

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

пусть $P(n)$ - вероятность, что орел выпадет n раз
при 90 бросках.

$$P(n) = 2^{-90} \cdot C_{90}^n; \quad C_{90}^n = C_{90}^{90-n}$$

$$p = 2^{-90} \cdot \sum_{i=55}^{90} C_{90}^i; \quad q = 2^{-90} \cdot \sum_{i=0}^{34} C_{90}^i = 2^{-90} \cdot \sum_{i=0}^{34} C_{90}^{90-i} =$$

$$= 2^{-90} \cdot \sum_{i=56}^{90} C_{90}^i$$

$$p - q = 2^{-90} \cdot \sum_{i=55}^{90} C_{90}^i - 2^{-90} \cdot \sum_{i=56}^{90} C_{90}^i = 2^{-90} \left(\sum_{i=55}^{90} C_{90}^i - \sum_{i=56}^{90} C_{90}^i \right) =$$

$$= 2^{-90} \cdot C_{90}^{55} = \frac{90!}{35! 55! 2^{90}}.$$

Ответ: $\frac{90!}{35! 55! 2^{90}}.$

Задача 3

~~пусть~~ $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{\sqrt{4 \log_3 x}} + 40 \cdot 2^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 48.$

заметьте, что $x \neq 1 \Rightarrow \log_3 x \neq 0$; $\log_3 3 = \frac{1}{\log_3 3} x$

пусть $n = \sqrt{\log_3 x}$, тогда $x = 3^{(n^2)}$

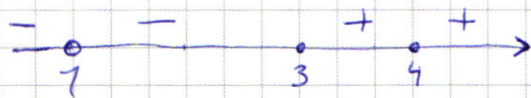
~~пусть~~ $27^n - 11 \cdot 3^{2n} + 40 \cdot (3^{(n^2)})^{\frac{1}{n}} \leq 48$

$$3^{3n} - 11 \cdot 3^{2n} + 40 \cdot 3^n \leq 48$$

пусть $t = 3^n$. Т.к. $n > 0$, $t > 1$, ~~т.к.~~

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 0$$

$$f(t) = (t-3)(t-4)^2 \leq 0$$



$$f(0) = -48 < 0$$

$$f(2) = -4 < 0$$

$$f(3.5) = \frac{1}{8} > 0$$

$$f(5) = 2 > 0$$

$$t \in (1; 3] \cup \{4\}$$

$$3^n \in (1; 3] \cup \{4\}$$

$$n \in (0; 1] \cup \{\log_3 4\}$$

$$x \in (1; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}$$

$$\text{Ответ: } (1; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}$$

Задача 7

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90} \\ y \leq \log_6 x \end{cases}$$

пусть $t = \lfloor m \rfloor$ — наибольшее целое число такое, что $t < m$.

Заметим, что $x > 0$. (т.н. $\log_6 x$ существует)

$$\text{При } 6^{90} > x > 6^{90} \quad y \leq 90, \quad y \geq 90 + x - 6^{90} \Rightarrow y > 90.$$

получается, что при $x > 6^{90}$ решений нет.

$$\text{Заметим, что при } x \in [6^n; 6^{n+1} - 1]$$

$$y \leq n.$$

Пусть $f(x)$ — количество решений при x .

$$\text{Ответом тогда будет } \sum_{i=1}^n f(i)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $x \in [6^n; 6^{n+1}-1]$ $f(x) = 1 + n - 90 + x + 6^{90}$.

$$\sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} f(x) = (6^{n+1} - 6^n) (1 + n - 90 + 6^{90}) - \sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} x =$$

$$= \cancel{(6^{n+1} - 6^n)}$$

$$\sum_{x=1}^{6^{90}} f(x) = \sum_{n=0}^{89} \sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} f(x) + f(90)$$

$$f(90) = 1 + 90 - 90 - 6^{90} + 6^{90} = 1.$$

ПРОВЕРКА:

$$y \geq 90 + 6^{90} - 6^{90} = 90$$

$$y \leq \text{всего } 6^{90} = 90.$$

единственный вариант - $y = 90$.

$$\sum_{n=0}^{89} \sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} f(x) = \sum_{n=0}^{89} \left((6^{n+1} - 6^n) (1 + n - 90 + 6^{90}) - \sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} x \right) =$$

$$= \cancel{\sum_{n=0}^{89}}$$

Заметим, что если h - некая постоянная,

$$\text{то } \sum_{n=0}^{89} (6^{n+1} - 6^n) h = h \sum_{n=0}^{89} (6^{n+1} - 6^n) = h (6^{90} - 6^0) =$$

$$= h (6^{90} - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{89} \left(h (6^{n+1} - 6^n) - \sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} x \right) + (6^{90} - 1) (1 - 90 + 6^{90})$$

