

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3^{\sqrt{4 \log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leq 75$$

DD3:

$$3^{3 \sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{2 \sqrt{\log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_x 3}} \leq 75$$

$x > 1$

$$\sqrt{\log_3 x} \stackrel{\text{об}}{=} t, \quad t > 0$$

$$\log_3 x = t^2 \Rightarrow x = 3^{t^2}$$

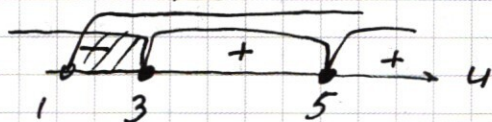
$$\sqrt{\log_x 3} = \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \frac{1}{t}$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3^{t^2} \cdot \frac{1}{t} \leq 75$$

$$3^t \stackrel{\text{об}}{=} u, \quad u > 1$$

$$u^3 - 13u^2 + 55u - 75 \leq 0$$

$$(u-3)(u-5)^2 \leq 0$$



$$1 < u \leq 3$$

$$1 < 3^t \leq 3$$

$$0 < t \leq 1$$

$$0 < \sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (1; 3]$

2.

$$\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \sin 14x \cos 5x + \sin 14x \sin 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cos(9x + \frac{\pi}{4})}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \cos 10x = 0 \\ \cos 10x \neq 0 \end{cases}$$

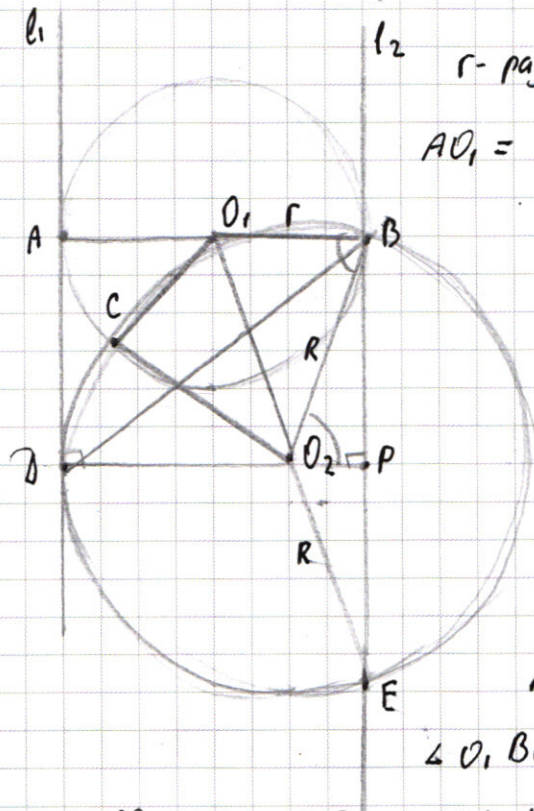
$$\begin{cases} 2 \cos(\frac{19}{2}x + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos 10x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{19x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos 10x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{19x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ 10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi}{19} \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10} \cdot k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\{\frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi}{19} \cdot n\}, \{\frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot n\}, n \in \mathbb{Z}$

6.



r - радиус окружности W_1
 R - радиус окружности W_2
 $AO_1 = O_1B = O_1C = r$

$$O_2B = O_2C = R = O_2E$$

$O_1B \perp BE$ как радиус, проведенный в точку касания

$DO_2 \perp AD$ как радиус, проведенный в точку касания

$$DO_2 \cap BE = P$$

$$AD \parallel BE, DP \perp AD \Rightarrow DP \perp BE$$

$$\angle O_1BO_2 = \alpha$$

$$AB \perp AD, AB \perp BE \Rightarrow AB \parallel DP \Rightarrow \angle O_1BO_2 = \angle BO_2P$$

$\triangle BO_1O_2 = \triangle CO_1O_2$ ($CO_1 = O_1B = r, CO_2 = BO_2 = R; O_1O_2$ - общая сторона)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{BO_1CO_2} = 2S_{BO_1O_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot R \cdot \sin \alpha = R \cdot r \sin \alpha$$

$$\S \triangle O_2PB: BP = R \sin \alpha; O_2P = R \cos \alpha$$

$$S_{\triangle BO_2E} = 2S_{O_2PB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \sin \alpha \cdot R \cos \alpha = R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R \cdot r \sin \alpha}{R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = 4$$

$$\frac{r}{R \cos \alpha} = 4 = \frac{r}{O_2P} \Rightarrow O_2P = \frac{r}{4}$$

$ABPD$ - прямоугольник ($AB \parallel DP$, $AD \parallel BP$, $\angle BAD = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = DP = 2r = R + \frac{r}{4}$$

