

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите $p - q$
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 18$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 4, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 18$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 5$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$51. \quad p = (C_{80}^{51} + C_{80}^{52} + \dots + C_{80}^{80}) / 2^{80}$$

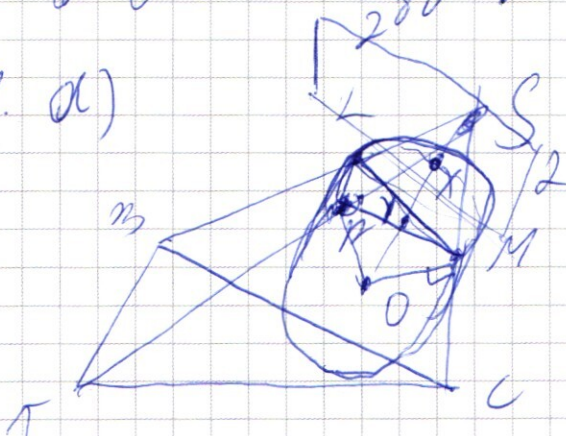
Если при выводе не было 29 раз,
то функция выведет не менее 5 раз.

$$q = (C_{80}^{51} + C_{80}^{52} + \dots + C_{80}^{80}) / 2^{80}$$

$$p - q = -C_{80}^{51} / 2^{80} \quad (\text{т.к. всего } 2^{80} \text{ вариантов})$$

Ответ: $-\frac{C_{80}^{51}}{2^{80}}$

54. а)



Также, что раз. ~~с~~ сфера O касается

SA, SB и SC, то $OK \perp KS$, и $OK : KS : SD = 1 : \sqrt{5} : 4$ (так как $\angle KSD = \angle KSO = \arccos \frac{1}{4}$).

Точка пересечения SD и сферы O (X)
будет ближайшей к SD и $\perp$ SD, так
сфера O прохв. через точку X $\perp$ SD. Но т.к.
 $SK = SL = SM$ (как отрезки касат.), то $KLM \perp SD$,

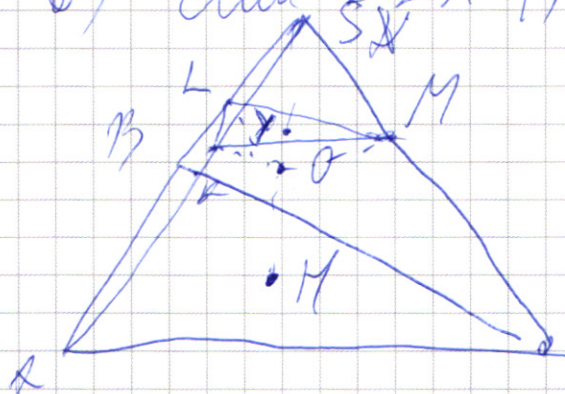
$\Rightarrow KLM \parallel L$. Итого $OK = OL = OM = r$.

Обозначим точку пересечения SO и KLM за Y . т.к $OK \perp KLM$, $\frac{OY}{OK} = \frac{1}{4}$, $OY = \frac{r}{4}$.

$$SO = 4r, SY = SO - OY = 3\frac{3}{4}r. SX = SO - OX = SO - r = 3r. \frac{S_{KLM}}{S_{KLM}} = \left(\frac{SX}{SY}\right)^2 \quad \left(\begin{array}{l} SX \perp SY \\ \text{высоты} \end{array} \right) \perp \text{ и } KLM$$

$$S_{KLM} = 4 \cdot \left(\frac{SX}{SY}\right)^2 = \frac{25}{4}r^2 = 6,25.$$

Д) Если $KLM \parallel ABC$ и $SO = 18$:



то $SA = SB = SC$ ($KL \parallel AB$, $LM \parallel AC$, $KM \parallel BC$)
 $\Rightarrow$ высота из S прямо падает на центр описанной окружности ABC и совпадает и делит на удвоенной SO . тогда $L \parallel ABC$, и т.д. $SO = 18$, $r = 9,5$. $\frac{SO}{r} = 4,5$.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{SH}{SY} \quad (\text{т.к. } H - \text{основание высоты из } S)$$

