МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p-q$.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x-\sin 3x}+\frac{\sin 4x}{\cos 3x+\sin 3x}=\sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}}-7\cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}}+60\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}}\leqslant 72$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO=\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO=9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x=|y-\sqrt{a}|+\sqrt{a}-4, \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=3$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y\geqslant 80+x-7^{80}, \\ y\leqslant \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\boxed{q \le 28}$ $\boxed{p > 42}$

$\boxed{70 = 1}$ $\sqrt{5k^2}$ $\log_x^{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{3}x} 2$ $\sqrt{a^2+b^2}$ $\cos(x-p)$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

$\cos 4x \cdot \cos 3x$ $\sin$ $\left(x^{\log_x 2}\right)$

Если орёл выпадет 1 раз, то

$\frac{1}{2}$ $107 - 72 =$ $= 135$ $p - q$ $\frac{8}{28}$ $\frac{9}{28} + \frac{8}{128} + \frac{8}{28}$ $\frac{2^{70}}{2^{42}}$ $\sin^2 x + \cos^2 x$ $\frac{8}{20}$

$-14 \cdot 9 + 180 - 72 + 9$

-126

$\boxed{\text{решка выпадет} \ge 42 \text{ раз}}$

$1 - 2\sin^2 x =$ $8 - 56 + 120 - 70$

$\frac{5}{\pi k}$; $\boxed{5k+2} =$ 128 $6k$

p $\frac{1}{2}$ решка выпадет ≤ 28 решка выпала

27 $64 - 14 \cdot 16 +$ $\frac{7}{12}$ $\log_x x$ $7k+4$ $7k+6$ 70 $\frac{118}{28} = 6$ $\frac{149}{134}$

$p = \frac{C_{70}^{43} \cdot 2^{27}}{2^{70}}$ $+240 - 72$ $C_{70}^{43} = \frac{70!}{43! \, 27!}$ y^3 $q = \frac{C_{70}^{42} \cdot 2^{28}}{2^{70}}$ $\frac{343}{1029}$ 58

$1 - 14 + 60 - 38 \cdot 2$ 12 36

$13 - 72$ 58 $8 - 14 \cdot 4$ 43 42

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ C_n^2

86 $6^2 \cdot 2$

$29 \cdot 69 \cdot 33 \cdot 67 \cdot 61 \cdot 29 \cdot 59$ $29 \cdot 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65$

$64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$

$18 \cdot 15$ $3 \cdot 58 \cdot 57$

$y^3 - 14y^2$ $\frac{70!}{43! \, 27!} \cdot 2^{27}$ 58 $3 \quad 5 \quad 22 \quad 2 \quad 829$

$29 \cdot 69 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 67 \cdot 61 \cdot 58 \cdot 59$

$19 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 8$ $21 \quad 20 \quad 19 \quad 18 \quad 17 \quad 16$ $15 \quad 14 \quad 13 \quad 11 \quad 10 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4$

$y^2(y-14) + 12(5y-6)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_7$

$\frac{z}{7^{80}} < 7^{z} - 1$

$\boxed{\log_7 z - 80} < z$

$\log_7 z < \log_7 \log_7 z$

$\cancel{z} < \log_7 z$

z

z z

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Если q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз, то это значит, что ~~решка выпадет~~ q – это еще и вероятность того, что решка выпадет хотя бы 42 раза;

Вероятность p можно записать через формулу – отношение благоприятных исходов ко всем возможным; кол-во всех возможных исходов очевидно 2^{70}; Для подсчёта благоприятных исходов следует выбрать позиции, на которых будут 43 орла ($C_{70}^{43} = \frac{70!}{43!\cdot 27!}$), а остальные места ~~расположено~~ заполняются произвольно (2^{27}); Значит,

$$p = \frac{C_{70}^{43}\cdot 2^{27}}{2^{70}} = \frac{C_{70}^{43}}{2^{43}};$$

Аналогично можно записать q;

