

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра|
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Обозначим $f(k)$ для каждого k целого k от 0 до 70 вероятность выпадения в 70 опытах ровно k орлов. Тогда вероятность выпадения k решек также равна $f(k)$. Тогда

$$p = f(43) + f(44) + f(45) + \dots + f(70)$$

Условие "орёл выпадет 28 раз или меньше" эквивалентно условию "решка выпадет 42 раза или больше":

$$q = f(42) + f(43) + f(44) + \dots + f(70)$$

$$p - q = -f(42)$$

$f(42)$ - вероятность выпадения 42 орлов (или, что эквивалентно, 28 решек).
Всего вариантов исхода 2^{70} , 28 решек выпадает в C_{70}^{28}

$$p - q = -f(42) = -\frac{C_{70}^{28}}{2^{70}} = -\frac{70!}{28!42! \cdot 2^{70}}$$

Ответ: $-\frac{70!}{28!42! \cdot 2^{70}}$.

2) Преобразуем выражение в левой части:

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \frac{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x}{(\cos 3x - \sin 3x)(\cos 3x + \sin 3x)} =$$

$$= \frac{(\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x) + (\cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x = \cos 6x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x = \cos 6x$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) - \cos 6x = 0$$

Применим тождество $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$:

$$\frac{1}{2} \sin(\frac{13x - \pi}{8}) \sin(-\frac{x}{8} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin\left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\text{или } \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{13x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi n, \text{ или, что эквивалентно,}$$

$$x = \frac{2}{13} \left(\frac{\pi}{8} + \pi k \right)$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Осталось найти среди этих точек лишние. ОДЗ исходного уравнения:

$$\begin{cases} \cos 3x - \sin 3x \neq 0 \\ \cos 3x + \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\cos 3x - \sin 3x)(\cos 3x + \sin 3x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos 6x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}, m \in \mathbb{Z}.$$

В отрезке от 0 до 2π указывается еще число периодов для всех ~~очереди~~ точек. Поэтому рассмотрим этот отрезок. На нем

$$x \neq \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{7\pi}{3}, \frac{23\pi}{12}$$

Первая очередь: ~~$x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}$ имеет вид~~

Первая очередь имеет вид $x = \frac{\pi + 2\pi k}{13}$. Во мн-ве x , для которых выражение не определено, не содержит элементов вида $\frac{5\pi}{13}$ при α взаимно простым с 13.

$$x = \frac{\pi + 2\pi k}{13} = \pi \cdot \frac{1+2k}{13}$$

Или при парном k $8k+1$ не делится на 4. $8k+1 \div 13$ при $k=8, 19, \dots$ (при всех k меньших $k < 8$ или ≥ 19 $\pi \cdot \frac{1+8k}{13+4}$ не лежит в $[0; 2\pi]$)

$$\text{При } k=8 \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Вторая очередь $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ не удали. ОДЗ.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} \right\} \setminus \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \right\}, \text{ где } k, m \in \mathbb{Z}.$$

~~3. $\log_2 x \geq 0$ Показатель сначала, что~~

$$\text{ОДЗ: } \log_2 x \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. О.Д.З:
$$\begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Покажем, что на ОДЗ $2^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\sqrt{\log_2 x}}$. $x \geq 0$, поэтому здесь определены возведение в действительную степень. ~~В~~ Возведём обе части в степень $\sqrt{\log_2 x}$ ($\log_2 x \geq 0$): $2^{\log_2 x} = x^{\sqrt{\log_2 x} \sqrt{\log_2 x}} =$

$$x = x^1 = x, \text{ утверждение доказано.}$$

Используя это утверждение, перепишем нер-во в виде

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 72 \leq 0$$

Введём замену $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$:

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

$$(t-2)(t^2 - 12t + 36) \leq 0$$

$$(t-2)(t-6)^2 \leq 0$$

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 2 \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_2 x} \leq 1 \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \log_2 x = \log_2 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x = 6^{\log_2 6} \end{cases}$$

(все эти преобразования равносильны на ОДЗ)

Ответ: $[1; 2], 6^{\log_2 6}$.