$$SH = SO + OH = SO + r = 5r = 22,5.$$

$$S_{ABC} / S_{KLM} = SY = 3\frac{3}{4}r = 16,875.$$

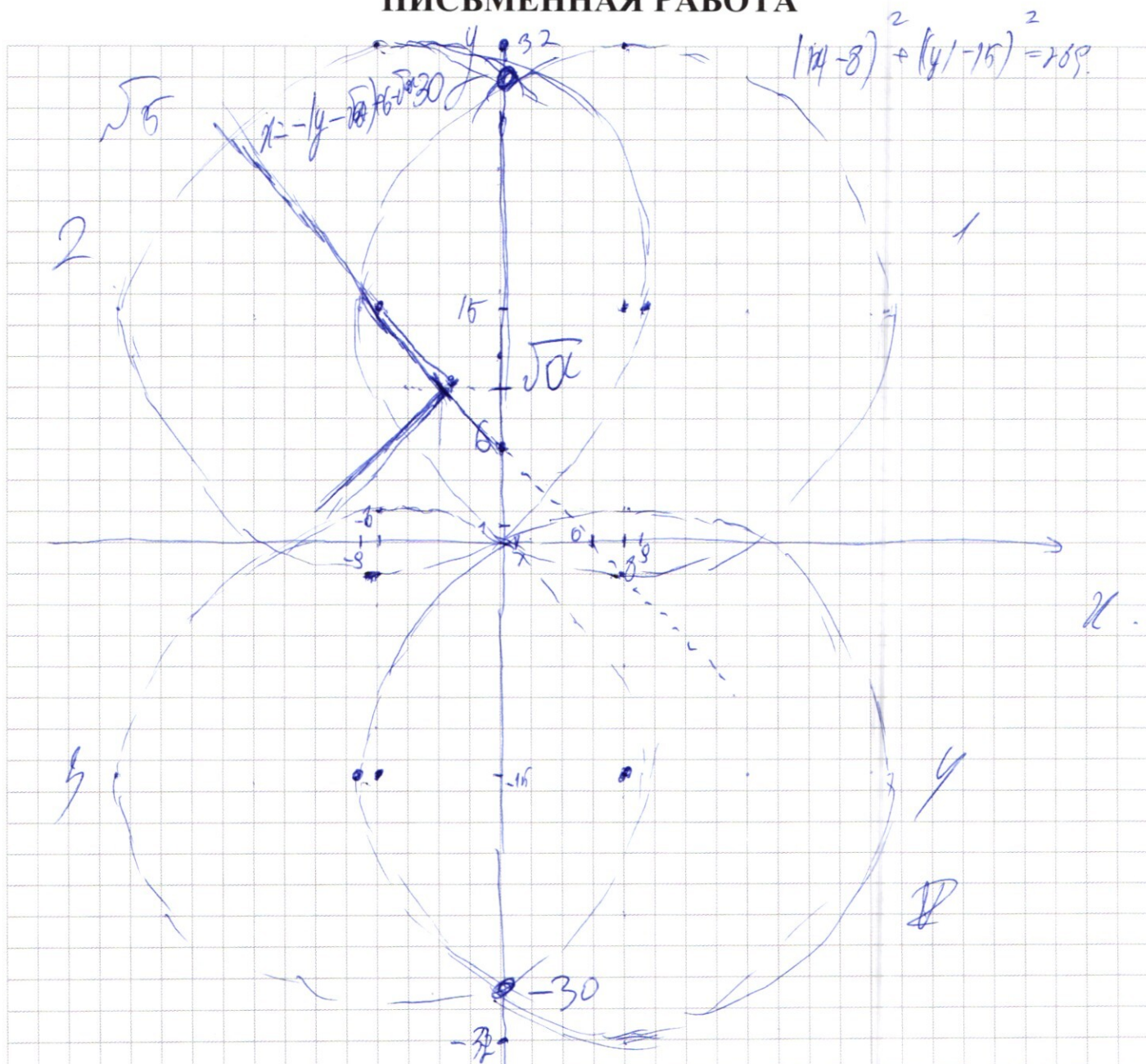
$$\frac{SH}{SY} = \frac{1}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{KLM} = \frac{25}{3}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = 2,5 \cdot 25 = 62,5$$

Ответ: 62,5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Если у нас "попытки" нахождения
определенности, то он может пересечь
ее два раза. Если у нас "нахождение
в заданной пересеченной опр. 142 или
также попробовать $n = -4 \pm 6$, то он может