$$q = \frac{C_{70}^{42}\cdot 2^{28}}{2^{70}} = \frac{C_{70}^{42}}{2^{42}};$$

Тогда $$p - q = \frac{C_{70}^{43} - 2C_{70}^{42}}{2^{43}} = \frac{\frac{70!}{43!\cdot 27!} - \frac{2\cdot 70!}{42!\cdot 28!}}{2^{43}} =$$

$$= \frac{28\cdot 70! - 43\cdot 2\cdot 70!}{2^{43}\cdot 43!\cdot 28!} = -\frac{58\cdot 70!}{2^{43}\cdot 43!\cdot 28!} = -\frac{58\cdot 70\cdot 69\cdot 68\cdot\ldots\cdot 44}{2^{43}\cdot 28!} =$$

$$= \frac{-58\cdot 70\cdot 69\cdot 68\cdot\ldots\cdot 57\cdot 2^7}{2^{43}\cdot 21!} = -\frac{29\cdot 70\cdot 69\cdot 68\cdot\ldots\cdot 57}{2^{35}\cdot 21!} =$$

$$= -\frac{29^2\cdot 67\cdot 61\cdot 59\cdot 23\cdot 31}{2^{35}\cdot 18};$$

Ответ: $p-q = -\frac{29^2\cdot 67\cdot 61\cdot 59\cdot 23\cdot 31}{2^{30}\cdot 9}$;

Задача 2;

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x-\sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x+\sin 3x} = \sqrt{2};$$

ОДЗ: $\cos 3x \neq \{\pm \sin 3x\}$;

$\Downarrow$

$\boxed{x \neq \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}p, \text{ где } p\in\mathbb{Z}}$

$$\cos 4x(\cos 3x+\sin 3x)+\sin 4x(\cos 3x-\sin 3x) = \sqrt{2}(\cos^2 3x-\sin^2 3x);$$

$$\cancel{\cos x} \quad \cos 7x+\sin 7x = \sqrt{2}\cos 6x;$$

По формуле вспомогательного угла:

$$\sqrt{2}(\cos(x-\varphi) = \sqrt{2}\cos 6x, \text{ где } \begin{cases}\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$;

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 6x;$$

$$x-\frac{\pi}{4} = \pm 6x+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z};$$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4} = 6x+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z};\\ x-\frac{\pi}{4} = -6x+2\pi l;\ l\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -5x = \frac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z};\\ 7x = \frac{\pi}{4}+2\pi l;\ l\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$$

$\Downarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

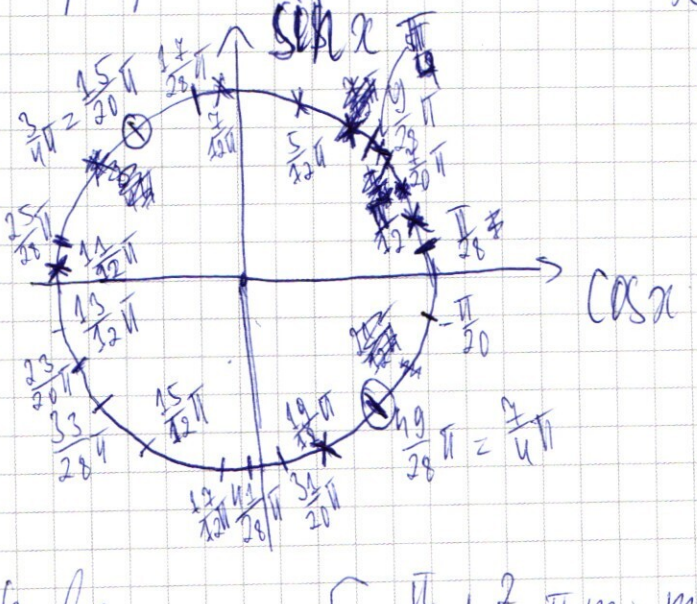
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} m;\ m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi l;\ l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m;\ m \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi l;\ l \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} p;\ где\ p \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

Отбор корней:



x – ОДЗ

① – точки не подходящие под ОДЗ;

