

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $p \geq 61$ раз
 $q < 49$ раз
Всего - 110 раз
Найти: $p - q$.

Решение.
Заметим, что q - вероятность выпадения орла менее 49 раз, - равен вероятности выпадения орла более 61 раза, т.к. вероятности выпадения орла и решки одинаковы и всего бросков - 110. Тогда $(p - q)$ - вероятность выпадения орла ровно 61 раз.

$$p - q = \left(\frac{1}{2}\right)^{61} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{49} \cdot C_{110}^{61} = C_{110}^{61} \cdot \frac{1}{2^{110}} = \frac{110!}{61! \cdot 49! \cdot 2^{110}} - \text{ответ.}$$

$$\text{№2) } \frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 14x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 14x (\cos 5x - \sin 5x)}{(\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \sin 14x \cos 5x + \sin 14x \sin 5x}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 9x - \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{(\cos 9x - \sin 9x)^2}{\cos^2 10x} = 2 \Rightarrow 2 \sin 9x \cos 9x = 2 \cos^2 10x$$

$$\sin 18x = -(2 \cos^2 10x - 1) \Rightarrow \sin 18x + \cos 20x = 0$$

$$\sin(19x - x) + \cos(19x + x) = 0 \Rightarrow \sin 19x \cos x - \sin x \cos 19x + \cos 19x \cos x - \sin 19x \sin x = 0$$

$$\sin 19x (\cos x - \sin x) + \cos 19x (\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow (\cos 19x + \sin 19x) (\cos x - \sin x) = 0$$

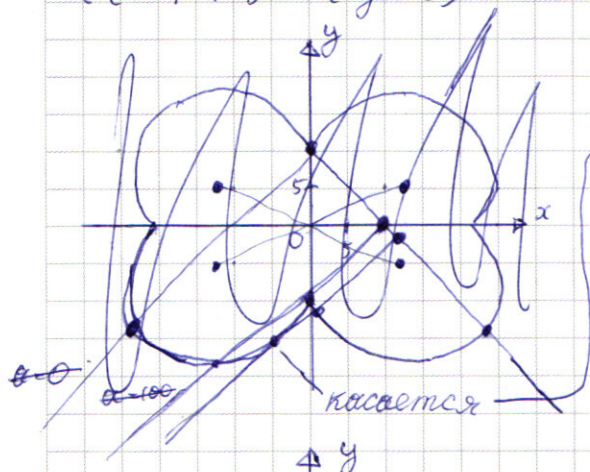
$$\cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ но, т.к. } \cos 10x \neq 0, \text{ корни не подходят}$$

$$\cos 19x + \sin 19x = 0 \Rightarrow \tan 19x = -1 \Rightarrow 19x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{76} + \frac{\pi k}{19}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{76} + \frac{\pi k}{19}, k \in \mathbb{Z}.$$

№5) Ровно три решения:

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a} \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$



$$a = 0; a = 100;$$

$\pm \sqrt{169 - (x+12)^2} - 5 = x + m$, где m такое, что уравнение имеет один корень (отражается)

$$(-x - m - 5)^2 = 169 - (x + 12)^2$$

$$x^2 + m^2 + 25 + 2mx + 10x + 10m - 169 + x^2 + 24x + 144 = 0$$

$$2x^2 + (2m + 10 + 24)x + m^2 + 25 + 10m - 169 + 144 = 0$$

$$2x^2 + (2m + 10 + 24)x + m^2 + 10m = 0$$

$$D = 4m^2 + 34^2 + 136m - 8m^2 - 80m = 0$$

$$-4m^2 + 56m + 34^2 = 0 \quad m = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 289 \cdot 4}}{2}$$

$$m^2 - 14m - 289 = 0 \quad m = 7 \pm \sqrt{49 + 289} = 7 \pm \sqrt{338}$$

Нужен отр. $m \Rightarrow m = 7 - \sqrt{338}$.