Заметим, что $\sum_{n=0}^{89} \sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} x = \sum_{x=1}^{6^{90}-1} x = \frac{6^{90} \cdot (6^{90} - 1)}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{89} n(6^{n+1} - 6^n) &= \sum_{n=0}^{89} n 6^{n+1} - \sum_{n=0}^{89} n 6^n = \sum_{n=1}^{90} (n-1) 6^n - \sum_{n=0}^{89} n 6^n = \\ &= \sum_{n=1}^{90} n 6^n - \sum_{n=0}^{89} n 6^n - \sum_{n=1}^{90} 6^n = 90 \cdot 6^{90} - 0 \cdot 6^0 - \sum_{n=1}^{90} 6^n = 90 \cdot 6^{90} - \\ &- \left(\frac{6^{91} - 6}{5} - 6 \right) = 90 \cdot 6^{90} - \left(6^{90} + \frac{6^{90} - 6}{5} \right) = 89 \cdot 6^{90} - \frac{6(6^{89} - 1)}{5} \end{aligned}$$

Итак в итоге $\sum_{n=0}^{89} \sum_{x=6^n}^{6^{n+1}-1} f(x) + f(90) = 1 + (6^{90} - 1)(6^{90} - 90 + 1) +$

$$\begin{aligned} &+ 89 \cdot 6^{90} - \frac{6(6^{89} - 1)}{5} - \frac{6^{90}(6^{90} - 1)}{2} = 1 + \frac{6^{180}}{2} - 90 \cdot 6^{90} + 89 + \\ &+ 89 \cdot 6^{90} - \frac{6^{90}}{5} + \frac{6}{5} - \frac{6^{180}}{2} + \frac{6^{90}}{2} = \frac{6^{180}}{2} - 6^{90} + \frac{3 \cdot 6^{90}}{10} + 91 \frac{1}{5} = \\ &= 3 \cdot 6^{179} - \frac{7 \cdot 6^{90}}{10} + 91 \frac{1}{5} = 3 \cdot 6^{179} - \frac{21 \cdot 6^{89}}{5} + 91 \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Заметим, что в ответе имеются дроби, в то время как ответ должен быть целым, но это не проблема, т.к. $\frac{6^n}{5} \equiv 1$, поэтому $-\frac{21 \cdot 6^{89}}{5} + \frac{1}{5}$ — целое число.

Ответ: $3 \cdot 6^{179} - \frac{21 \cdot 6^{89}}{5} + 91 \frac{1}{5} = 3 \cdot 6^{179} - \frac{21 \cdot 6^{89}}{5} + \frac{456}{5}$

дополнение:

~~при $x > 6^{90}$ пусть $x = 6^n$, $n \in \mathbb{R}$~~
 ~~$\log_6 x - 90 = x + 6^{90} = (6^{90} - x) + (\log_6 x - 90)$~~
~~пусть $x = 6^{n+h}$, $n \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{R}$, $n \geq 90$, $0 \leq h < 1$~~
 ~~$y \leq n$, $y \geq 90 + 6^{n+h} - 6^{90} = 80 + \dots$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

дополните к задаче №7

при $6^{n+1} > x > 6^n \geq 6^{90}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y \leq n, \\ y \geq 90 + x - 6^{90} \Rightarrow 90 + 6^n - 6^{90} \end{cases}$$

то y имеет варианты при

$$n \geq 90 + x - 6^{90} > 90 + 6^n - 6^{90}$$

$$n - 90 = 6^n + 6^{90} > 0$$

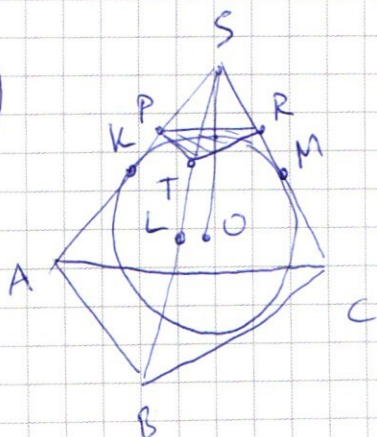
$$n - 90 > 6^n - 6^{90}, \text{ что верно при } n \geq 90$$

так как $(n-90)$ растёт линейно, а

$6^n - 6^{90}$ растёт экспоненциально.