Значит не подходят под ОДЗ корни вида

$x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi(5f + 2)$; где $f \in \mathbb{Z}$;

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi(7l + 6)$; где $l \in \mathbb{Z}$;

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m,\ m \in \mathbb{Z};\ кроме\ m = 5f + 2;\ где\ f \in \mathbb{Z}; \\ \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi l;\ l \in \mathbb{Z};\ кроме\ l = 7l + 6;\ где\ l \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$

Задача №3;

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7\cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \le 72;$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \le 72;$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60\cdot \left(x^{\log_x 2}\right)^{\sqrt{\frac{1}{\log_x 2}}} \le 72;$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60\cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} \le 72;$$

Заменим $2^{\sqrt{\log_2 x}} = y;\quad y \ge 1;$

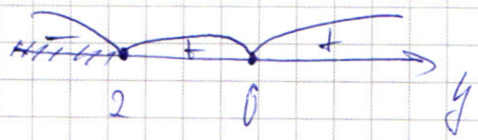
$$y^3 - 14y^2 + 60y - 72 \le 0;$$

$$\begin{array}{l|l} y^3-14y^2+60y-72 & y-2 \\ \cline{2-2} -\underline{y^3-2y^2} & y^2-12y+36 \\ \quad -12y^2+60y & \\ \quad -\underline{-12y^2+24y} & \\ \qquad 36y-72 & \\ \qquad -\underline{36y-72} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\boxed{y_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{1} = 6};$$

$(y-2)(y^2-12y+36) \le 0$

$(y-2)(y-6)^2 \le 0$



$y \in [1;2];$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = y \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\log_2 x} \ge 0\\ \sqrt{\log_2 x} \le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_2 x \ge 0\\ \log_2 x \le 1\end{cases} \Rightarrow x \in [1;2];$$

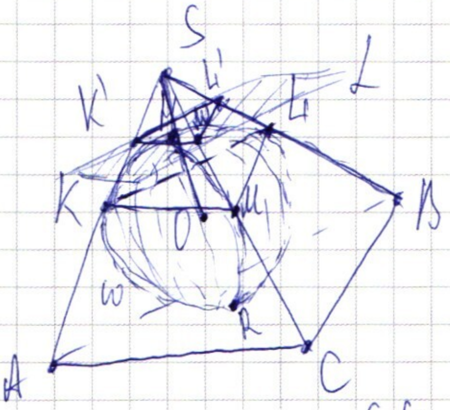
Однако; $\log_2 x > 0$; $\log_x 2 > 0$, $x \in (0;+\infty)\setminus\{1\}$; С учётом всех этих огра-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ничего не получаем, что $x \in [1;2]$;

Ответ: $x \in [1;2]$;

Задача 4;



Обозначим за O центр сферы ω;
Точка H — точка касания пл-ти L; сферы ω;

Т.к. H — ближайшая ~~к~~ KS точка окружности; ~~точки~~ то $SH \perp L$;
а отсюда SH и HO лежат на SO; $OH \perp L$;

Обозначим за K'; L'; M' соответственно точки пересечения пл-ти L и ребер ~~AB~~; AS; CS;

$S_{\triangle K'M'L'} = 2$; также ~~$HM' \perp SC$; $HL' \perp SA$;~~ известно, что $\angle KSO = \arccos\frac{\sqrt{7}}{4}$;

а) Из св-в вписанного шара $KS = SM = SL$;

Рассмотрим $\triangle SOM$:

$\triangle OMS$ ~~подобен~~ подобен $\triangle M'HS \Rightarrow \frac{HS}{MS} = \frac{HM'}{MO} = \frac{SM'}{OS}$;