$$\frac{7r}{4} = R \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{7}{4}$$

$$\triangle BOP: BO^2 = DP^2 + BP^2$$

$$BP^2 = OB^2 - O_2P^2 = R^2 - \frac{r^2}{16}$$

$$16 = 4r^2 + R^2 - \frac{r^2}{16}$$

$$16 = \frac{63r^2}{16} + R^2$$

$$16 = \frac{63r^2}{16} + \frac{49r^2}{16}$$

$$256 = 112r^2$$

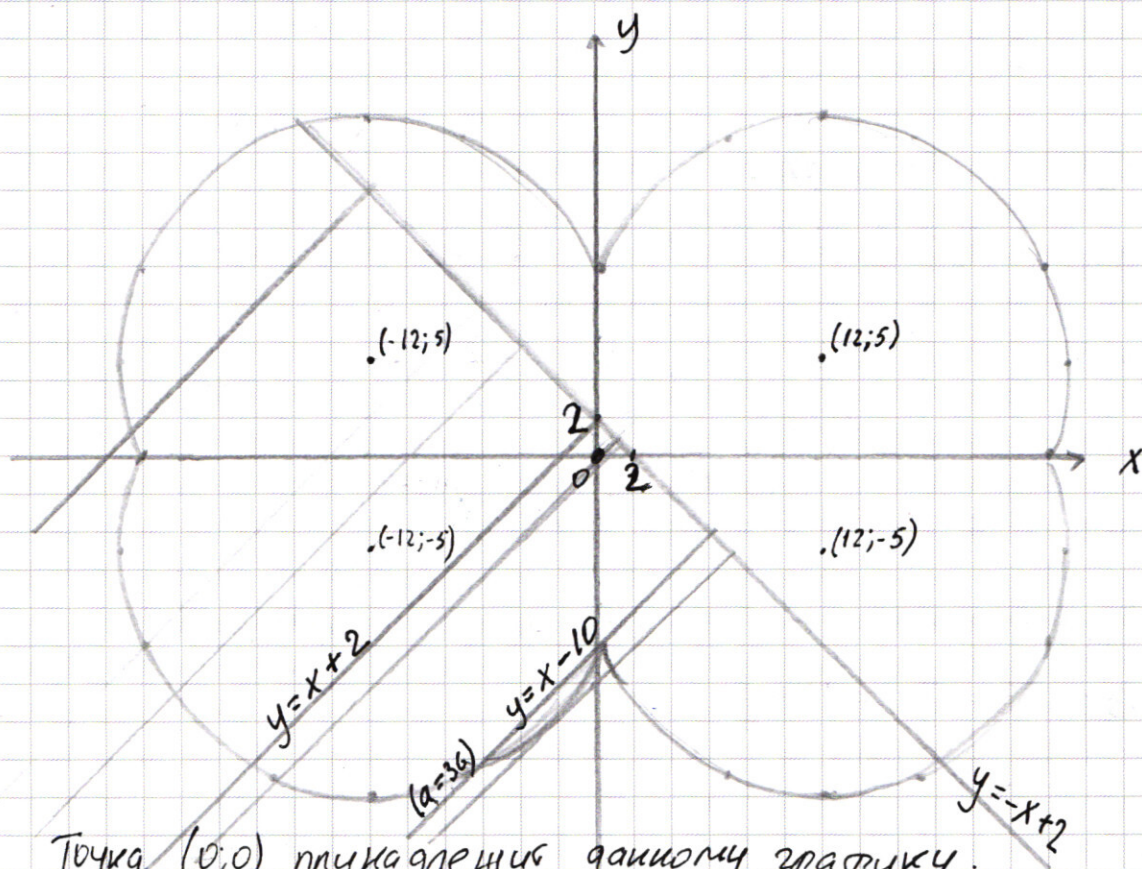
$$r = \sqrt{\frac{256}{112}} = \frac{16}{4\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$R = \frac{7}{4}r = \frac{4 \cdot 7}{4 \cdot \sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

Ответ: а) $\frac{7}{4}$ б) $\frac{4\sqrt{7}}{7}; \sqrt{7}$

5.
$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a} & (1) \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 & (2) \end{cases}$$

Построить графики уравнения (2)



Точка $(0; 0)$ принадлежит данному графику.

Графиком уравнения 1 является "галочка", ветви которой направлены вниз.