Задача 4

а)



Дано: $SABC$ - пирамида,
 O - центр сферы ω ,

PRT - сечение,

$K \in AS$, $K \in \omega$

$L \in BS$, $L \in \omega$

$M \in CS$, $M \in \omega$

β - плоскость, $PRT \in \beta$

$$S_{PRT} = S,$$

$$\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Решение:

Пусть $D \in \omega$, D - ближайшая точка к $S \Rightarrow D \in OS$,

$$SD \perp \beta, OD \perp \beta.$$

$$\cos \angle KSO = \cos \angle PSD = \frac{\sqrt{21}}{5}. \text{ Если } PS = x\sqrt{21}, \text{ то } SD = 2x.$$

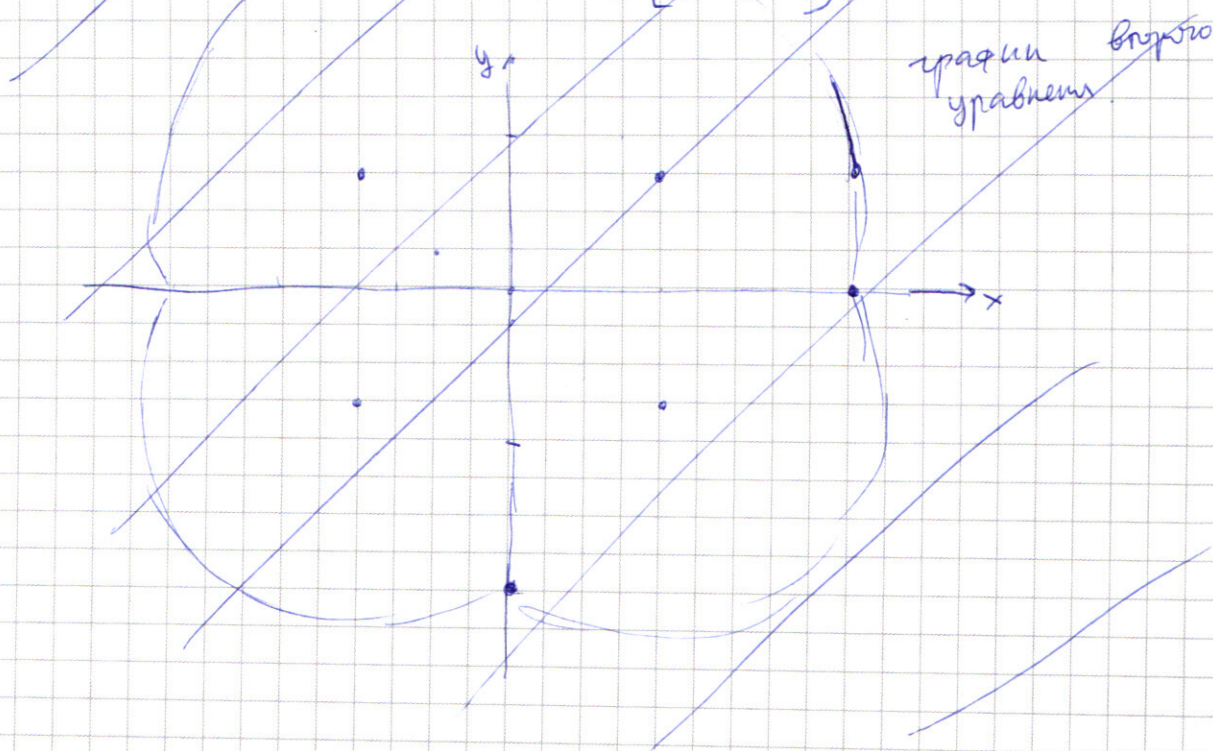
$$\frac{SO}{KS} = \frac{5}{2} = \frac{SP}{SD}$$

$$8) \frac{SO}{KS} = \frac{5}{2} \Rightarrow KS = \frac{72}{5}$$

Задача 5

$$y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 3$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad [f_2(x)]$$

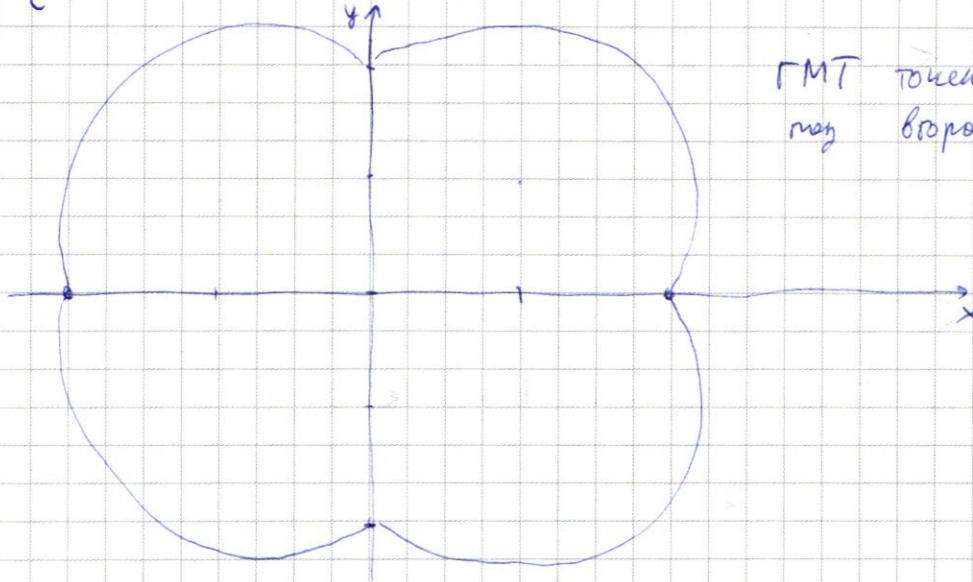


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

1) $y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$

2) $\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$



ГМТ точек, лежащих
на втором уравнении

Заметим, что $a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$.