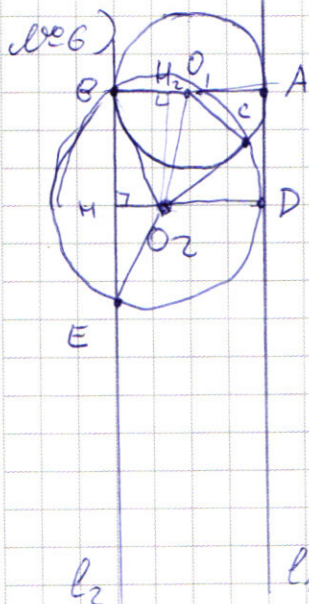
$$-|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a} = x + 2 - 2\sqrt{a_2} = x + m$$

$$2 - 2\sqrt{a_2} = 7 - \sqrt{338}$$

$$a_2 = \frac{343 - 10\sqrt{338}}{4}$$

$$-10 = -|\sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a} \Rightarrow -2\sqrt{a} + 2 = -10 \Rightarrow \sqrt{a} - 1 = 10 \Rightarrow a = 121$$

Ответ: 121; $\frac{343 - 10\sqrt{338}}{4}$.



Дано: а) $S_{BO, CO_2} : S_{O_2 BE} = 4$; б) $BD = 4$.

Найти: а) $R_2 : R_1 = ?$ б) $R, R_2 = ?$

Решение. $S_{O_2 BE} = 2S_{O_2 HO} = O_2 H \cdot BA$

$$O_2 H = 2R_1 - R_2; BA = \sqrt{R_2^2 - O_2 H^2} = \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}$$

$$S_{O_2 BE} = (2R_1 - R_2) \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}$$

$$S_{BO, CO_2} = 2S_{BO, O_2} = \sin \angle O_1 BO_2 \cdot BO_1 \cdot BO_2 = \frac{O_2 H_2}{BO_2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 =$$

$$= O_2 H \cdot BO_1 = R_1 \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}$$

$$\frac{S_{BO, CO_2}}{S_{O_2 BE}} = 4 = \frac{R_1 \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}}{(2R_1 - R_2) \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}} = 4 \Rightarrow R_1 = 4(2R_1 - R_2) \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4}$$

ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BQ=4 \Rightarrow BQ^2 + QH^2 = 16$, т.к. $BQAH$ — прямоугольник.

$$R^2 - (2R_1 - R_2)^2 + (2R_1)^2 = 16 \Rightarrow R^2 + 4R_1^2 - 4R_1R_2 + 4R_1R_2 = 16.$$

$$R_1, R_2 = 4; \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{4} \Rightarrow R_2 = \frac{7}{4}R_1 \Rightarrow \frac{7}{4}R_1^2 = 4 \Rightarrow R_1^2 = \frac{16}{7} \Rightarrow R_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$R_2 = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} \quad \text{Ответ: а) } \frac{7}{4}; \text{ б) } R_1 = \frac{4}{\sqrt{7}}; R_2 = \sqrt{7}.$$

реш.)

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110} \\ y \leq \log_5 x \end{cases} \Leftrightarrow 110 + x - 5^{110} \leq y \leq \log_5 x.$$

$$110 + x - 5^{110} \leq \log_5 x \Rightarrow x - \log_5 x \leq 5^{110} - 110 \Rightarrow 1 \leq x \leq 110.$$

При $x=1$: y целых может быть $5^{110} - 110$

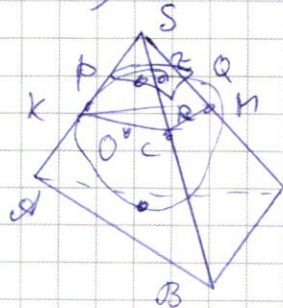
При $x=2$: $-5^{110} - 111$ и т.д.

$$\text{Всего решений целых: } 5^{220} - 109 \cdot 5^{110} - \frac{5^{110} \cdot (5^{110} + 1)}{2} + \sum_{i=1}^{5^{110}} [\log_5 i]$$

$$\frac{5^{220}}{2} - \frac{5^{110}}{2} - 5^1 - 5^2 - \dots - 5^{100} + 110 - \text{ответ};$$

реш.)