можно пересечь окружность 1 в
 двух точках и окружность 2 в двух
 точках (всего будет ≥ 4 точки). Если точка
 "улы" находится в области окружности,
 принадлежащей только ей, то можно
 её око и пересечь (будет ≥ 2 точки). Если
 точка улы находится вне окружности,
 то пересечь она если и может, то только
 2-ую. Значит точка "улы" должна
 находиться нах окружности 1 и в
 окружности 2. Пересечём φ $\pi = 756$
 и окр 1 $(x-8)^2 + (y-15)^2 = 289$.

$$(-y-12)^2 + (y-15)^2 = 289$$

$$(y+2)^2 + (y-15)^2 = 289$$

$$2y^2 - 26y + 229 = 289$$

$$y^2 - 13y - 60 = 0.$$

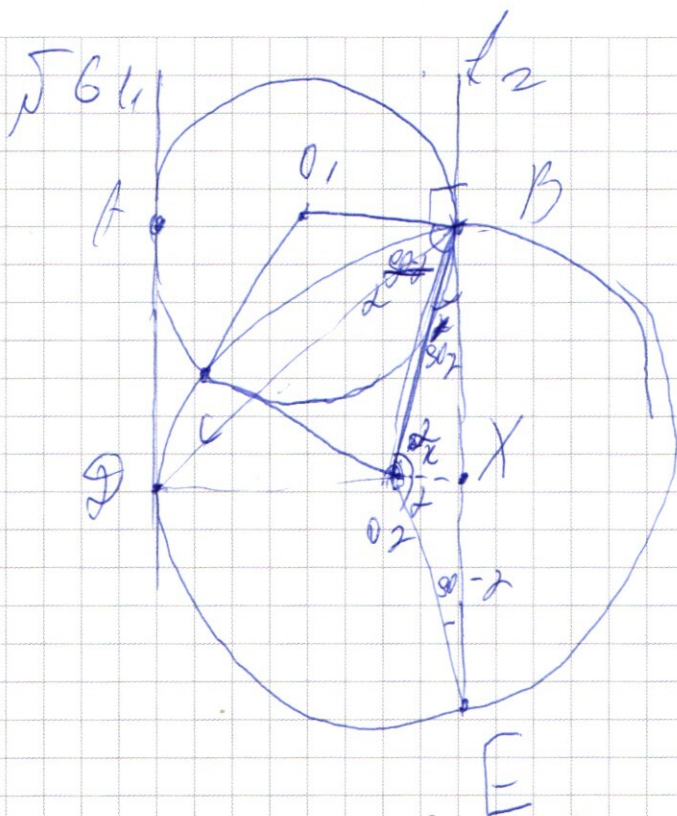
$$\begin{cases} y = 15 \\ y = -2 \end{cases}$$

т.е. мы получили
 точку, лежащую

точка "улы" находится на окружности 2, $y = 15$
 да, тогда $\alpha = 15$, $\alpha = 225$.

Ответ: 225.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



пусть
 $AO_1 = r_1$
 $O_2C = r_2$

пусть $\angle O_1BO_2 = \alpha$, тогда $\angle O_2BE =$
 $= \angle O_2EB = 90 - \alpha$, $\angle BO_2E = 180 - 2\angle O_2BE =$
 $= 2\alpha$. Пусть X — основание высот.
из O_2 на BE . т.к. окр. O_2 касается
 l_1 , то O_2X лежит на CX ($BC \perp l_1$,
 $l_1 \perp O_2X$). $\Rightarrow \angle BO_2X = \alpha$. Пусть пусть
 $O_2X = x$, $O_2X = CX - CO_2 = 2r_1 - r_2$
($CX = AO_1 + O_1B = 2r_1$). r_1, O_2B
 $S_{O_1BO_2} = 2 S_{O_1BO_2} = \sin 2\alpha, r_2$
 $S_{O_2BE} = 2 S_{O_2BE} = \sin 2\alpha, r_2 = \sin 2(2\alpha - \alpha_2)/r_2$.

$$\frac{S_{\text{пол}}}{S_{\text{пол}}} = 5 = \frac{\sin \alpha_1 \cdot r_2}{\sin (r_2 - r_1) \alpha_2} = \frac{r_1}{2r_1 - r_2}$$

$$10r_1 - 5r_2 = r_1$$

$$9r_1 = 5r_2$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{9}{5} \quad \text{ответ: } \frac{9}{5}$$