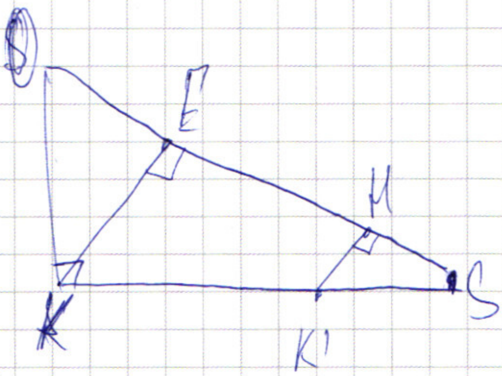
Аналогично:
$\frac{HS}{KS} = \frac{HK'}{KO} = \frac{SK'}{OS}$ и $\frac{HS}{ML} = \frac{HL'}{LO} = \frac{SL'}{OS}$;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{HS}{SK'} = \frac{HS}{SM'} = \frac{HS}{SL'} = \frac{KS}{OS}$; $\Rightarrow SK' = SM' = SL'$

Значит подобны треугольники $SK'M'L'$ и $SKML$;

Пусть $SH = x$; тогда



$K'S = \frac{4\sqrt{7}}{7}x$;

$HK' = \sqrt{\frac{16}{7}x^2 - x^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}x$;

$EK = \sqrt{OE \cdot ES}$; Пусть $OK = kHK'$; тогда $OS = kK'S$;

$OK = \frac{3\sqrt{7}}{7}xk$; $OS = \frac{4\sqrt{7}}{7}xk$; $\Rightarrow KS = xk$;

$KS = \sqrt{OS \cdot ES} = \sqrt{\frac{4\sqrt{7}}{7}xk \cdot ES} = xk$ (св-во высоты из прямого угла)

$xk = \frac{4\sqrt{7}}{7}ES \Rightarrow ES = \frac{\sqrt{7}}{4}xk$; $\Rightarrow EK = \sqrt{x^2k^2 - \frac{7}{16}x^2k^2} =$

$= \sqrt{\frac{9}{16}x^2k^2} = \frac{3}{4}xk$;

$\frac{EK}{HK'} = \frac{KS}{K'S} = \frac{\sqrt{7}k}{4}$; $\Rightarrow \boxed{\frac{KS}{K'S} = \frac{7}{4}}$;

$OH = OK$ т.к. радиусы $\Rightarrow kHK' = kK'S - HS$

$\frac{3\sqrt{7}}{7}kx = \frac{4\sqrt{7}}{7}kx - HS$

$HS = \frac{\sqrt{7}kx}{7} = x \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{7}k = 1 \Rightarrow k = \sqrt{7}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Отношение $\frac{S_{KML}}{S_{K'M'L'}} = \left(\frac{KS}{K'S}\right)^2$ по св-вам подобия;

$\boxed{S_{KML} = \frac{49}{16}\cdot 2 = \frac{49}{8}}$;

б) т.к. $KLM \parallel ABC$; то $ABC \parallel K'M'L'$ => тетраэдр $SK'M'L'$ подобен $SABC$;

т.к. $OS = 9$; то $KS = \frac{9}{4}\sqrt{7}$; $OK = \sqrt{81 - \frac{81\cdot 7}{16}} = \frac{27}{4}$;

$\frac{HS}{KS} = \frac{1}{R} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ => $HS = \frac{9}{4}$; $OH = OK = OM = OR = OL = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$;

SH; OH; OK лежат на прямой RS;

Коэффициент подобия ~~тетраэдров~~ тетраэдров $SK'M'L'$ и $SABC$ равен $\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4} + 2\cdot\frac{27}{4}} =$

$= \frac{9}{9+54} = \frac{9}{63} = \frac{1}{7}$ => $\frac{V_{K'M'L'S}}{V_{ABCS}} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$;

$V_{ABCS} = 343\cdot V_{K'M'L'S} = 343\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot 2 = \frac{7^3\cdot 3^2\cdot 2}{3\cdot 2^2} = \frac{1029}{2}$;

$=$ ~~5014,5~~ $514{,}5$; Ответ: б) $V_{ABCS} = 514{,}5$; а) $S_{KML} = \frac{49}{8}$;

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача 5;

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 & (1) \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1) и (2) по отдельности; $(a \geq 0)$