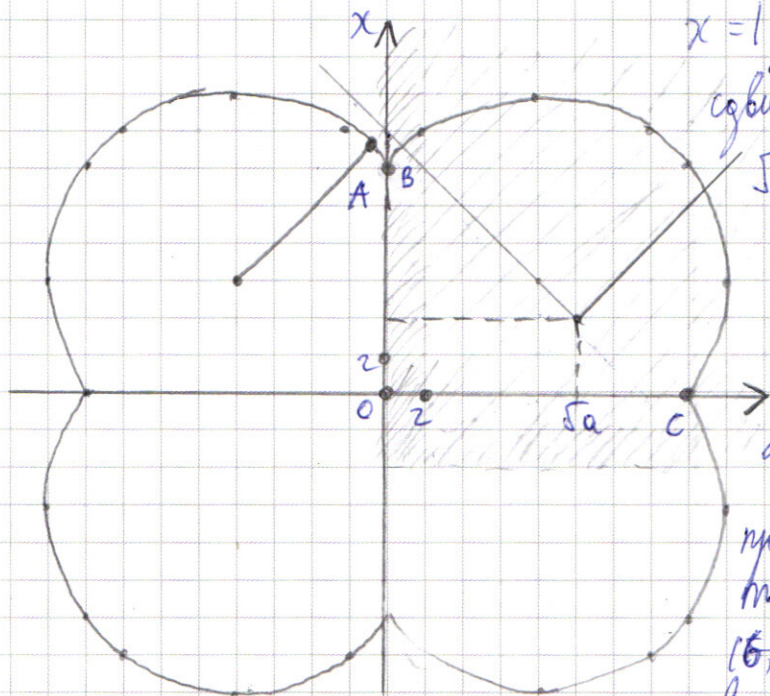
5.1. Построим в координатах $x(t)$ график ~~первого~~ второго др-я.

в I^u четверти это $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

во II^u $(x+6)^2 + (y+8)^2 = 100$

в III^u $(8x+6)^2 + (y-8)^2 = 100$

в IV^u $(x+6)^2 + (y+8)^2 = 100$.



$x = |y - 5a| + 5a - 4$ - это $\neq x = |y|$,
сдвинутый на $5a \geq 0$ вправо и на
 $5a - 4 \geq -4$ вверх.

Область, в которой может нахо-
диться вершина этого графика,
уже заштрихована.

Если график сместить на $(8, 0)$, он
пройдет через точку $A(0, 6)$. Найдем
также Δx , что график сместим на
 $(6, \Delta x)$ и касаться первого графика
во II-й четверти.

$$\begin{cases} x = |y - 5| + \Delta x \\ (x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 100 \\ x^2 + 12x + y^2 - 16y = 0 \\ x = |y - 5| + \Delta x \\ x^2 + 12x + y^2 - 16y = 0 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

2. В точке A касательная к графику имеет наклон
-45°. Найдем её координаты:

$$\begin{cases} (x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 100 \\ x = y + 5 \\ (y + 1)^2 + (y - 8)^2 = 100 \\ 2y^2 + 10y + 169 + 64 - 100 = 0 \\ 2y^2 + 10y + 133 = 0 \end{cases}$$

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$$

$$x = y + 14$$

$$(y + 1)^2 + (y + 8)^2 = 100$$

$$2y^2 + 18y - 35 = 0, y < 0$$

$$y = \frac{-18 - \sqrt{324 + 280}}{4} =$$

$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100 \\ x = y + 14 \end{cases}$$

$$2(y + 8)^2 = 100$$

$$y + 8 = \pm \sqrt{50}$$

$$y = -8 \pm \sqrt{50}, y_A = \sqrt{50} - 8$$

$$x_A = \sqrt{50} + 6$$

3. Прямая, проходящая

через $(\sqrt{50} - 8, \sqrt{50} + 6)$ под углом -45° к Oy,

пересекает Oy в точке $2\sqrt{50} - 2$.

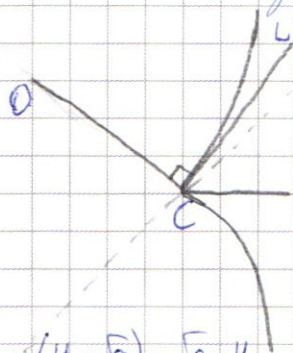
Прямая, проходящая таким образом через $B(0, 4)$
пересекает Oy в точке 12. Таким образом,

если продолжение левой ветви графика пересекает Oy на промежутке
[12; $2\sqrt{50} - 2$), то ~~он~~ ^{второй} график эта ветвь пересекает в двух точках.