Найти $\angle$:

$$O_2X / O_2B = \cos \angle$$

$$r_1 / r_2 = \frac{9}{5} \quad r_2 = \frac{9}{5} r_1$$

$$O_2X = \frac{1}{5} r_1$$

$$O_2B = r_2 = \frac{9}{5} r_1$$

$$\frac{O_2X}{O_2B} = \frac{1}{9} = \cos \angle$$

$$\cos \angle O_2B = -\cos \angle = -\frac{1}{9}$$

по т. косинусов. м. $\angle O_2B$:

$$OB^2 = r_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} r_2^2 + r_2^2 - 2 \cos(180^\circ) r_2 r_2$$

$$25 = 2r_2^2 - \frac{2}{9} r_2^2$$

$$25 = \frac{16}{9} r_2^2$$

$$\frac{4}{3} r_2 = 5$$

$$r_2 = \frac{15}{4}$$

$$r_1 = \frac{25}{12}$$

ответ: $\frac{25}{12}, \frac{15}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 3\pi + \sin 3\pi}{\cos 10\pi} = -\sqrt{2}$$

$$3^0 \quad 3^2$$

$$-\sqrt{2} \cos 10 = \cos 9\pi + \sin 10\pi$$

$$\sin(2+\pi) = \sin 2 \cos \pi + \sin \pi \cos 2$$

$$\left(\cos 2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \quad \sin 2 \cos \pi - \sin \pi \cos 2$$

$$\left(-\cos \frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} \quad 2 \sin \pi \cos 2 = \sin(2+\pi) - \sin(2-\pi)$$

$$\frac{\cos 3\pi + \sin 3\pi}{\cos 3\pi \cos \pi - \sin 3\pi \sin \pi}$$

$$\log_2 4 = -\log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\frac{\cos 3\pi \cos \pi - \sin 3\pi \sin \pi}{\cos 3\pi + \sin 3\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \pi - \frac{\sin 3\pi (\cos \pi + \sin \pi)}{\sin 3\pi + \cos 3\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 \sin^2 2\pi \cos 2\pi =$$

$$= 2 \sin^2 2\pi \cos 2\pi (\cos^2 2\pi - 1)$$

$$\sqrt{6\pi^2} = \frac{1}{2} (\log 2)$$

$$\frac{1}{2} (\log 2)^{-\pi}$$

$$21 \cdot \pi (\log 2)^{\frac{1}{2}} \quad \pi \left(\frac{1}{(\log 2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\log \frac{1}{\log}$$

~~Мат~~

н 1.

Мат. н 1.

н 1

н 22.

21 $\sqrt{100x}$
8

2 $\sqrt{100x}$ - 8.2 $\sqrt{100x}$

2 $\sqrt{100x}$, 2 $\sqrt{100x}$ - 8.2 $\sqrt{100x}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{\cos^2 x + 2 \sqrt{1 + \cos 2x} + 3} - 2 \sqrt{1 + \cos 2x} \leq 0$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{\cos^2 x} - 2 \sqrt{1 + \cos 2x} \leq 0$$