I. если $x \geq \sqrt{a}$, то 1) $y = x - \sqrt{a} + \sqrt{a} - 2 = x - 2$

II. если $x < \sqrt{a}$, то 1) $y = \sqrt{a} - x + \sqrt{a} - 2 = 2\sqrt{a} - 2 - x$

III. если $\sqrt{a} \leq 3$ $y = |x - 2|$

I. если $\sqrt{a} < 2$
при $x \geq \sqrt{a}$, то $y = x - \sqrt{a} + \sqrt{a} - 2 = x - 2$

а) при $x \leq x$ $(x - 4)^2 + (x - 5)^2 = 25$

$$2x^2 - 18x + 16 = 0$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$(x - 1)(x - 8) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 8 \end{cases} \text{ подходит только } x = 8.$$

д) при $\sqrt{a} \leq x < 2$

$$(x-4)^2 + (x+1)^2 = 25$$

$$2x^2 - 6x + 17 = 25$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases} \text{ корней нет.}$$

б) при ~~$0 \leq x < \sqrt{a}$~~ $y = 2\sqrt{a} - 2 - x$

~~$(x-4)^2 + (x+1)^2$~~

$y \geq 0$ при $x \leq 2\sqrt{a} - 2$.

т.е. $\sqrt{a} < 2$, то ~~$2\sqrt{a} - 2$~~

~~если $1 \leq \sqrt{a} < 2$, то $y \geq 0$, $x \leq \sqrt{a} - 2$~~

при $0 \leq x < \sqrt{a}$ $y \geq 0$ если ~~при~~ $1 \leq \sqrt{a} < 2$

$$(x-4)^2 + (2\sqrt{a} - 2 - x)^2 = 25$$

$$x^2 - 8x + 16 + 4a - 20\sqrt{a} + 25 + x^2 + x(10 - 4\sqrt{a}) = 25$$

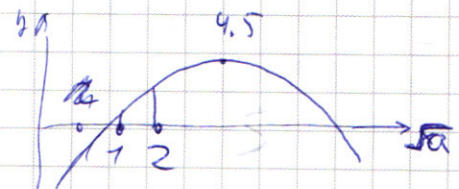
$$2x^2 + x(2 - 4\sqrt{a}) + 4a - 20\sqrt{a} + 16 = 0$$

$$x^2 + x(1 - 2\sqrt{a}) + 2a - 10\sqrt{a} + 8 = 0$$

$$D = (1 - 2\sqrt{a})^2 - 4(2a - 10\sqrt{a} + 8) =$$

$$= 1 - 4\sqrt{a} + 4a - 8a + 40\sqrt{a} - 32 = -4a + 36\sqrt{a} - 31$$

при $\sqrt{a} < 2$ $D < 0$.
в) если $0 \leq \sqrt{a} < 1$, то ~~$(x-4)^2 +$~~



$$-16 + 72 - 31 = 25 > 0$$

$$-4 + 36 - 31 = 1 > 0$$

при $1 < \sqrt{a} < 2$ корней два;

$$1 < \sqrt{a} < 2$$

$$x = \frac{2\sqrt{a} - 1 \pm \sqrt{D}}{2} = \sqrt{a} - \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \sqrt{a} - 3 \leq x \leq \sqrt{a} + 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $0 \leq x < \sqrt{a}$, то корней всего 0-2 шт.,

при $a \neq 1$ корней один, при a

$$\sqrt{a} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$4a = (2\sqrt{a} - 1)^2 = \pm \sqrt{D}$$

