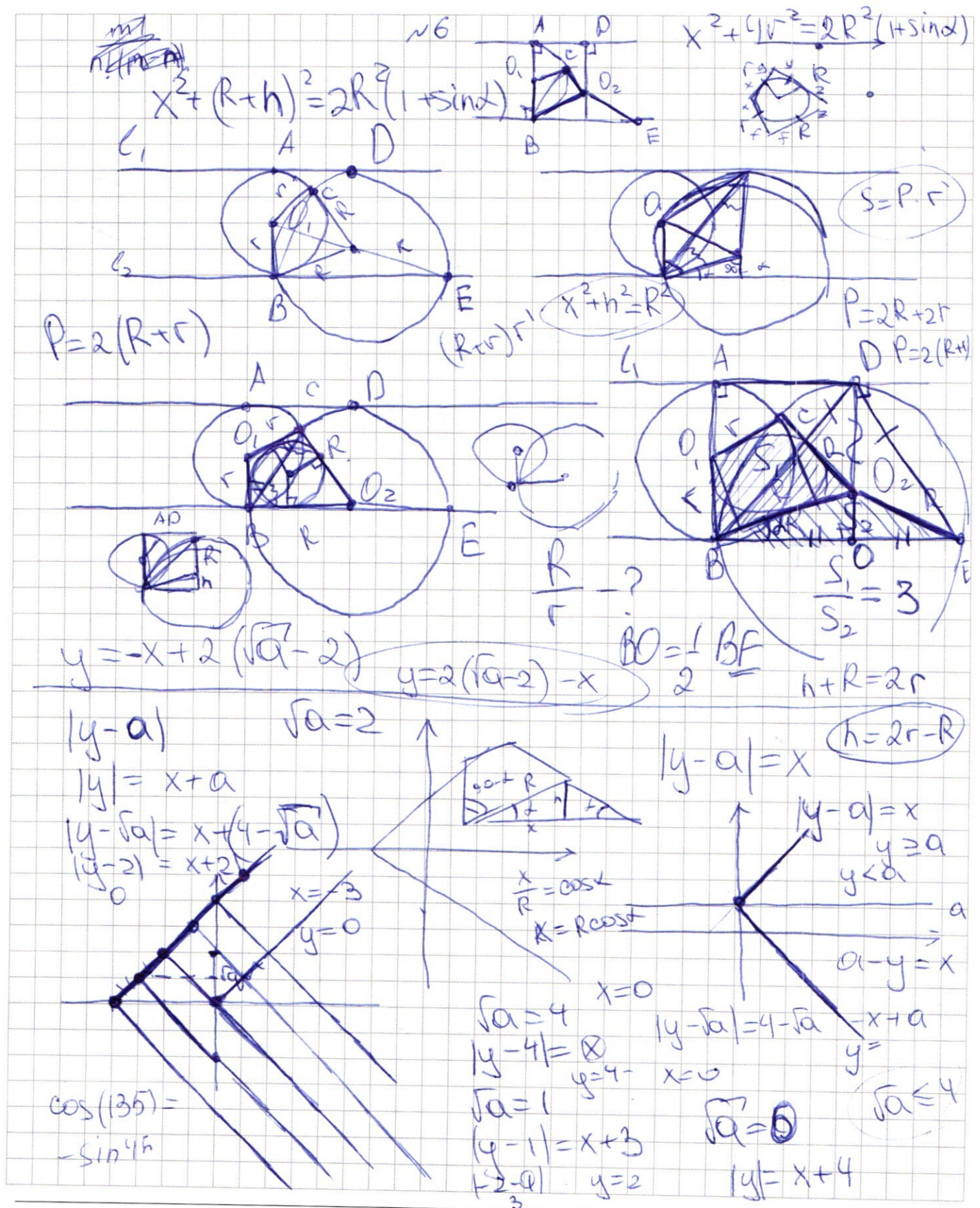
$$\frac{1}{t} \ln x = t \cdot \ln 2$$

$$\frac{\ln x}{\ln 2} = t^2$$

$$\log_2 x = \log_2 x$$

$$\text{Верно}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x}{\cos^2 3x + \cos 3x \sin 3x - \sin 3x \cos 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x) + \sin 3x (\cos 4x - \sin 4x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 30 + \cos 60 = 2 \cdot \cos \frac{60+30}{2} \cos \frac{60-30}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 15^\circ$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{4}} \quad \alpha = 30$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 90 + \cos 30 = 2 \cdot \cos 60 \cdot \cos 30$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2x^2 - 4x(7 - \sqrt{a} + 2) + 4(\sqrt{a} - 2)^2 = 0$$

$$x^2 - 2x(9 - \sqrt{a}) + 18(\sqrt{a} - 2)^2 = 0$$

$$\sin 7x - \sin x$$

$$\cos 6x$$

$$D = 4(9 - \sqrt{a})^2 - 4 \cdot 18 \cdot (\sqrt{a} - 2)^2 = 0$$

$$\sin 7x - \sin x + \cos 7x + \cos x + \sin 7x - \sin x + (\cos 7x - \cos x) = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{2 \sin 7x + 2 \cos 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 16y = 0$$

$$\frac{\sqrt{2} \sin 7x + \cos 7x}{\cos 6x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$(\sqrt{a} - 2)^2 = 0$$

$$a - 2\sqrt{a} + 4 = 0$$

$$x^2 - 12x + 4(\sqrt{a} - 2)^2 - 4(\sqrt{a} - 2)x + x^2 + 32(\sqrt{a} - 2) - 16x = 0$$

$$2x^2 + 2x(28 - 4(\sqrt{a} - 2)) + 4(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 2) - 16x = 0$$

$$-2 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} + 6x}{2} \cdot \sin \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$