$$\sqrt{3} \cdot \cos x - 2 \sqrt{1 + \cos 2x} \leq 0$$

$$\sqrt{3} \cdot \cos x \leq 2 \sqrt{1 + \cos 2x}$$

$$\sqrt{3} \cdot \cos x \leq 2 \sqrt{1 + 2 \cos^2 x - 1}$$

$$\sqrt{3} \cdot \cos x \leq 2 \sqrt{2 \cos^2 x}$$

$$\sqrt{3} \cdot \cos x \leq 2 \sqrt{2} \cos x$$

$$\sqrt{3} \leq 2 \sqrt{2}$$

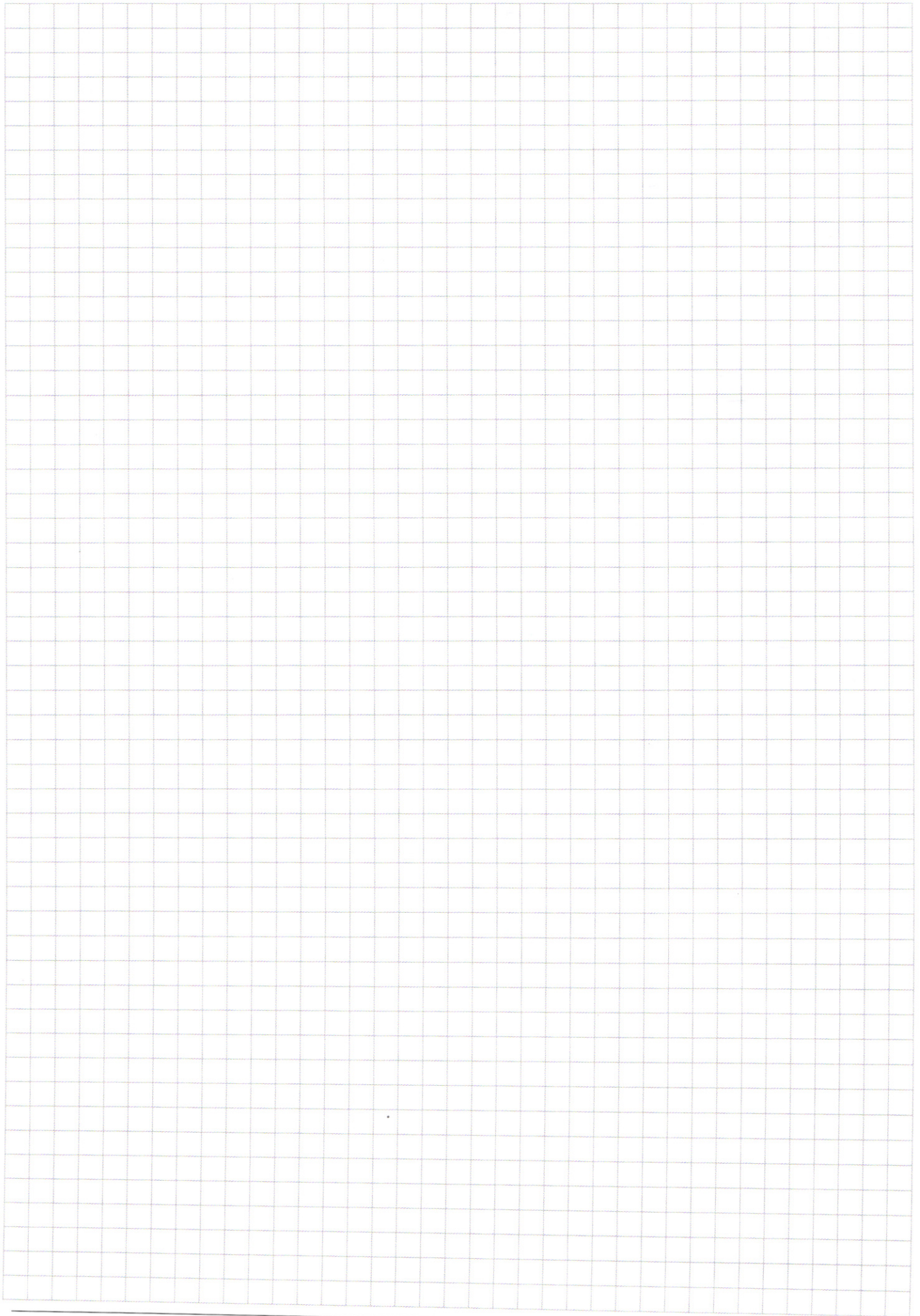
$$\sqrt{3} \leq 2.828$$

$$1.732 \leq 2.828$$~~

~~$$\sqrt{2} \cdot \frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$$~~

$$\frac{(\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x) + (\cos 5x \sin 4x + \cos 4x \sin 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos^{52} x \cdot \cos^{63} x \dots \cos^8 x$$

$$\cos^{51} x \cdot \cos^6 x$$

$$\log_2 x^2 = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$\sin 5x \cdot (\cos 4x - \sin 4x) \\ \cos 5x \cdot (\cos 4x + \sin 4x)$$

1. 2.

$$\frac{3\sqrt{\log_2 x}}{2(\log_2 x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\log_2 x^9}$$

$$\cos 5x \cdot \sin 4x$$

$$\cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \cos 4x + \cos 5x \cdot \sin 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x \\ \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$= \frac{\cos 9x + \sin 9x}{\cos 10x} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\pi (\log_2 x^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi (\log_2 x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} \log_2 x^8$$