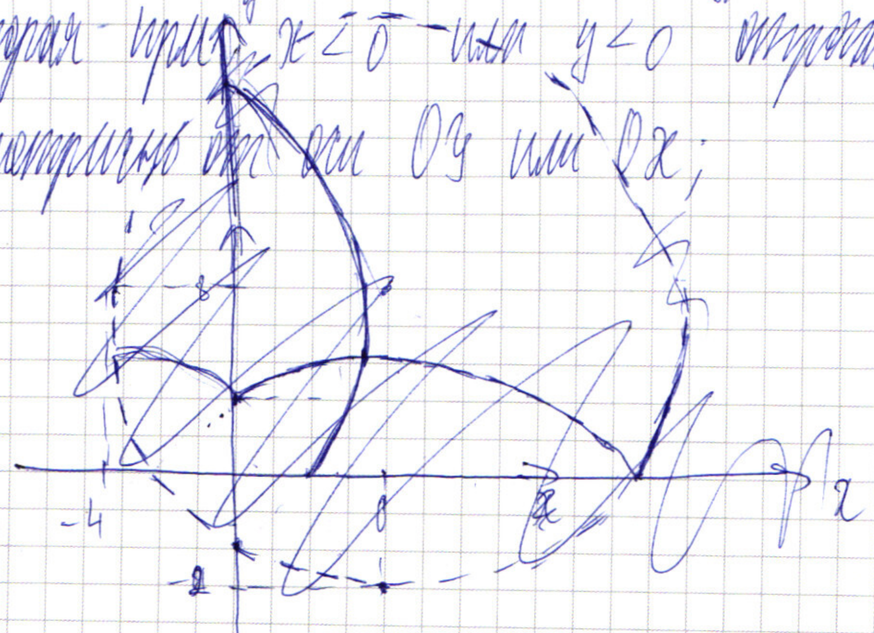
При $y \geq \sqrt{a}$

$y - \sqrt{a} + \sqrt{a} - 4 = x \Rightarrow y = x + 4$;

При $y < \sqrt{a}$

$-y + \sqrt{a} + \sqrt{a} - 4 = x \Rightarrow y = -x + 2\sqrt{a} - 4$;