При этом правая ветвь в любом случае пересечет ~~второй~~ ^{второй} график в одной
точке; ведь в точке C в силу симметрии угол наклона равен углу
наклона в точке B, а, в свою очередь, было показано, что прямая,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

касается под углом 45° через точку B , пересекает ее же в двух точках, и т.д.
Покажем, что правая ветвь пересекает график в любой точке в одной
точке. Для этого найдем $\tan$ угла наклона касательной в точке $C(16; 0)$.



Из рисунка видно, что $\tan \angle C(4) = \frac{4}{3} > \tan 45^\circ$, и правая
ветвь графика (прямая на рисунке) всегда пересекает
второй график в одной точке.

4. Итак, все наложенные ограничения на a таковы:

$x = -(y - 5a) + 5a - 4$ пересекает Oy на промежутке $[12; 2550 - 2]$, $5a + 0$ ~~и т.д.~~

из ~~этих~~ условий следует, что a также удовлетворяет одновременно

$5a = 0$ и $5a - 4 = 12$ (тогда вершина первого графика лежит в точке B и система
имеет 4 решения. Впрочем, $\begin{cases} 5a = 0 \\ 5a - 4 = 12 \end{cases}$ не выполняются никогда.

$$x = -y + 5a + 5a - 4 = -y + 25a - 4$$

$$x = 0, y = 25a - 4$$

$$12 \leq 25a - 4 \leq 2550 - 2$$

$$6 \leq 5a - 2 \leq 550 - 1$$

$$8 \leq 5a \leq 550 + 1$$

$$64 \leq a \leq 51 + 2550. \text{ Как видно из чертежа графика, никакие четверти графика,}$$

Ответ: $[64; 51 + 2550]$.

7. Из 003 $x \geq 1$. Покажем $x \leq 7^{80}$, рассмотрим что при $x \geq 7^{80}$ и $x < 7^{81}$

$$\begin{cases} y \geq 81 \\ y \leq 80 \end{cases} \text{ не имеет решений, а при } x \geq 7^{81} \begin{cases} y \geq 80 + 7^{80} \cdot (7^{k-80} - 1) \\ y \leq k \end{cases} \text{ не имеет решений}$$

(здесь $x = 7^k, k \geq 81$).

Если $7^n \leq x < 7^{n+1}$, то y ограничен сверху числом n , а снизу $-80 + x - 7^{80}$, т.е.

Каждому x соответствует $n - 80 - x + 7^{80} + 1$ значений y . Итоговое кол-во пар

$$S = \sum_{n=0}^{n=79} \sum_{x=7^n}^{x=7^{n+1}-1} (n - 79 + x + 7^{80})$$

Каждое n здесь встречается $7^{n+1} - 7^n$ раз, и их сумма S_n

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=79} k(7^{k+1} - 7^k)$$

$$7^{80} - 79 \text{ встречается } 7^{80} - 1 \text{ раз: } S_7 = \cancel{7^{80}} (7^{80} - 79)(7^{80} - 1)$$

* сумма всех x от 1 до $7^{80} - 1$ равна $\frac{7^{80} \cdot (7^{80} - 1)}{2}$

$$S = S_n + S_7 - S_x = \sum_{k=0}^{k=79} k(7^{k+1} - 7^k) + 7^{80}(7^{80} - 79) + \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2}$$

~~$\sum_{k=0}^{k=79} k(7^{k+1} - 7^k)$ содержит каждое 7^l два раза: $(l-1) \cdot 7^l$ и $(l+1) \cdot 7^l$, их сумма 7^l . Это при l от 1 до 79, а также содержится 7^0 и $79 \cdot 7^{80}$~~

$$S_n = 79 \cdot 7^{80} - 1 \cdot \cancel{7^{80}} + (1 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{79}) - 1 =$$

$$= 79 \cdot 7^{80} - 2 + \frac{7^{79} - 1}{6}$$

$$S = 79 \cdot 7^{80} - 2 + \frac{7^{79} - 1}{6} + 7^{80}(7^{80} - 79) - \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2} =$$

$$= -2 + \frac{7^{79} - 1}{6} + 7^{160} - 7^{80}(7^{80} - 1)$$

S_n содержит каждое 7^l при $1 \leq l \leq 79$ два раза: $(l-1) \cdot 7^l$ и $-(l) \cdot 7^l$. Их сумма равна -7^l . Также сумма содержит $79 \cdot 7^{80}$.

$$S_n = 79 \cdot 7^{80} - (1 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{79}) + 1 = 79 \cdot 7^{80} + 1 - \frac{7^{79} - 1}{6}$$