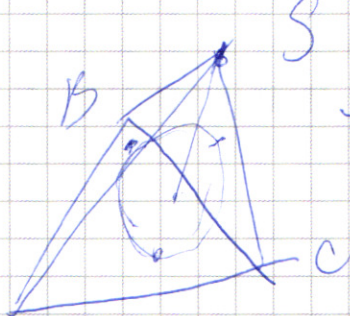
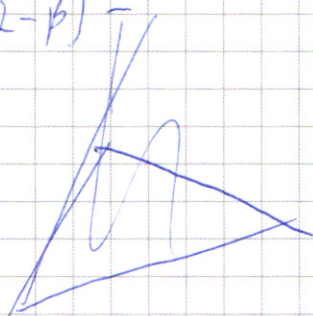
$$\frac{1}{\pi} \log_2 x^7$$

$$8^t + 8 \cdot 4^t + 24$$

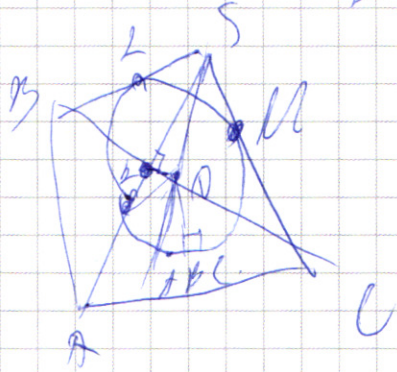
$$y^2 = 4$$

$$\cos(2\alpha) = \cos$$

$$\cos(\beta - \gamma)$$



$$\begin{array}{r} 3^3 \\ 63, 175 \\ 4,5 \\ \hline 1375 \\ 1500 \\ 16,875 \\ 4 \end{array}$$



$$\angle O = \pi \quad 3 \frac{3}{4}$$

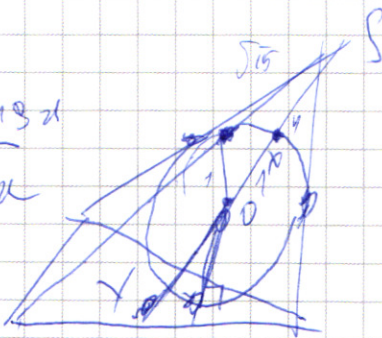
$$\frac{\pi}{50} = \frac{1}{51}$$

$$\cos 10\alpha$$

$$\frac{RS}{SA} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{OY}{\pi} = \frac{SO + OX}{h}$$

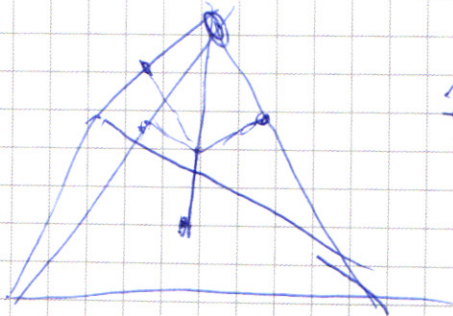
$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos 10\alpha}$$