Заметим, что при раскрытии модуля в уравнении (1) с положительным знаком, будем получать прямую

$y = -x + 2 \Rightarrow$ правая ветвь "галочки" будет задана функцией $y = -x + 2$

Вторая ветвь "галочки" будет иметь вид $y = x + b$, где $b = 2 - 2\sqrt{a}$

Т.к. $a \geq 0$ прямая $y = x + b$ не может быть расположена выше прямой $y = x + 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $a \in [0; 1)$ система будет иметь 2 решения

При $a = 1$ график ур-я (1) будет пересекать график ур-я 2 в III и IV четвертях, а также в т. $(0; 0) \Rightarrow \Rightarrow$ система будет иметь 3 решения.

При $a \in (1; 36)$ система будет иметь 2 решения

При $a = 36$ графики уравнений (1) и (2) будут иметь 3 точки пересечения $\Rightarrow$ система будет иметь 3 решения.

При увеличении значения a , система будет иметь 4 решения, пока прямая $y = x + b$ не станет касательной к графику ур-я (2) в III четверти, ~~пересекает~~

~~этой области имеет вид:~~ которое в этой области имеет вид: $(x+12)^2 + (y+5)^2 = 169$

$$(x+12)^2 + (y+5)^2 = 169$$

Условие касания

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -\sqrt{169 - (x+12)^2} + 5 \\ y_2 = x + 2 - 2\sqrt{a} \end{cases}$$

$$-\sqrt{169 - (x+12)^2} + 5 =$$

Для того, чтобы прямая $y = x + b$ была касательной к этому графику, необходимо, чтобы расстояние от точки $(-12; -5)$ до этой прямой было равно 13

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-12 + 5 + 2 - 2\sqrt{a}|}{\sqrt{2}} = 13$$

$$|5 + 2\sqrt{a}| = 13\sqrt{2}$$

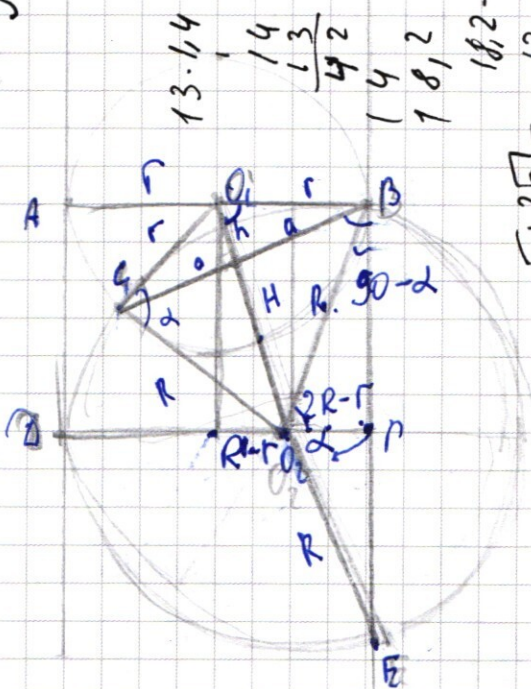
$$2\sqrt{a} = 13\sqrt{2} - 5$$

$$a = \left(\frac{13\sqrt{2}-5}{2} \right)^2 = \frac{(13\sqrt{2}-5)^2}{4}$$

При $a > \frac{(13\sqrt{2}-5)^2}{4}$ система будет иметь
~~более~~ менее 3х решений

$$\text{Ответ: } 1; 36; \frac{(13\sqrt{2}-5)^2}{4}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x - 6| - 4 = 0$$

X-6

$$5 + 2\sqrt{1} = -13 \quad \frac{13, 2}{2}$$

$$\begin{array}{r} 180.02 \text{ BC} \\ \underline{2} \end{array}$$

$$-(y+5) = 5$$

$$2\sqrt{a} = 8$$

$$\frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 16x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cos(9x + \frac{\pi}{4})}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \sin 14x \cos 5x + \sin 14x \sin 5x$$

$$y = x + 2 - 2\sqrt{q}$$

$$z = h \pm x$$

$$x - y + 2 - 2\sqrt{a} = 0$$

$$h = 5 - k$$

$$(-x-12)^2 + (-y-5)^2 = 169$$

$$\frac{-12 \pm 5 + 2 - 2\sqrt{9}}{2} = 13 \quad (x+12)(y+5) = 169$$

$$y = x + 2 - 2\sqrt{x}$$

$$R \cdot r \sin \theta_1 \theta_2$$

$R \sin d \neq R \cos d$

$$\frac{R^2 \cdot \sin d \cdot \cos d}{2}$$

$$\frac{2R \cdot r \sin \alpha}{R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 4 \quad 2$$