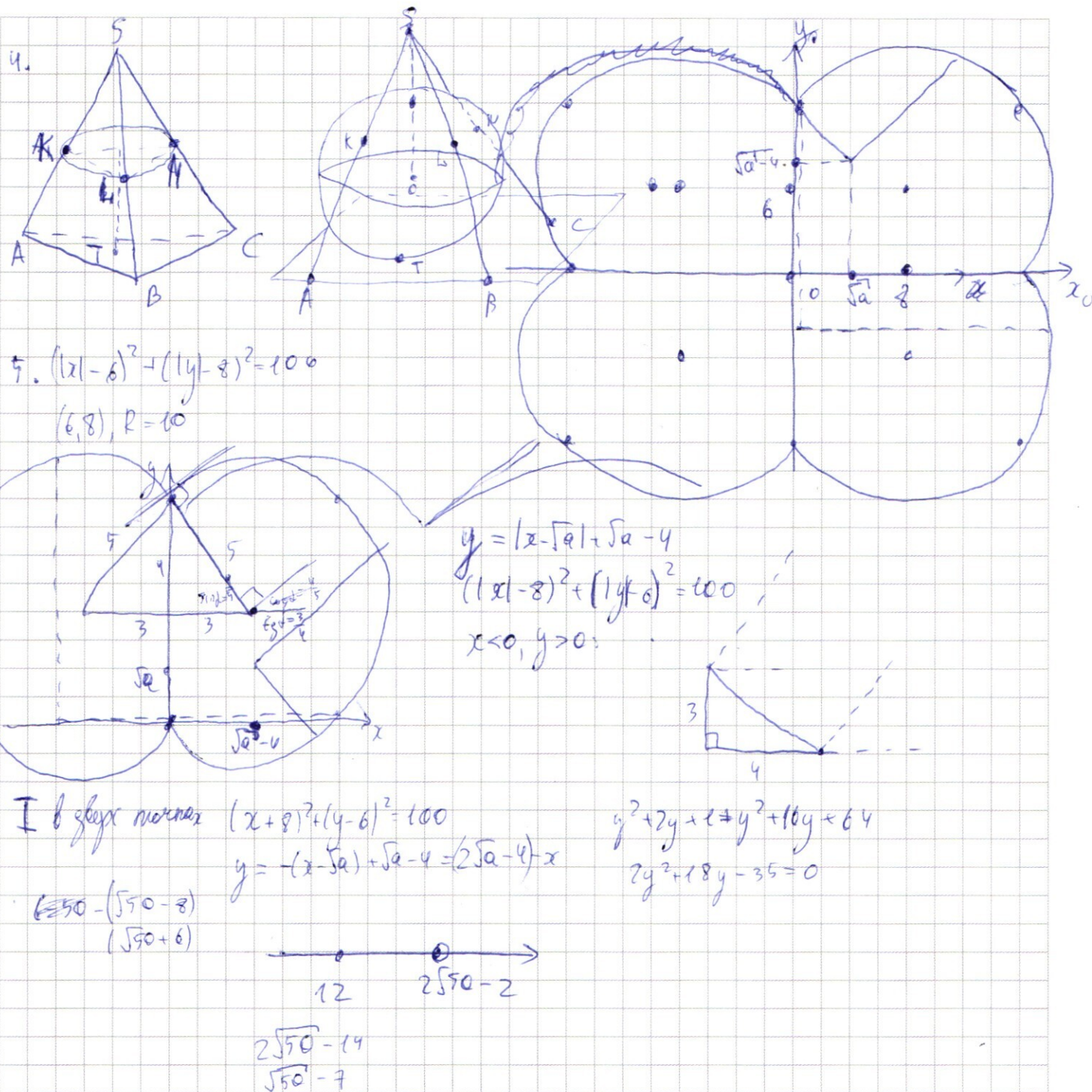
$$S = S_n + S_7 - S_x = 79 \cdot 7^{80} + 1 - \frac{7^{79} - 1}{6} + 7^{160} - 79 \cdot 7^{80} - 7^{80} + 79 - \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2} =$$

$$= 7^{160} - \frac{7^{79} - 1}{6} + 80 - 7^{80} - \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2} = 7^{80}(7^{80} - 1) - \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2} + 80 - \frac{7^{79} - 1}{6} =$$

$$= \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2} + 80 - \frac{7^{79} - 1}{6}$$

