

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_3 3}} \leq 48$$

$$27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_3 3}} \leq 48$$

$$27^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 9^{\sqrt{\log_3 x}} + 40 \cdot x^{\sqrt{\log_3 3}} \leq 48$$

$$40 \cdot x^{\sqrt{\log_3 3}} \leq 48 - 27^{\sqrt{\log_3 x}} + 11 \cdot 9^{\sqrt{\log_3 x}}$$

Пусть $a = \sqrt{\log_3 x}$, $a \geq 0$

Тогда $a^2 = \log_3 x$

$$x^{a^2} = 3$$

$$x = \log_3^{\frac{1}{a^2}} 3$$

Тогда

$$40 \cdot \left(\log_3^{\frac{1}{a^2}} 3\right)^a \leq 48 - 27^a + 11 \cdot 9^a$$

$$40 \cdot \left(3^{\frac{1}{a^2}}\right)^a \leq 48 - 27^a + 11 \cdot 9^a$$

$$40 \cdot 3^{\frac{1}{a}} \leq 48 - 27^a + 11 \cdot 9^a$$

$$40 \cdot 3^{\frac{1}{a}} \leq 48 - 3^{2a} + 11 \cdot 3^{2a}$$

$$40 \cdot 3^0 \leq 48 \cdot 3^a - 3^{2a+1} + 11 \cdot 3^{2a+1}$$

$$11 \cdot 3^{2a+1} - 3^{2a+1} + 48 \cdot 3^a \geq 40$$

Пусть $b = 3^a$, $b > 0$. Тогда:

$$11 \cdot 3 \cdot b^2 - 3b^2 + 48b \geq 40$$

$$33b^2 - 3b^2 + 48b - 40 \geq 0$$

$$30b^2 - 33b^2 + 48b - 40 \leq 0$$

$$40. \left(3^{\frac{1}{a}}\right)^a \leq 48 - 27^{\frac{1}{a}} + 11 \cdot 9^{\frac{1}{a}}$$

$$40. 3^{\frac{1}{a}} \leq 48 - 3^{\frac{2}{a}} + 11 \cdot 3^{\frac{2}{a}}$$

Пусть $b = 3^{\frac{1}{a}}$. Тогда

$$40. b \leq 48 - b^2 + 11b^2$$

$$b^2 - 11b^2 + 40b - 48 \leq 0$$

$$(b-3)(b^2-8b+16) \leq 0$$

$$(b-3)(b-4)^2 \leq 0$$

$$b-3 \leq 0, \text{ т.к. } (b-4)^2 \geq 0$$

$$b \leq 3.$$

По т.ч. $b > 0$, то

$$0 < b \leq 3$$

$$0 < 3^{\frac{1}{a}} \leq 3$$

$$0 < \frac{1}{a} \leq 1$$

$$\frac{1}{\log_x 3} \leq 1$$

$$\sqrt{\log_x 3} \geq 1$$

$$\log_x 3 \geq 1$$

$$x \leq 3, \log_x 3 \geq \log_x x$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x > 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leq 3$$

Ответ: $(1, 3]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Вероятность того, что q меньше 55 раз, равна сумме всех биномиальных исходов, делённой на пол-во общих исходов, равно:

$$P = \frac{C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \dots + C_{90}^{90}}{2^{90}}. \text{ Вероятность того, что } q$$

меньше 35 раз, равна сумме всех биномиальных исходов, делённой на пол-во общих исходов, равно: $C_{90}^{30} + C_{90}^{31} + \dots + C_{90}^{90}$. Таким образом,

$$P - q = \frac{C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \dots + C_{90}^{90} - C_{90}^{30} - C_{90}^{31} - \dots - C_{90}^{90}}{2^{90}} =$$

$$= \frac{C_{90}^{55} + (C_{90}^{56} - C_{90}^{34}) + (C_{90}^{57} - C_{90}^{33}) + \dots + (C_{90}^{90} - C_{90}^{0})}{2^{90}} =$$

$$= \frac{C_{90}^{55}}{2^{90}} = \frac{90!}{55! \cdot 35! \cdot 2^{90}}.$$

Ответ: $\frac{90!}{55! \cdot 35! \cdot 2^{90}}$

N2

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\cos 3x}{\cos 8x + \sin 8x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 8x \cos 3x - \cos 8x \sin 3x + \cos 3x \sin 8x + \sin 3x \sin 8x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos(8x-3x) + \sin(8x-3x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 6x} = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\frac{\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\frac{\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos(5x+x)}{\cos 6x} = 0$$

$$\frac{\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} (\cos 5x \cos x - \sin 5x \sin x)}{\cos 6x} = 0$$

$$\frac{\cos 5x (1 - \sqrt{2} \cos x) + \sin 5x (1 + \sqrt{2} \sin x)}{\cos 6x} = 0$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\frac{\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 6x \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 0x \neq \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