$$4a - 4\sqrt{a} + 1 = -4a + 36\sqrt{a} - 37$$

$$8a - 40\sqrt{a} - 32 = 0$$

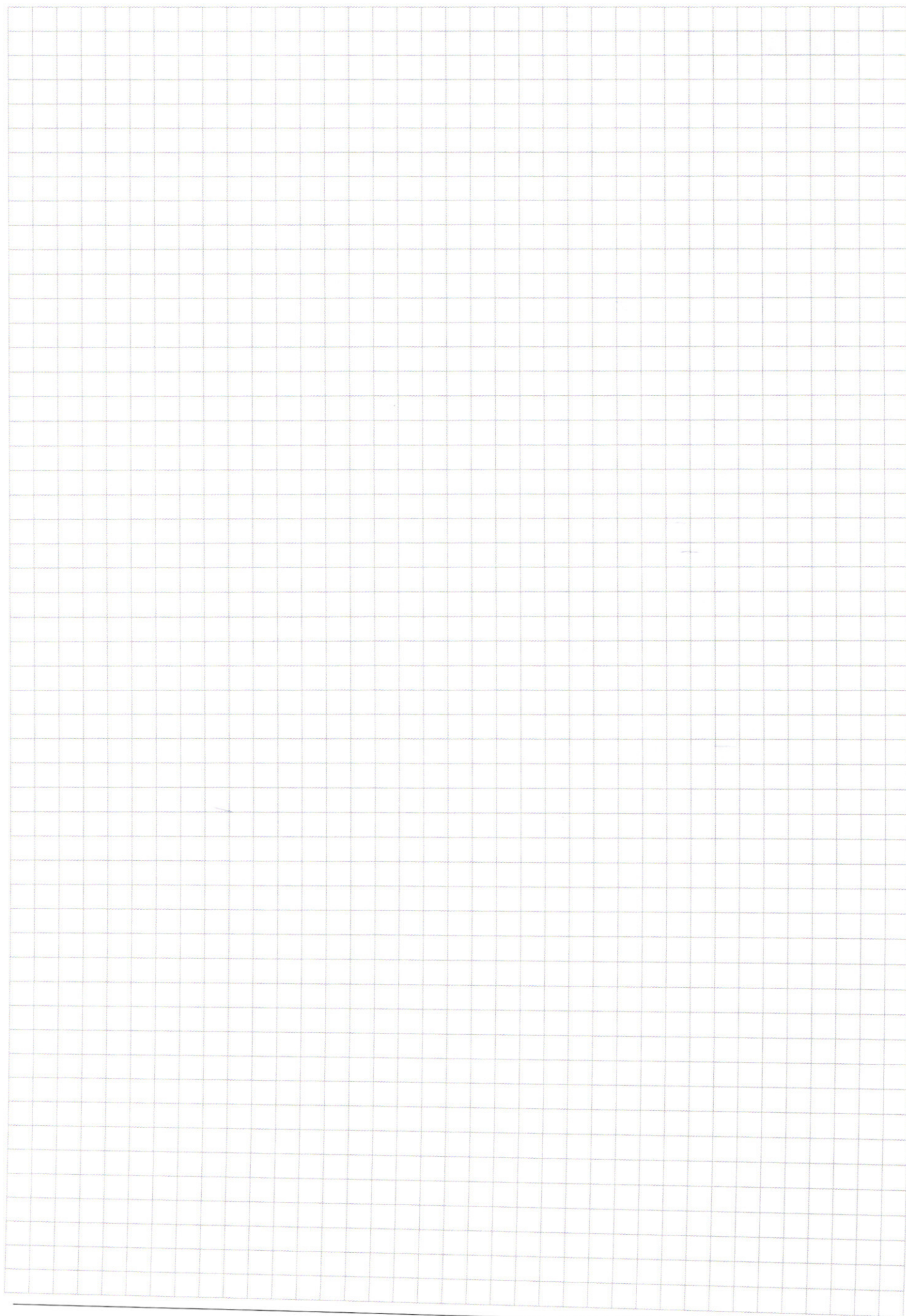
$$a - 5\sqrt{a} - 4 = 0$$

$$D = 25 + 16 = 41$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \Rightarrow a = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} > 5 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\sqrt{a} = -\frac{1 \pm \sqrt{D}}{2} + \sqrt{a}$$

$$-\frac{1 \pm \sqrt{D}}{2} = 0 \quad \text{при } \sqrt{D} = 1, \text{ при } a = 1$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 90 градусов

$$P_1 = z^{-90} \sum_{i=55}^{90} c_{90}^i$$

$$P_2 = \sum_{i=0}^{34} c_{90}^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{34} c_{90}^{90-i}$$

$$= \sum_{i=56}^{90} c_{90}^i$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow c_n^1$$

$$90 - 35 = 55$$

$$P_2: \begin{matrix} 0 & \dots & 34 \\ 90 & \dots & 56 \end{matrix}$$

$$P_1: \begin{matrix} 35 & \dots & 90 \\ 55 & \dots & 90 \end{matrix}$$

$$P_1 - P_2 = z^{-90} \left(\sum_{i=55}^{90} c_{90}^i - \sum_{i=56}^{90} c_{90}^i \right) = z^{-90} \cdot c_{90}^{55}$$

$$90 - 34 = 56$$

②

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\cos \alpha + \beta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \beta = \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha$$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