$$\frac{SO + OX}{h} = \frac{SO - \gamma}{h'}$$

$$\frac{4,5}{15} =$$

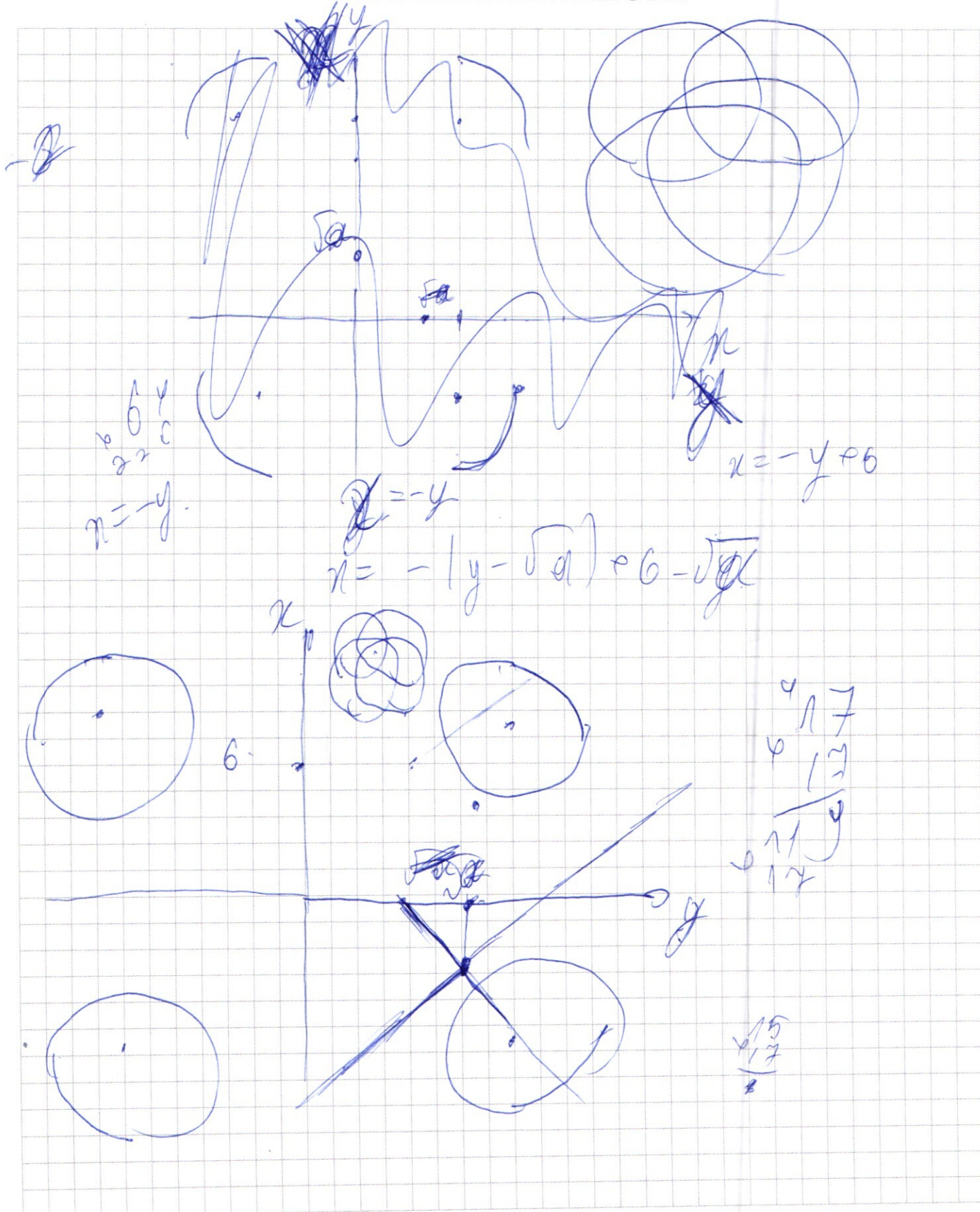
$$50$$

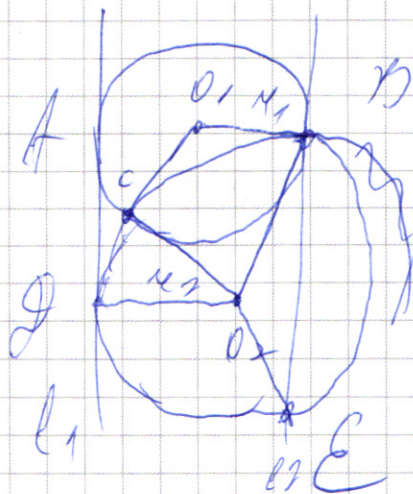
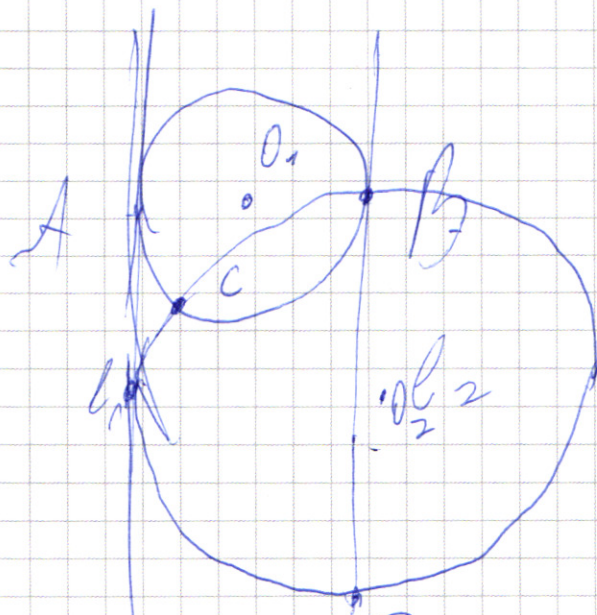


$$\frac{15}{4}$$

$$2,5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\log_{10} x = 70 \cdot x - 70 \cdot E$$

$$x = 70 - 70 \cdot E$$

$$M_1, M_2$$

$$M_1, M_2$$

$$M_1, M_2 \sin f$$

$$\frac{M_1, M_2 \sin f}{2}$$