Дано: а) $S_{PRQ} = 9$; $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$; б) $SO = 25$; $(KLM) \parallel (ABC)$



Найти: а) S_{KLM} ; б) V_{SAEC} . Решение.

$$\Delta KSO - \text{прямо.} \Rightarrow \cos \angle KSO = \frac{KS}{SO} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$KS = R\sqrt{35}; \quad SO = 6R; \quad OZ = R, \quad Z \in (PRQ);$$

$$OZ \perp (PRQ); \quad SZ \perp (PRQ).$$

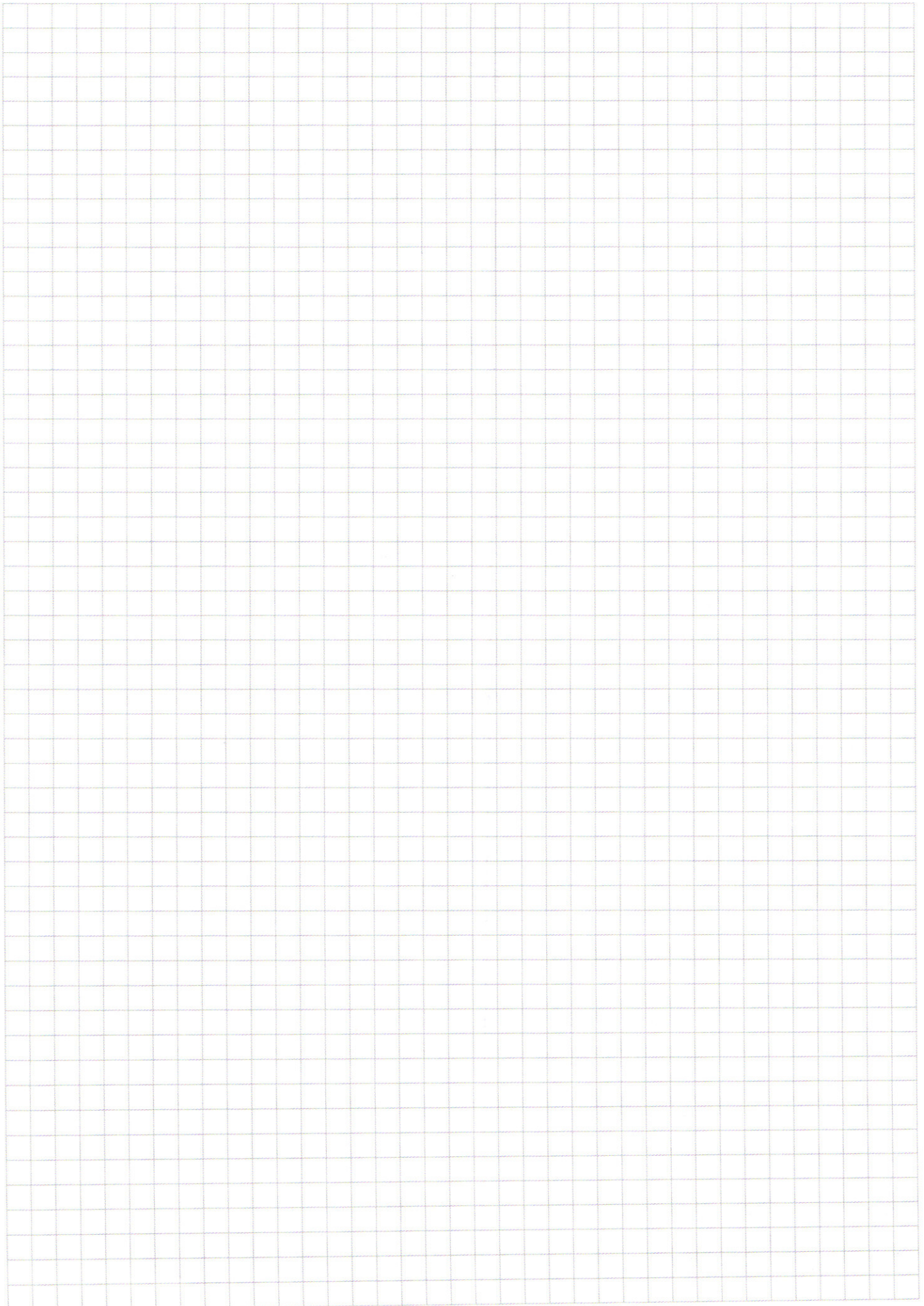
$$ZP^2 = OP^2 - R^2 \Rightarrow OP^2 = R^2 + KP^2 \Rightarrow ZP = KP$$