$$\frac{r}{R \cdot \cos \alpha} = 2$$

$$\frac{r}{0, p} = 2$$

$$F \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

R 2

$$\frac{2R \cdot \sin \alpha}{R \cdot \sin \alpha \cos \alpha} = 2$$

$$b_2 \cdot B^P \frac{r}{R \cos \alpha} = 2$$

$$\frac{F}{O, P} = 2$$

~~$5^4 \leq x$~~

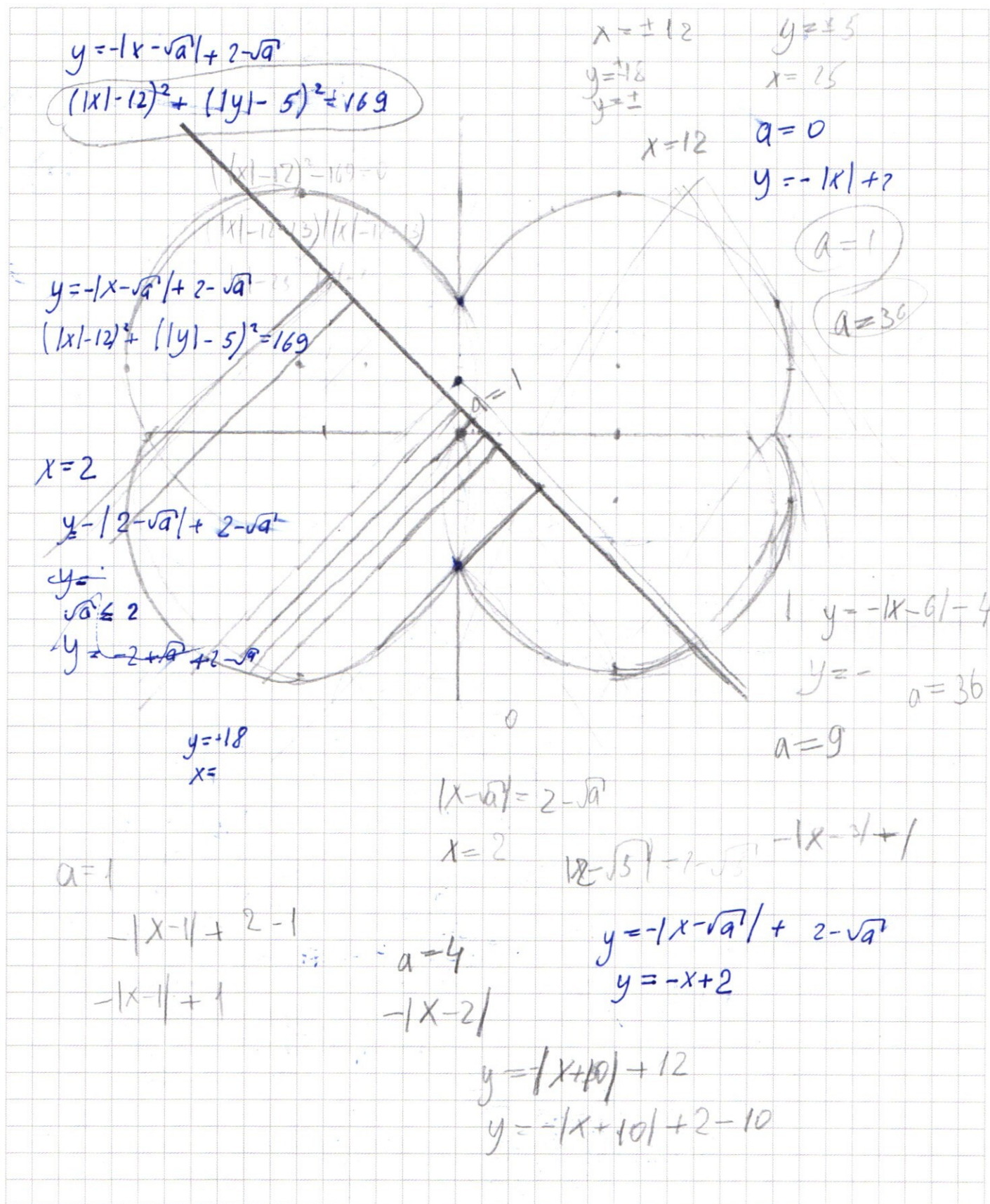
$x \geq 5$

$$x \leq y - 100 + 540$$

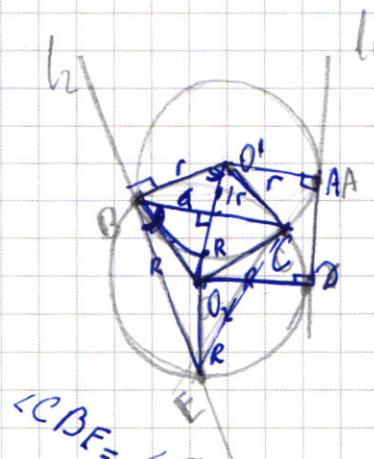
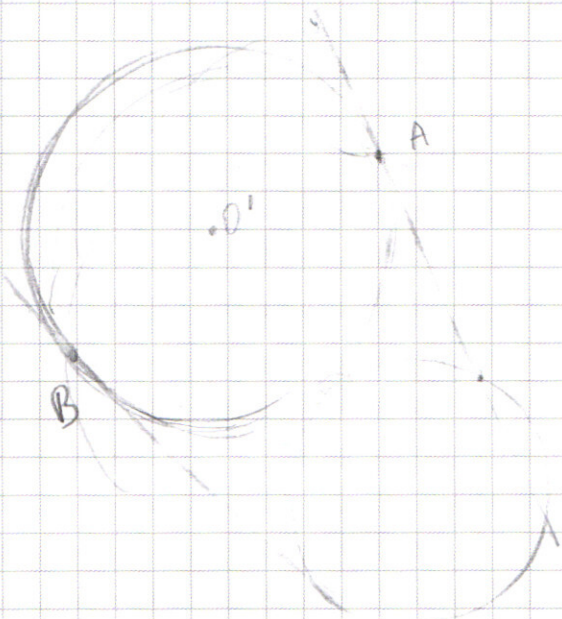
$$\cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \cos 10x = c$$

$$-15 - 2\sqrt{q} = 13$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{110}{2} = 27.5$$



$$\frac{S_{BO'CA_2}}{S_{EO_2B}} = 4$$

$$\angle CDE = \angle BO'D = \frac{1}{2} \angle O_2 O' \cdot BC$$

$$\left(r^2 \cdot \sin BO'C + R^2 \cdot \sin BO_2 C \right) \frac{1}{2}$$

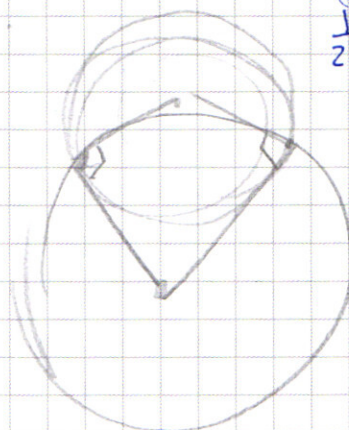
$$\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin BO_2 E$$

$$OO' = R + x = r + y$$