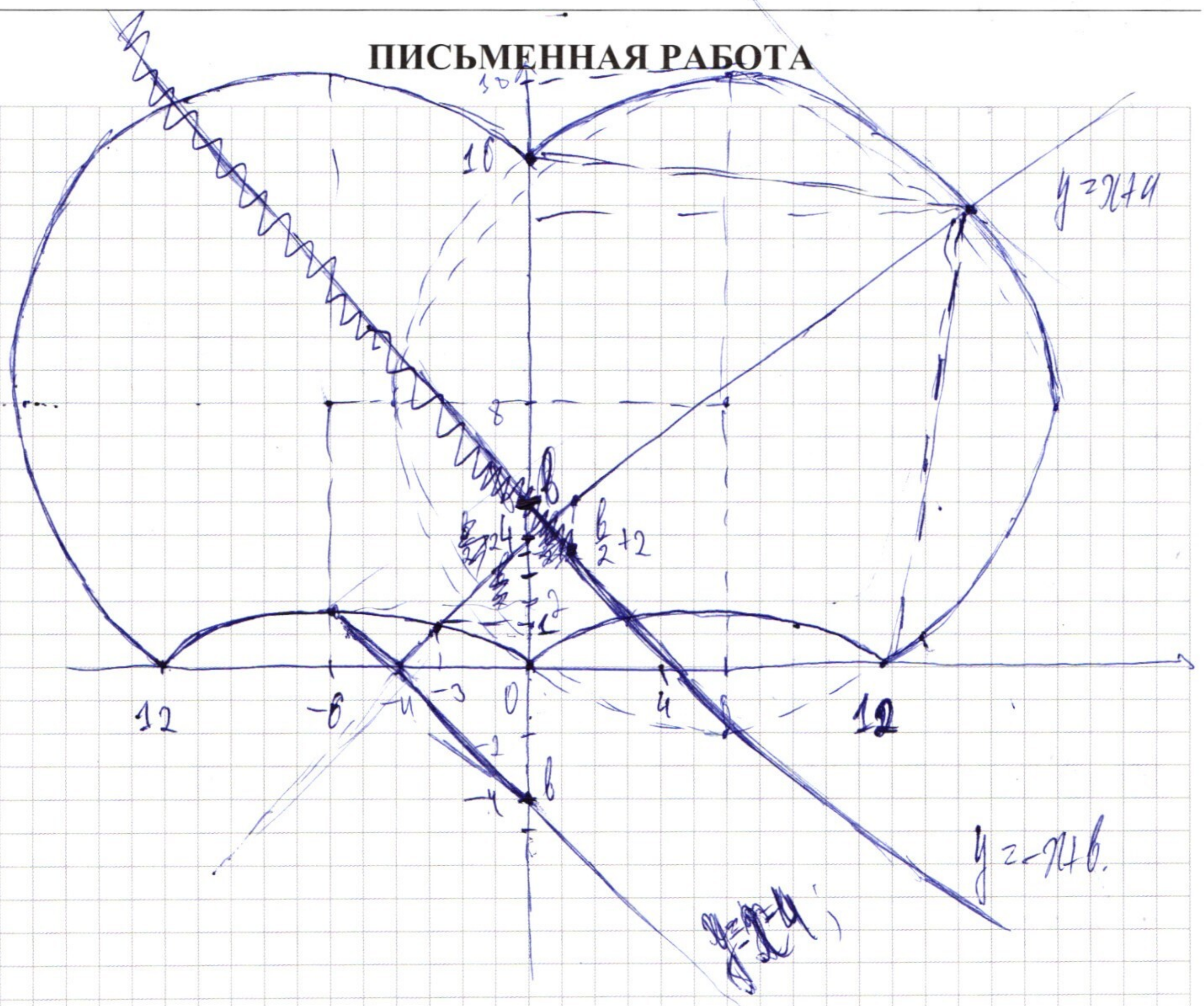
$(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100$ — уравнение окружности; которая при $x < 0$ или $y < 0$ отражается соответственно симметрично от оси Oy или Ox;



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Т.к $\sqrt{a} \geq 0$; то при $y \leq 0$, получим $y = -x + 2\sqrt{a} - 4$;

Заменим $2\sqrt{a} - 4 = b$; получим $y = -x + b$

$\sqrt{a} = \frac{b+4}{2} = \frac{b}{2} + 2$; При $y \geq \sqrt{a} = \frac{b}{2} + 2$;

$\sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{b}{2} \geq -2 \Rightarrow \boxed{b \geq -4}$;

Соответственно до $\overset{y \leq b}{\frac{b}{2}+2}$ у нас $y = -x + b$; а затем при $y \geq \frac{b}{2}+2$; $y = x + 4$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Подставим во (2) $y=x+4$;

$(|x|-6)^2+(|x+4|-8)^2=100$;

не более двух решений;

аналогично с $y=-x+b$;

Получается, что одна прямая пересекает ~~окр~~ (2) в 2 точках и другая в 1 точке;

$\left[(|x|-6)^2+(|x+4|-8)^2=100; \right.$ При $x>0$; $y>0$;

$(x-6)^2+(x-4)^2=100$;

$x^2-12x+36+x^2-8x+16=100$

$2x^2-20x-48=0$

$x^2-10x-24=0$;

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{1}=5\pm7 \left[\begin{array}{l} -2 \\ 12; \end{array} \right. \Rightarrow 12=x$

$y=16$

При $x<0$; $y>0$; получаем)

$(x+6)^2+(x-4)^2=100 \Rightarrow x^2+12x+36+x^2-8x+16=100$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Если $7^z \leq 1$; то условие выполняется, $z \leq 0$~~

Если $z > 0$ то прологарифмируем по основанию 7;

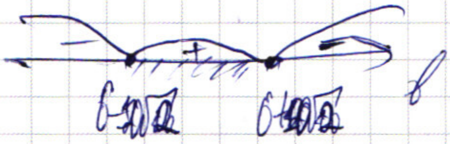
$\log_7(7^z - 1) \leq \log_7\left(\frac{z}{7^{80}}\right)$;