1 пункт

$$\cos 3x + \sin 3x \neq 0$$

$$\cos 3x - \sin 3x \neq 0$$

$$3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$$

$$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}$$

$$\cos 8x = \cos \left(\frac{8\pi}{12} + \frac{8n\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4n\pi}{3} \right) =$$



$$\frac{\cos 8x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 8x (\cos 3x + \sin 3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 8x (\cos 3x - \sin 3x) +$$

$$\cos 8x \cos 3x$$

$$\cos 8x = \cos 3x + 5x$$

$$\cos 3x = \cos x + \cos 2x$$

$$③ f(x) = 27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_3 x} \leq 48$$

$$\text{пусть } n = \sqrt{\log_3 x}, n \neq 0. (x \neq 1)$$

$$\text{если } n \neq 0, \text{ тогда } f(x) = 27 - 11 + 40 =$$

$$2^8 = 812$$

$$\log_2 16 = 4$$

$$\sqrt{\log_2 16} = 2$$

$$\sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$$

$$27n - 11 \cdot 3^{2n} + 40x^{\frac{1}{n}} \leq 48$$

$$x = 3^{(n^2)}, x > 1$$

$$27n - 11 \cdot 3^{2n} + 40 \cdot (3^{n^2})^{\frac{1}{n}} \leq 48$$

$$// 27 - 99 + 40 \cdot 3 = 147 - 99 = 48$$

$$27n - 11 \cdot 3^{2n} + 40 \cdot 3^n \leq 48$$

$$3^{3n} - 11 \cdot 3^{2n} + 40 \cdot 3^n \leq 48$$

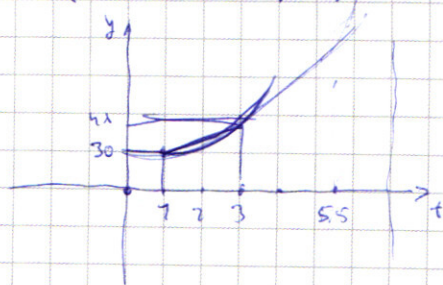
$$3^n (3^{2n} - 11 \cdot 3^n + 40) \leq 48 = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 2^4$$

$$1) n=1, 3(9 - 33 + 40) = 3 \cdot 16, x = 3.$$

~~тогда~~

$$\text{пусть } t = 3^n, t > 1$$

$$t(t^2 - 11t + 40) \leq 48$$



$$D = 121 - 160 < 0$$

$$1 \cdot 30$$

$$\text{всп}$$

$$\frac{11}{2} = 5.5$$

$$27 - 99 + 120 - 48 = 0$$

$$f(t)'$$

$$t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(t-3)(t^2-8t+16) = (t-4)^2(t-3)$$

$$t^3 - 3t^2 - 8t^2 + 24t$$

$$(t-3)(t-4)^2 = (t^2-8t+16)(t-3) = t^3 - 3t^2 - 8t^2 + 24t + 16t - 48 =$$

$$-t^3 - 11t^2 + 40t - 48$$

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{3^4} \quad 64 - 176 + 160 =$$

$$n = \log_3 4 \quad 3^{3\log_3 4} = 64$$

$$x = 3^{(\log_3 4)^2} = 4^{\log_3 4} \quad 64 - 16 = 48$$

$$\log_3 x = \frac{1}{(\log_3 4)^2} \quad 11 \cdot 3^{2\log_3 4} = 11 \cdot 16$$

$$40 \cdot (3^{\log_3 4})^{\frac{1}{4}} = 160$$

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90} \\ y \leq \log_6 x \end{cases}$$

$x > 0$

пусть $x = 6^n, \quad x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y \geq 90 + 6^n - 6^{90} \\ y \leq n \end{cases} \quad (6^{n+1} - 1 + 6^n) (6^{n+1} - 6^n)$$

$$n \leq 90 + 6^n - 6^{90}$$

при $n > 90$ считаем

$$n \leq 90 + 6^n - 6^{90}$$

~~5/12~~

1... 90
-0... 89
1 2 3

$$\log_6 x \geq 90 + x - 6^{90}$$

$$1 + \sum_{n=0}^{89}$$

кон-во $f(x) = 1 + \lfloor \log_6 x \rfloor - 90 - x + 6^{90}$

$$x \in [6^n; 6^{n+1} - 1]$$

$$y \leq n$$

$$y \geq 90 + x - 6^{90}$$

$$x = 90$$

$x=1$

при n

$$y \leq 0$$

$$y \geq 91 - 6^{90}$$

678 35 0

30 итер.

$$6^{n+1} - 6^n$$

$$6^{90} - 91 + 1 = 6^{90} - 90$$

итер.