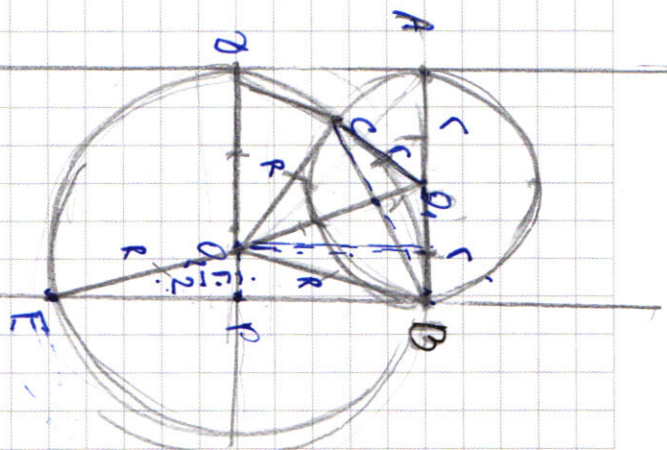
$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{110}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{110}{2}$$



$$S_{O_2 B} = \frac{1}{2} S_{EO_2 B}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{R^2 - y^2} = S_{BOE}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 16x}{\cos 5x + \sin 5x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \sin 14x \cos 5x + \sin 14x \cos 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 9x - \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 9x - \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos(9x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 9x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 9x \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \cos 10x = 0$$

$$2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4} + 10x}{2} \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4} - 10x}{2} = 0$$