СМ. СТР 13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

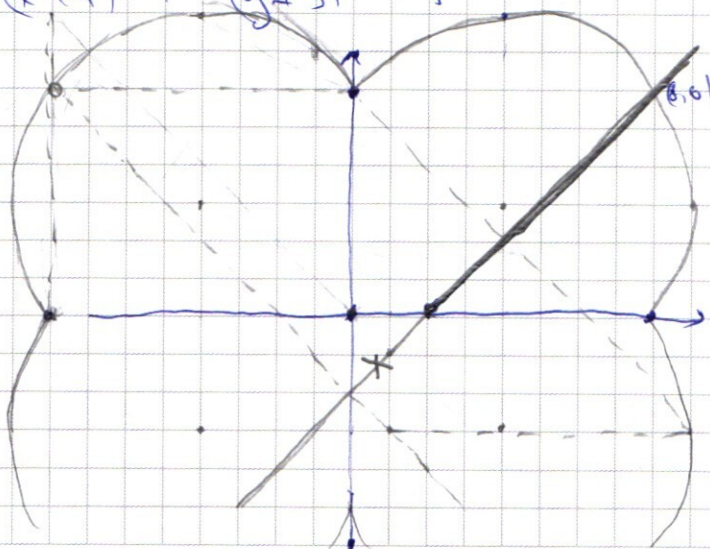
$$\begin{aligned} 1) & y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2 \\ 2) & (|x - 4|^2 + (y - 3)^2 = 25 \\ 2) & (|x - 4|^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \end{aligned}$$

1) $x \geq 0, y \geq 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

2) $x \geq 0, y < 0$
 $(x - 4)^2 + (-y - 3)^2 = 5^2$
 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$

3) $x < 0, y \geq 0$
 $(-x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
 $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

4) $x < 0, y < 0$
 $(-x - 4)^2 + (-y - 3)^2 = 5^2$
 $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$



Таким образом на графике отражены 4 других
 непустых окружности радиусов $\sqrt{a}$ с центрами в
 точках $(3, 4)$, $(-3, 4)$, $(3, -4)$, $(-3, -4)$.

$$1) \quad y = (x - \sqrt{a}) + \sqrt{a} - 2$$

$$1) \quad x \geq \sqrt{a}$$

$$y = (x - \sqrt{a}) + \sqrt{a} - 2$$

$$y = x - 2$$

$$2) \quad x < \sqrt{a}$$

$$y = \sqrt{a} - x + \sqrt{a} - 2$$

$$y = -x - 2 + 2\sqrt{a}$$

Заметим, что прямая $y = x - 2$ пересекает ~~не~~
~~более~~ 2 график. ф. и $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ не
 более чем в 2 точках. При этом координаты (x_1, y_1) и
 (x_2, y_2) таковы, что $x_1, y_1 \geq 0$ и $x_2, y_2 < 0$. По
 т.ч. $x \geq \sqrt{a}$, то $x \geq 0$. Таким образом (x_2, y_2) не
 может являться точкой пересечения прямой $y = x - 2$ и
 графика ф. и $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$. Тогда
 рассмотрим 2 случая

1) (x_1, y_1) — абс. точкой пересечения.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x \geq \sqrt{a} \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

По условию, $x = 8$, $y = 6$. Тогда $\sqrt{a} \leq 8$. Тогда прямая
 $y = -x - 2 + 2\sqrt{a}$ пересекает график ф. и $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

даны, т.е. всего сущ. 3 точки пересечения. по условию

те. система

$$\begin{cases} \sqrt{a} \leq 8 \\ x < \sqrt{a} \end{cases}$$

$$y = -x - 2 + 2\sqrt{a}$$

имеет 2 решения

$$f(x, y) = (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

т.е. $\sqrt{a} \leq 8$ и $x < \sqrt{a}$, то $x < 8$ и $-x - 2 - 8$

значит прямая лежит правее прямой $x = -8$

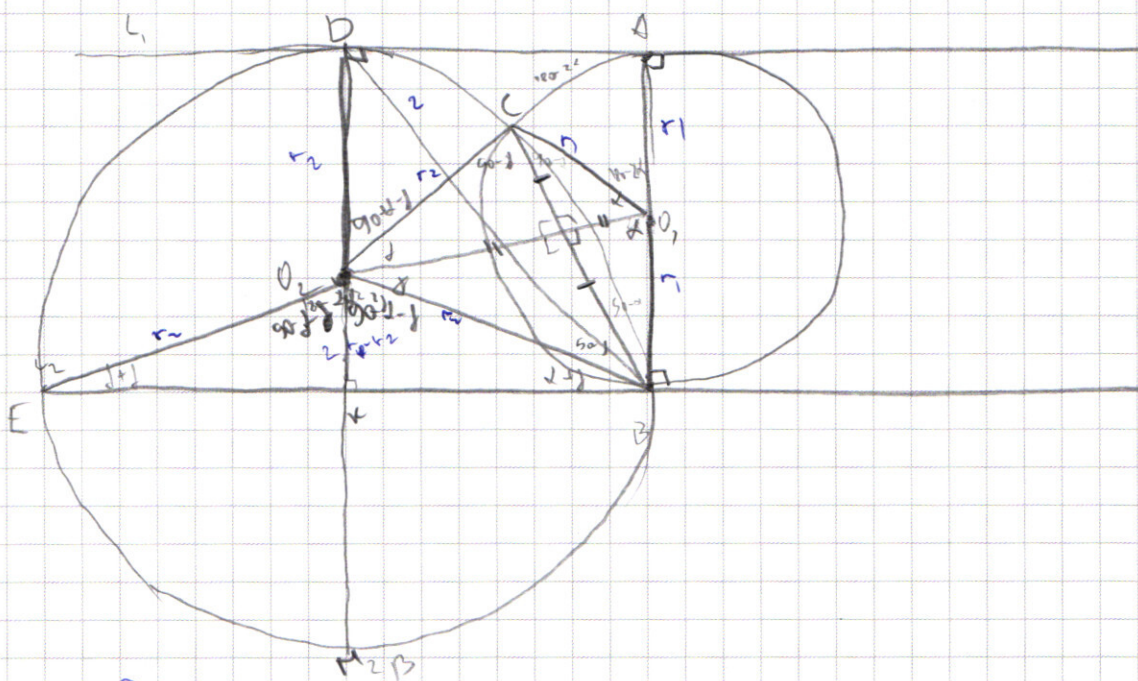
Также эта прямая не пересекает эллипс $f(x, y)$