$$6 \dots 6^{90}$$

~~$$\cos 8x = \cos 2x + 6x$$~~

$$\cos 8x = \cos (2x + 6x) = \cos 2x \cos 6x - \sin 2x \sin 6x$$

$$\frac{6^{91} - 1}{6 - 1} - 1 = \underbrace{\frac{5 \dots 5}{90}}_{\text{сумма } 90 \text{ чисел}} \sin 8x = \cos 2x \sin 6x + \cos 6x \sin 2x$$

~~$$\underbrace{1 \dots 1}_{90} \times$$~~

$$6^{91} = 6 \cdot 6^{90} - 1 = \frac{5 \cdot 6^{90} + 1 \cdot 6^{90} - 1}{5} = 6^{90} + \frac{6^{90} - 1}{5}$$

$$\frac{6^{91} - 1}{5} - 1 = \frac{5 \cdot 6^{90} + 6^{90} - 1 - 5}{5} = 6^{90} + \frac{6^{90} - 6}{5} = 6^{90} + 6 \left(\frac{6^{89} - 1}{5} \right)$$

$$(6^{90} - 1)(6^{90} - 90 + 1)$$

$$1 \dots 6^{90} - 1$$

$$\frac{6^{90} \cdot (6^{90} - 1)}{2}$$

~~$$1 + 6^{180} - 90 \cdot 6^{90} + 6^{90}$$~~

$$(6^{90} - 1)(6^{90} - 90) = \frac{6^{180} - 90 \cdot 6^{90} + 90}{2} + \frac{90 \cdot 6^{90} - \frac{6^{90}}{5} + \frac{6}{5}}{2} -$$

$$- \frac{6^{180}}{2} + \frac{6^{90}}{2} =$$

$$= 3 \cdot 6^{179} - 3 \cdot 6^{89} - \frac{6^{90}}{5} + 90 + \frac{1}{5} = 3 \cdot 6^{179} -$$

$$\frac{6^{90}}{2} + \frac{6^{90}}{5} = \frac{5 \cdot 6^{90} + 2 \cdot 6^{90}}{10} = \frac{7 \cdot 6^{90}}{10}$$

$$\frac{6^{90}}{2} - \frac{6^{90}}{5} = \frac{5 \cdot 6^{90} - 2 \cdot 6^{90}}{10} = \frac{3 \cdot 6^{90}}{10}$$

$$6^{90} - \frac{3 \cdot 6^{90}}{10} = \frac{7 \cdot 6^{90}}{10}$$

$$7 \cdot 6 = 42$$

$$91 \cdot 5 = 455$$

$$6^{90} - 90 \cdot 6^{90} = 6^{90} - 540 \cdot 6^{89}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \cos$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x \quad \sin$$

$$\cos 2x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 2x (\cos 3x + \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos 3x \cos 2x - \cos 2x \sin 3x + \sin 2x \cos 3x + \sin 2x \sin 3x$$

$$\cos 11x + 2 \sin 2x \sin 3x - \sin 11x + 2 \sin 2x \cos 3x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 3x + \sin 3x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

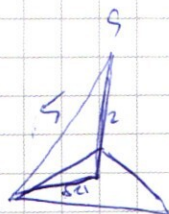
$$= \cos 2x (\cos^2 3x - \sin^2 3x) - 2 \sin 2x (\cos 3x \sin 3x) =$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} = \cos 3x + \sin 3x$$

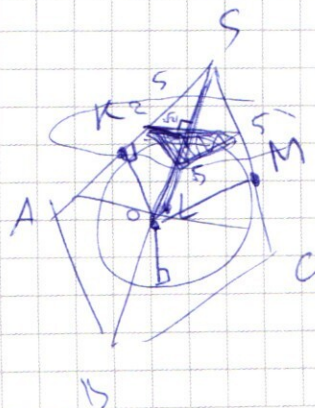
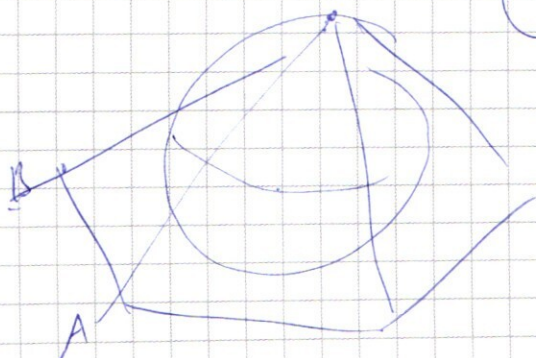
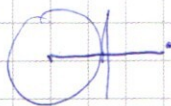
$$= \cos 2x (\cos 3x - \sin 3x) - \frac{2 \sin 2x (\cos 3x \sin 3x)}{\cos 3x + \sin 3x}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \cos 2x (\cos 3x \sin 3x) + \sin 2x (\cos^2 3x - \sin^2 3x)}{\cos 3x - \sin 3x}$$

$$= \sin 2x (\cos 3x + \sin 3x) + \frac{2 \cos 2x (\cos 3x \sin 3x)}{\cos 3x + \sin 3x}$$