$$\cos(\frac{19}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\begin{aligned} \log_3 x &= \frac{1}{2} \\ x &= 3^{\frac{1}{2}} \\ \log_3 x &= \frac{1}{2} \\ x &= 3^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \log_3 x &\geq 1 \\ x &\geq 3 \\ \log_3 x &\leq (5 + \sqrt{55})^2 \end{aligned}$$

$$x \leq 3(5 + \sqrt{55})^2$$

$$27 \cdot 13 \cdot 9 + 90 \leq 0$$

$$4^3 - 13 \cdot 4^2 + 90 \leq 0$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 90 \leq 0$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$4^3 - 13 \cdot 4^2 + 90 = 0$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3 \leq 75$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 75 \quad x > 1$$

$$3 \cdot 3 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 75 \quad \sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$(27 - 13 \cdot 9) 3 \sqrt{\log_3 x} + 55 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 75 \quad 0 < \log_3 x \leq 1$$

$$1 < x \leq 3$$

$$27 - 117$$

$$13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x}$$

$$1 < 3^t \leq 3$$

$$0 < t \leq 1$$

$$13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x}$$

$$3 \sqrt{\log_3 x}$$

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 75$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot x \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} \leq 75$$

$$y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 169$$

$$x > \sqrt{a}$$

$$y = -x + \sqrt{a} + 2 - \sqrt{a}$$

$$x < \sqrt{a}$$

$$y = x - \sqrt{a} + 2 - \sqrt{a}$$

$$y = x - 2\sqrt{a} + 2$$

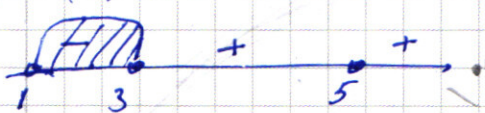
$$1 \quad -13 \quad 55 \quad -75$$

$$3 \quad 1 \quad -10 \quad 25 \quad 0$$

$$5 \quad 1 \quad -5 \quad 0$$

$$5 \quad 1 \quad 0$$

$$(u - 3)(u - 5)^2 \leq 0$$



$$u = 3$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 75$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot x \sqrt{\log_3 x} \leq 75$$

$$(3 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot 3^t \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}) \leq 75$$

$$3 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3 \sqrt[4]{\log_3 x} + 55 \cdot 3^t - 75 \leq 0$$

$$3^t = u, \quad u > 1$$

$$8 - 13 \cdot 4 + 55 \cdot 2 - 75$$

$$u^3 - 13u^2 + 55u - 75 \leq 0$$

$$u = 3$$

$$27 - 117 + 165 - 75 =$$

$$8 + 110 - 75 = 52$$

$$\sqrt{\log_3 x} = t \quad t \geq 0$$

$$\log_3 x = t^2$$

$$x = 3^{t^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = t$$

$$\frac{1}{\log_3 x} = t^2 \quad \sqrt{\log_3 x} = \frac{1}{t}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{t^2}$$

А: отсюда не получится 61 раз
В: отсюда не получится 49 раз
Р(В)=2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$$

$$3^{3\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$$

ОДЗ:
 $x > 1$

$$\sqrt{\log_3 x} = t, \quad t > 0$$

$$\sqrt{\log_x 3} = \frac{1}{t}$$

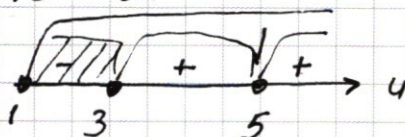
$$x = 3^{t^2}$$

$$3^{3t} - 13 \cdot 3^{2t} + 55 \cdot 3^{t^2 \cdot \frac{1}{t}} \leq 75$$

$$3^t = u, \quad u > 1$$

$$u^3 - 13u^2 + 55u - 75 \leq 0$$

$$(u-3)(u-5)^2 \leq 0$$



$$1 < u \leq 3$$

$$1 < 3^t \leq 3$$

$$0 < t \leq 1$$

$$0 < \sqrt{\log_3 x} \leq 1$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$$\frac{5n}{4} + 2n \cdot n = \frac{n}{20} + \frac{n}{10}$$

$$25n + 40n \cdot n = n + 2n \cdot n$$

$$24n \cdot n = 38n \cdot n$$

Ответ: $[1; 3]$

$$y \geq 110 + x - 5^{110}$$

$$y \leq \log_5 x$$

$$\begin{aligned} k: 5 \\ x \geq y^5 \end{aligned}$$

$$1 \geq 110 + 5 - 5^{110}$$

$$t = 1$$

$$1 \geq 110 + 10 - 5^{110}$$

$$t \leq 2$$