$$\text{Ответ: } \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2} + 80 - \frac{7^{79} - 1}{6}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y \geq 80 + x - 7^{80}$$

$$y \leq \log_7 x$$

$$\begin{cases} 7^y \leq x \\ y \geq 80 + x - 7^{80} \end{cases}$$

$$y \geq 80 + x - 7^{80}$$

$$x = 1$$

$$y \leq 0, y \geq 81 - 7^{80} - 7^{80} - 80$$

~~х~~

для x от 1 до 6

$$7^{80} - 80 + 7^{80} - 79 + \dots + 7^{80} - 75$$

для x от 7 до 49

Еще x лежит от 7^n до 7^{n+1} , но ему соответствует

$$|n - 80 + 7^n - 7^{80}| [80 + x - 7^{80}; n] \text{ значений,}$$

$$n - 80 - 7^{80}$$

$$n = 79 - 0$$

$$\text{ответ } \sum_{n=79}^{7^{80}-1} \sum_{x=7^n}^{7^{n+1}-1} n - 80 - x + 7^{80}$$

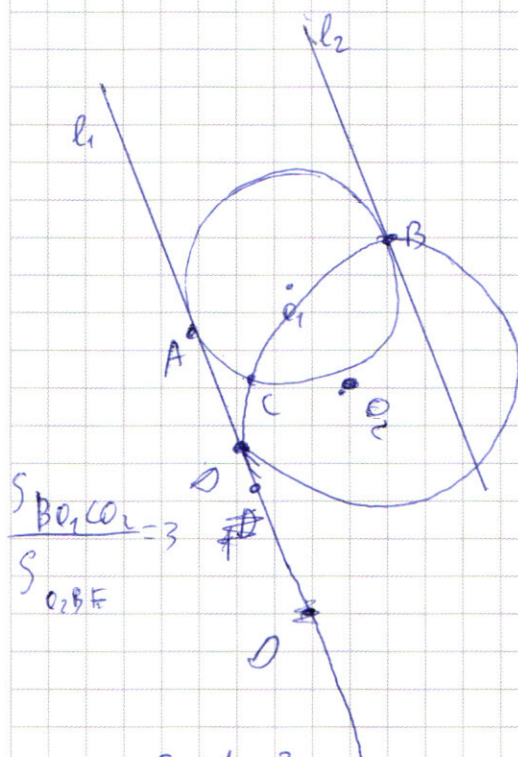
$$\text{сумма } n: 7 \text{ раз } 0, 48 - 7 \text{ раз}$$

$$\text{сумма } n: 7^1 \text{ раз } 0$$

$$0 \cdot (7^1 - 7^0) + 1 \cdot (7^2 - 7^1) + 2 \cdot (7^3 - 7^2) + \dots + k \cdot (7^{k+1} - 7^k) +$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{7^{80}-1} k(7^{k+1} - 7^k)$$

$$+ (7^{80} - 80) \cdot 7^{80} - \frac{7^{80}(7^{80} - 1)}{2}$$



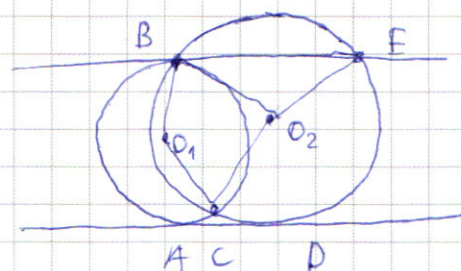
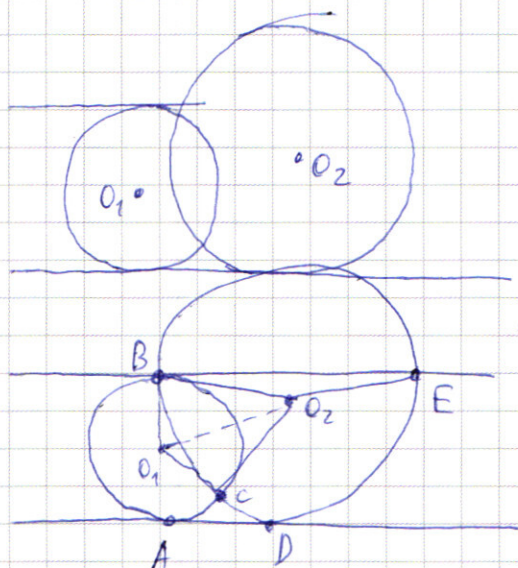
$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = 3$$