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$



$$\begin{aligned} & \text{если } a \geq 0 \\ & \text{то } x \geq \sqrt{a} \Rightarrow x \geq 0 \\ & \text{и } \sqrt{a} \geq 2 \\ & y = x - \sqrt{a} + \sqrt{a} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (x-2)^2 &= 25 \\ x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4x + 4 &= 25 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 12x - 5 = 0$$

$$D = 144 + 40 = 184 = 92 \cdot 2 = 4 \cdot 46 = 8 \cdot 23$$

$$\sqrt{a} \geq 2$$

$$\# \quad x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 6|y| + 9 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8|x| - 6|y| = 0$$

$$\sqrt{a} < 2$$

$$\text{и } x \geq \sqrt{a} \Rightarrow x \geq 0$$

$$y = x - \sqrt{a} + \sqrt{a} - 2 = x - 2$$

$$(x-4)^2 + (x-2-3)^2 = 25$$

$$\rightarrow \text{и } x \geq 2$$

$$(x-4)^2 + (x-5)^2 = 25$$

$$2x^2 - 18x + 16 = 0$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$(x-8)(x-1) = 0$$

$$x=8 \quad x=1$$

$$\text{и } \sqrt{a} > x$$

$$y = 2\sqrt{a} - x - 2$$

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{a} - 5 - x)(2\sqrt{a} - 5 - x) = \\ & = 4a - 10\sqrt{a} - 2\sqrt{a}x - 10\sqrt{a} + 25 + 5x - \\ & \quad - 2\sqrt{a}x + 5x + x^2 = \\ & = x^2 + x(10 - 4\sqrt{a}) + 4a - 20\sqrt{a} + 25 \end{aligned}$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x=-1 \quad x=4$$

$$(x-4)^2 + (-x-1)^2 = 25$$

$$x^2 - 8x + 16 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x=-1 \quad x=4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2};$$

$$\cos 8x = \cos 2x \cos 6x - \sin 2x \sin 6x$$

$$\sin 8x = \cos 2x \sin 6x + \sin 2x \cos 6x$$

$$\frac{(\cos 2x \cos 6x - \sin 2x \sin 6x)(\cos 3x - \sin 3x)}{\cos 6x} +$$

$$+ \frac{(\cos 2x \sin 6x + \sin 2x \cos 6x)(\cos 3x + \sin 3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2};$$

$$\cos 2x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 2x (\cos 3x + \sin 3x) +$$

$$+ \frac{\cos 2x \sin 6x (\cos 3x + \sin 3x) - \sin 2x \sin 6x (\cos 3x - \sin 3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2};$$

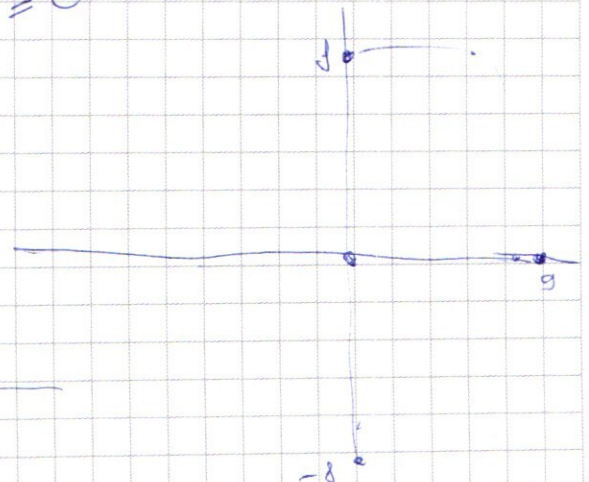
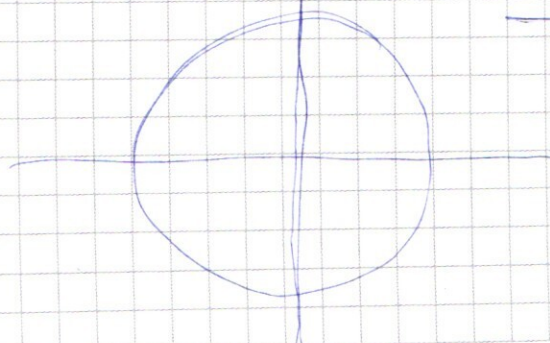
$$\cos 2x \cos 3x - \cos 2x$$

$$\cos 2x \sin 6x \cos 3x + \cos 2x \sin 6x \sin 3x - \sin 2x \sin 6x \cos 3x + \sin$$

$$a \geq 0$$

$$y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2$$

$$(|x - 4|)^2 + (|y - 3|)^2 = 25$$



5

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