$\log_7(7^z - 1) \leq \log_7 z - 80$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$-b^2+28b+4\geq 0$;

$b_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{196+4}}{-1}=\frac{-6\pm\sqrt{200}}{-1}=6\pm 10\sqrt{2}$;



$b\in[6-10\sqrt{2}; 6+10\sqrt{2}]$;

$b\in[-4; 6+10\sqrt{2}]$;

При $x<0$;

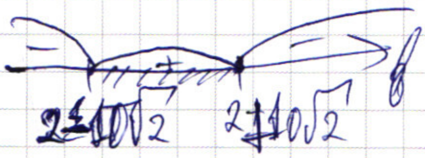
$2x^2+(28-2b)x-16b+b^2=0$;

~~$x^2+12x+7$~~

$x_{1,2}=\frac{b-14\pm\sqrt{b^2+196-28b+32b-2b^2}}{2}$;

$-b^2+4b+196\geq 0$;

$b_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+196}}{-1}=2\pm 10\sqrt{2}$;



$b\in[2-10\sqrt{2}; 2+10\sqrt{2}]$;

$b\in[-4; 2+10\sqrt{2}]$;

Соответственно при $b\in[-4; 6+10\sqrt{2}]$ у $y=x-b$ со (2) 2 решения; т.е. $\sqrt{a}\in[0; 5+5\sqrt{2}]$; т.е. нам подходит от $a\in[0; (5+5\sqrt{2})^2]$; Ответ: $a\in[0; (5+5\sqrt{2})^2]$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2+4x-48=0;$

$x^2+2x-24=0;$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{1}=\frac{-1\pm5}{1}=\left[\begin{array}{l}-3 \Rightarrow x=-3;\ y=1;\\ 2;\end{array}\right.$

Т.е. при $\sqrt{a}\le 1$; $y=x+4$ пересекает (2) 2 раза; при $\sqrt{a}\in[1;16]$; $y=x+4$ пересекает (2) 1 раз; при $\sqrt{a}>16$; $y=x+4$ (2) не пересекает; т.е. $b<34$; $\sqrt{a}<16$;

Подставим $y=-x+b$ во (2); $y\ge0$; $x\ge0$;

$(|x|-6)^2+(|-x+b|-8)^2=100;$

$(x-6)^2+(-x+b-8)^2=100;$

$x^2-12x+36+(x+8-b)^2=100;$

$x^2-12x+36+x^2+16x+64-2xb-16b+b^2=100;$

$2x^2+(4-2b)x-16b+b^2=0;$

$x^2+(2-b)x-8b+\frac{b^2}{2}=0;$

$x_{1,2}=\frac{b-2\pm\sqrt{b^2-4b+4+32b-2b^2}}{2}=\frac{b-2\pm\sqrt{28b-b^2+4}}{2};$

Задача 7;

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}; \\ y \leq \log_7 x \end{cases}$$

т.е. нам необходимо просуммировать кол-во всех решений с определённым x по всем возможным и удовлетворяющим условию.

$80 + x - 7^{80} \leq \log_7 x$ иксам;

$$x - 7^{80} \leq \log_7 x - 80;$$

$$7^{\log_7 x} - 7^{80} \leq \log_7 x - 80;$$

$$7^{\log_7 x - 80} - 1 \leq \frac{\log_7 x - 80}{7^{80}};$$

Пусть $\log_7 x - 80 = z$.

$$7^z - 1 \leq \frac{z}{7^{80}}$$

$$7^z \leq \frac{z + 7^{80}}{7^{80}}$$

Понятно, что $z = 0$ является решением однако если $z = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{Q} > 0$

$\sqrt[n]{7} - 1 \leq \frac{1}{n \cdot 7^{80}}$; т.е. при $n \to +\infty$ быстрее растёт $\sqrt[n]{7} - 1$ поэтому $z > 0$ не подходит под условие;

$\vee$

1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)