$$SP^2 = SZ^2 + ZP^2 = 25R^2 + KP^2 \Rightarrow SP^2 = 25R^2 + (SK - SP)^2 =$$

$$= 25R^2 + 35R^2 + SP^2 - 2R \cdot SP \cdot \sqrt{35} \Rightarrow 60R^2 = 2R \cdot SP \cdot \sqrt{35} \Rightarrow SP = \frac{30R}{\sqrt{35}}.$$

$$\left(\frac{SP}{SK}\right)^2 = \frac{S_{PRQ}}{S_{KLM}}, \text{ т.к. } \angle P \text{ в } SPRQ \text{ и } SKLM;$$

$$S_{KLM} = \frac{35^2}{100} = 12,25 - \text{ответ}.$$





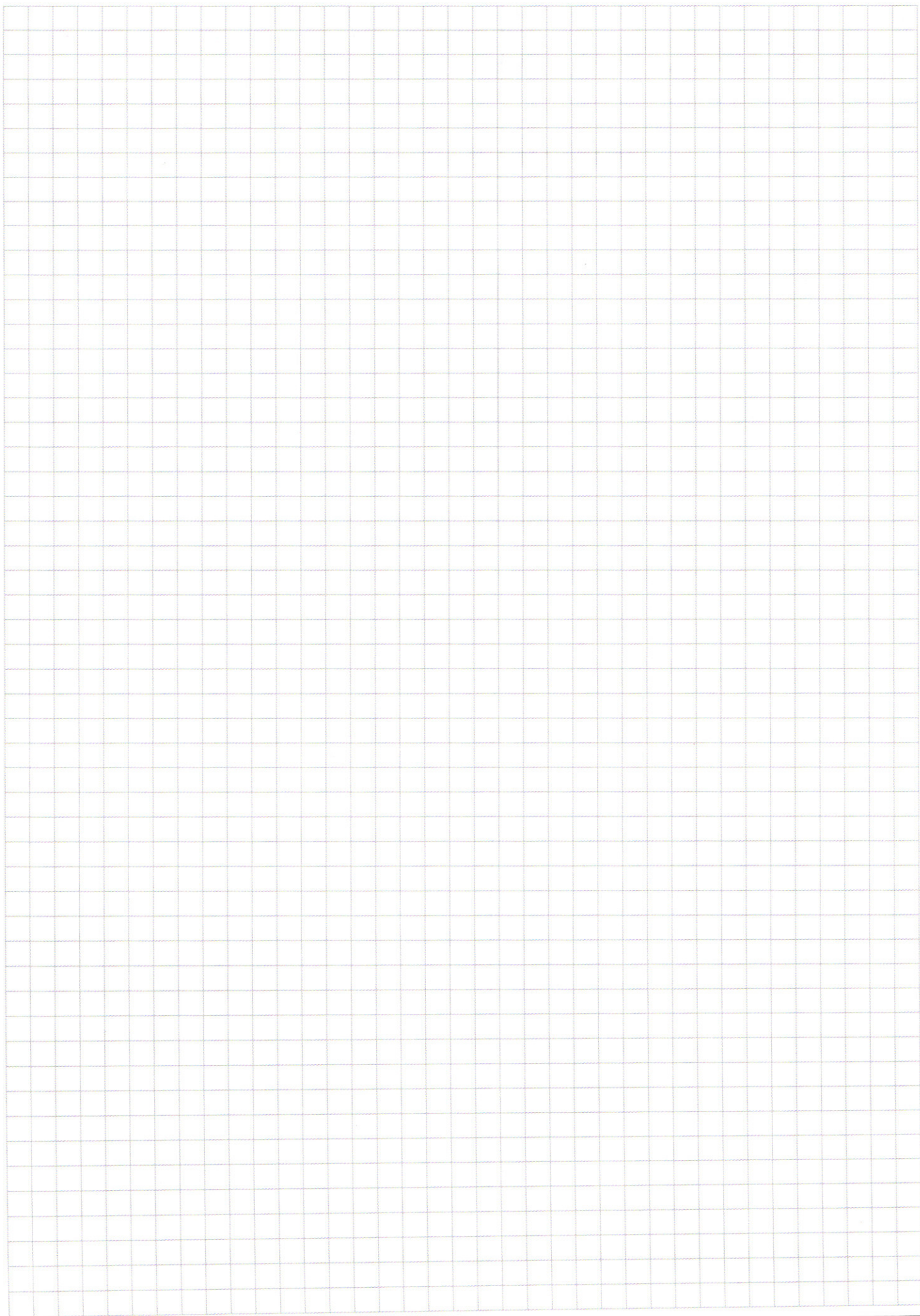
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x+3=\sqrt{13^2-(x-12)^2} \Rightarrow x^2+6x+9=13^2-x^2+24x-12^2$$

$$2x^2+18x+9-25=0 \Rightarrow x^2-9x-16=0 \Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81+64}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{145}}{2}$$

$$\sqrt{a}=\frac{9+\sqrt{145}}{2}$$

206) 207) Найдите количество пар целых чисел (x, y) $\rightarrow y$ для $x=1: 5^{110}-110$ цел.