$$7^{160} \frac{7^2 - 7^1 + 7^3 - 7^2}{7^2 - 7^1 + 2 \cdot 7^3 - 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^4 - 3 \cdot 7^3}$$

$$7 \cdot \frac{7^{78} - 1}{6} \theta_1$$

$$7^{80} (7^9 + 7^{80} - 7^9)$$

$$7^2 - 7^1 + 2 \cdot 7^3 - 2 \cdot 7^2$$



$$S_{O_2BE} = \frac{BE}{2} \sqrt{R^2 - \frac{BE^2}{4}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 &43-27 \quad 27-43 \\
 &44-26 \quad -26-44 \\
 &70-0 \quad 0-70 \\
 &-\frac{C_{28}^{70}}{2^{70}} = -\frac{70!}{28!42!2^{70}} = -\pi. \\
 &\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\
 &\cos \alpha - \cos \beta = -\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\
 &2 \cos \alpha \cos \beta = (\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)) \\
 &\quad \cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta \\
 &\quad -\sin \alpha \sin \beta = -\sin \alpha \sin \beta \\
 &2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \\
 &\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} = \frac{\cos 4x}{\cos 3x - \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)} = \frac{2 \cos 4x}{\sin \frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)} = \frac{2 \cos 4x}{\sin \frac{\pi}{4}} \\
 &\frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)} = \frac{2 \sin 4x}{\cos \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - 3x)} = \frac{2 \sin 4x}{\cos \frac{\pi}{4}} \\
 &\frac{2 \cos 4x}{\sin(\frac{\pi}{4} - 3x)} + \frac{2 \sin 4x}{\cos(\frac{\pi}{4} - 3x)} = \sqrt{2} \\
 &2 \cos 4x \cos(\frac{\pi}{4} - 3x) + 2 \sin 4x \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) \cos(\frac{\pi}{4} - 3x) \\
 &2 \cdot \cos(4x - \frac{\pi}{4} + 3x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 6x)}{2} \quad 4 \cos(7x - \frac{\pi}{4}) \in [-0,25; 0,25] \\
 &4 \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 6x) = \cos 6x \quad 4 \cos(7x - \frac{\pi}{4}) - \cos 6x = 0 \\
 &4(\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \cos 6x \quad 2 \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \\
 &2\sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x) = \cos 6x \\
 &\frac{2\sqrt{2}}{\cos(7x + \frac{\pi}{4})} \\
 &2\sqrt{2}(\cos(4x + 3x) + \sin(4x + 3x)) = \cos^2 3x - \sin^2 3x \\
 &2\sqrt{2}(\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x \\
 &2\sqrt{2}(\frac{\cos 4x}{\sin 3x} - \frac{\sin 4x}{\cos 3x} + \frac{\sin 4x}{\sin 3x} \cos 4x(\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x(\cos 3x - \sin 3x))
 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \frac{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x}{\cos 6x} =$$

$$= \frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x = \cos 6x$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 6x = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin \left(\frac{7x + 6x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{6x - 7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \quad \sin \left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{1}{13} \cdot \frac{\pi}{4}, \frac{8\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}, \frac{33\pi}{4}$$

$$6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$\cos 6x \neq 0$$

$$\sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{13x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$6x = \frac{3\pi}{26} + \frac{12\pi k}{13} \quad 6x = \frac{3\pi}{2} + 12\pi n$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{26} + \frac{12\pi k}{13} \right)$$

$$8k+1 = \frac{13}{26}$$

$$k=8 \quad \frac{13}{26} \quad \frac{152}{19}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}$$

$$\frac{17\pi}{2}, \frac{19\pi}{2}, \frac{21\pi}{2}, \frac{23\pi}{2}, \frac{25\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}, \frac{29\pi}{4}, \frac{33\pi}{4}, \frac{37\pi}{4}$$

$$k=19 \quad 153$$

$$8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2 + \sqrt{4 \log_2 x} + 60x \sqrt{\log_2 x} \leq 72$$

$$a^{(t)} = b$$

$$t = \sqrt{\log_2 b}$$

$$2 \sqrt{\log_2 x} - 14 \cdot 2 + 60 \cdot x \sqrt{\log_2 x} - 72 \leq 0$$

$$2 \sqrt{\log_2 x} - 14 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \sqrt{\log_2 x} - 72 \leq 0$$

$$2 \sqrt{\log_2 x} = t$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$(t-8) |$$