$$\begin{cases} y \geq 110+x-5^{110} \\ y \leq \log_5 x \end{cases} \Leftrightarrow 110+x-5^{110} \leq y \leq \log_5 x$$

$$\sum_{i=1}^{5^{110}} (5^{110}-109-i) + [\log_5 i]$$

$$110+x-5^{110} \leq \log_5 x$$

$$x - \log_5 x \leq 5^{110}-110$$

$$5^{110}-\log_5 5^{110}=5^{110}-110$$

$$5^{-24} \leq x \leq 5^{110}$$

$$111-5^{110} \leq y \leq \log_5 1=0 \text{ - для } x=1.$$

$$+ \sum_{i=1}^{5^{110}} [\log_5 i] = \underbrace{5^{-24}}_1 + \underbrace{25-124}_2 + \underbrace{725-624}_3 + \dots + \underbrace{5^{109}-(5^{109}-1)}_{109} + 110$$

$$1(5^2-5^1)+2(5^3-5^2)+3(5^4-5^3)+\dots+109(5^{110}-5^{109})+110$$

$$5^2-5^1+2 \cdot 5^3-2 \cdot 5^2+3 \cdot 5^4-3 \cdot 5^3+\dots+109 \cdot 5^{110}-109 \cdot 5^{109}+110$$

$$-5^1-5^2-5^3-5^4-\dots-5^{109}+109 \cdot 5^{110}+110$$

$$(5^{110}-5^1)+(5^{110}-5^2)+\dots+(5^{110}-5^{109})+110$$

$$5^{220}-109 \cdot 5^{110}-\frac{5^{220}+5^{110}}{2}-5^1-5^2-\dots-5^{109}+109 \cdot 5^{110}+110$$

$$\frac{5^{220}}{2}-\frac{5^{110}}{2}-5^1-5^2-\dots-5^{109}+110$$

$$\sum_{i=1}^{109} 5^i = 6 \cdot (5^1+5^3+\dots+5^{109})+10 \cdot 5^{109}$$

$$5^1+5^3+\dots$$

$$5^1(1+25)+5^5(1+25)-$$

$$5^{109} \cdot 5 \cdot 5^{108} \cdot 5^2 (5^1+5^3+\dots+5^{109})+5^{109} \cdot 5^5 (5^1+5^3+\dots+5^{109})$$

$$5(5+1)+5^3(5+1)+\dots+5 \cdot 6+5^3 \cdot 6+\dots+6(5^1+5^3+\dots)$$

$$d) (10 \neq 6) \quad BD = 4 \Rightarrow O_2 H_2^2 + 2R_1^2 = 16 \rightarrow R_1^2 + 4R_1^2 - 4R_1^2 - R_2^2 + 4R_1 R_2 + 4R_2^2 = 16$$

$$R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 + 4R_1^2 = 16$$

$$4R_1(R_1 + R_2) = 16$$

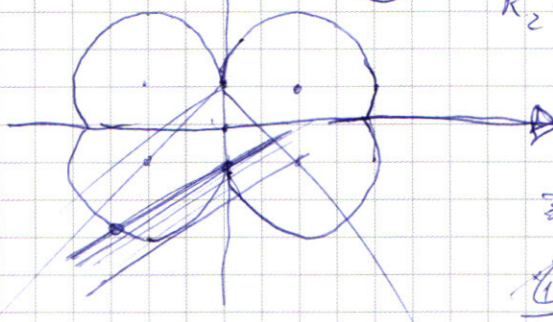
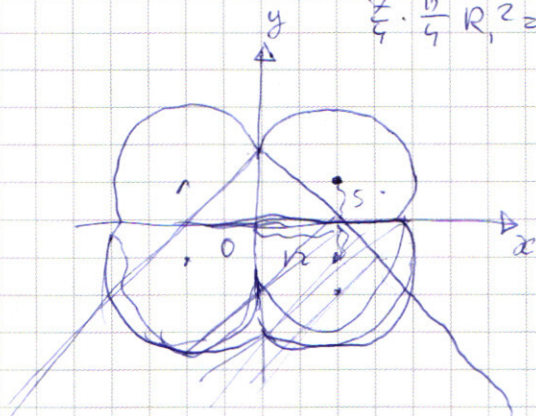
$$R_1 = R_2 = \frac{2}{3} R, \quad \frac{2}{3} R, \left(\frac{2}{3} R + R\right) = 4$$

$$R_1(R_1 + R_2) = 4$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} R_1^2 = 4 \Rightarrow R_1^2 = \frac{64}{32} \rightarrow R_1 = \frac{8}{\sqrt{32}}$$

$$R_2 = \frac{2}{3} R_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{32}}$$

$$R_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{49}{32}} = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{11}}$$



$$(-x-12)^2 + (-y-5)^2 = 169$$

$$y = -\sqrt{169 - (x+12)^2} - 5$$

$$y = x + m$$

$$196 + 289 = 4$$

$$280 + 50 = 330$$

$$-|x - \sqrt{a_2}| + 2 - \sqrt{a_2} =$$

or

$$x - \sqrt{a_2} + 2 - \sqrt{a_2} =$$

$$= x + m$$

$$-2\sqrt{a_2} = 5 - \sqrt{338}$$

$$4a_2 = 338 + 5 - 10\sqrt{338}$$

$$a_2 = \frac{343 - 10\sqrt{338}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $p \approx p \approx 61$ раз $q \approx 49$ раз. Взяв найдем: $p \approx q$

$61 + 49 = 110$; $q \approx 61$ раз, т.к. вероят. одинаковы.

Значит $(p \approx q)$ - ровно 61 раз выпадет $\Rightarrow p \approx q = \left(\frac{1}{2}\right)^{61} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{49} \cdot C_{110}^{61}$

$$C_{110}^{61} \cdot \frac{1}{2^{110}} = \frac{110!}{61! \cdot 49!} \cdot \frac{1}{2^{110}} = \frac{110 \cdot 109 \cdot 108 \cdot \dots \cdot 50}{61 \cdot 60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 10}$$

№2)

$$\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 14x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 14x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$(\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 14x \cos 5x + \cos 14x \sin 5x - \sin 14x \cos 5x + \sin 14x \sin 5x$$

$$\cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\cos 9x - \sin 9x$$

$$\cos 10x$$

$$\cos 9x (1 + \sqrt{2} \cos x) - \sin 9x (1 + \sqrt{2} \sin x) = 0$$

№3) $27^{\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 3^{\sqrt{4 \log_3 x}} + 55x^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 75$

$$27^{\sqrt{\log_3 x}} - 13 \cdot 9^{\sqrt{\log_3 x}} + 55x^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 75$$

$$\cos 10x \cos x + \sin 10x \sin x - \sin 10x \cos x + \cos 10x \sin x$$

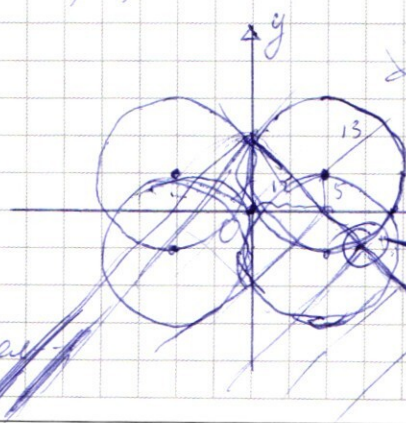
$$\cos x (\cos 10x - \sin 10x) + \sin x (\cos 10x + \sin 10x)$$

№5) $\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a} \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$ Ровно три решения.

$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169$$

Решаем графически:

$$(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 13^2$$



$$y = -(12 - \sqrt{a}) - 2 + \sqrt{a}$$

$$A(|x| = 2)$$

$$y = \sqrt{13^2 - x^2} \rightarrow 12 \approx 5 \approx 4$$

подходит только эта точка;

$$y = -x + 2$$

$$-\sqrt{13^2 - (x - 12)^2} + 5 = -x + 2$$

☒ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

($\cos x \pm \sin x$) ($\sin x \pm \cos x$) $\sin 19x (\cos x - \sin x) \pm \cos 19x (\cos x - \sin x)$

1004) а) $S = 9$ $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$
 б) $\text{Площадь: } S_{\Delta KLM} = ?$

5) $SO=25$; $(KLM) \parallel (ABE)$

Задача: $S_{\Delta KLM}$ - ? Решение.

Пример: 5) $V_{\text{SAGE}} - ?$

$$\Delta K80 - \text{прямоугольный} \Rightarrow \cos \angle K80 = \frac{K8}{50} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\frac{K_S}{K_0} = \frac{K_S}{R} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{35}} \Rightarrow K_S = R\sqrt{35}$$

где R - радиус сферы.

~~(Perogramma combo (PRQ) ILCKLM)~~

$$OZ = R, \quad Z \in (PRQ); \quad OZ \perp (PRQ)$$
$$SZ \vdash (PRQ)$$

$$\frac{80}{R} = 6 \Rightarrow \begin{array}{l} SO = 6R \\ SZ = 5R \end{array}$$

$$zP^2 = OP^2 - R^2 \Rightarrow OP^2 = R^2 + kP^2 \Rightarrow zP^2 = kP^2 \quad kP = zP$$

$$S p^2 = S z^2 + z p^2 = 25 R^2 + k p^2$$

$$SP^2 = 2SR^2 + (SR - SP)^2 = 2SR^2 + 3SR^2 + SP^2 - 2R \cdot SP \cdot \sqrt{35}$$

$$\left(\frac{SP}{SK} \right)^2 = \frac{S_{PRQ}}{S_{KLM}} =$$

$$\Rightarrow GOR^2 = 2R \cdot SP \sqrt{35}.$$

$$S_{KCP} \cdot \frac{800}{352} \approx 9$$

$$S_{KLM} = \frac{35^2}{100}$$

$$30R = SP \sqrt{35} \Rightarrow SP = \frac{30R}{\sqrt{35}}$$

Dato: $S_{CO_2} : S_{O_2BE} = 4$

5) $\frac{2}{3} B D \text{ cm}$

Поэтому αCO_2 и DQ_2 (радиусы)

5) $\leftarrow$ $\$ \text{DO}_2 : \text{BO}_2 - ?$

Решение. $S_{\text{гор}} = 2S_{\text{д.уг}} = R_1 \sqrt{R_2^2 - R_1^2} \cdot 0,4 \cdot 0,2 \text{ м} =$

$$S_{\text{Og.co}_2} = 2 S_{\text{Og.co}_2} \leftarrow = 0, H, \sqrt{0, H, R_2^2} - 0, H, 2$$

$$Q_1 R_1 = Q_2 R_2 = \sqrt{R_2^2 - (R_2 \cos \theta_1 - R_1)^2}$$

$$d = O_1 O_2 = \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + O_2 R_2^2} = \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}$$

$$d = \sqrt{(R_2^2 + R_1^2) + 2R_1R_2 + R_2^2 - 4R_1^2 + 4R_1R_2 - R_2^2} = \sqrt{R_2^2 - 3R_1^2 + 2R_1R_2}$$

$$\sqrt{R_2^2 + (R_2 + R_1)^2 - (2R_1)^2}$$

$$S_{GPE} = \sqrt{R_z^2 - (2R_1 - R_2)^2} \cdot (2R_1 - R_2)$$

$$\sqrt{(R_2 + R_1 - 2R_1)(R_2 + R_1 + 2R_1)}$$

$$\sin \angle O_2 O H_2 = \frac{\sqrt{R_1^2 - (2R_1 - R_2)^2}}{R_1}$$

$$\sqrt{(R_2 - R_1)(R_2 + 3R_1)}$$

$$S_{O_2O_2} = \frac{1}{2} \sin \angle O_2PH_2 \cdot R_1 R_2 = \frac{1}{2} R_1 \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}$$

$$R_1 \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2}$$

$$= 4 \Rightarrow R_1 = 4(2R_1 - R_2) = R_1 = 8R_1 - 4R_2 \Rightarrow 4R_2 = 7R_1$$

$$\sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2} \cdot (2R_1 - R_2)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{4}$$