при $x < 0$ и $y < 0$. Отсюда следует, когда система

имеет не 2 решения. Система имеет одно реше-

ние при

№6



Решение

Заметим, что $\triangle O_2CO_1 = \triangle O_2O_1B$ по трём сторонам.

$O_2B = O_2C = r_2$, $O_1C = O_1B = r_1$, O_1O_2 — общая сторона.

$$S_{BO_1CO_2} = S_{BO_1O_1} + S_{BO_1O_2} = 2 S_{BO_1O_2} = 2 \cdot O_2B \cdot$$

$$\cdot BO_1 \cdot \sin \angle O_2BO_1 \cdot \frac{1}{2} = r_2 r_1 \sin \angle O_2BO_1.$$

$$S_{O_2BE} = O_2E \cdot O_2B \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle EO_2B = \frac{r_2^2}{2} \sin \angle EO_2B$$

Обозначим $\angle O_2O_1B$ за κ , $\angle CO_2O_1$ за $\jmath$. Тогда
 $\angle O_2O_1B = \kappa$; $\angle O_1O_2B = \jmath$ и $\angle O_2BO_1 = \angle O_2EO_1 =$
 $= 180 - \kappa - \jmath$ по п. 8а $\triangle O_1CO_1$ и $\triangle O_1BO_1$. $\angle BCO_1 =$
 $= \angle CBO_1 = \frac{180 - 2\kappa}{2} = 90 - \kappa$ ($\triangle CO_1B$ — равнобедренный).

$$\angle O_1CB = \angle O_1BC = \frac{180 - 2\jmath}{2} = 90 - \jmath$$
 ($\triangle O_1CB$ — равнобедр.).

$\angle EBA = 90^\circ$, т.к. EB — касательная к ω , тогда $\angle EBO_2 =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= 180 - (90 - \alpha) - (90 - \beta) = \alpha + \beta. \angle O_2EB = \angle EBO_2 = \alpha + \beta / \Delta O_2EB -$$

равнобедренный). т.е. $S_{BO_2CO_2} = \frac{r_1 r_2}{2} \sin(180 - \alpha - \beta)$.

$$S_{O_2EB} = \frac{r_2^2}{2} \sin(180 - 2\alpha - 2\beta). \text{ По условию}$$

$$\frac{S_{BO_2CO_2}}{S_{O_2EB}} = 2$$

$$\frac{r_1 r_2 \sin(\alpha + \beta)}{\frac{r_2^2}{2} \sin(2\alpha + 2\beta)} = 2$$

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + 2\beta)} = 2$$

$$\frac{r_1}{r_2} \cos(\alpha + \beta) = 2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos(\alpha + \beta). \text{ Проведем } DO_2 \text{ до пересечения}$$

с EB. $AD \parallel EB$ т.к. $L_1 \parallel L_2$, DN - диаметр, т.е. когда

DN проходит через центр. Когда $EB \perp$ диаметру DN , имеем $KE = KB$. т.е. $\Delta EKO_2 = \Delta O_2KB$ по двум катетам.

т.е. $\angle KO_2B = \angle KO_2E = 180 - \alpha - \beta = 90 - \alpha - \beta$. Рассмотрим

четырехугольник $KDAB$. Все углы в нем равны

$90^\circ \Rightarrow \Delta BKO$ - прямоугольный т.е. $KO = AB = 2r_1$. т.е.

$KO_2 = KD$ $DO_2 = 2r_1 - r_2$. Из треугольника ΔKO_2B .

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{KO_2 - DO_2}{KO_2} = \frac{2r_1 - r_2}{2r_1}$$

$$= \sqrt{\frac{r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2}{r_2^2}} = \sqrt{\frac{r_2^2 - 4r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2}{r_2^2}} =$$

$$= \cancel{\frac{4r_1}{r_2^2}} \sqrt{\frac{-4r_1^2 + 2r_1r_2}{r_2^2}} = \sqrt{2\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - 4\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

Пусть $\frac{r_1}{r_2} = x$. Тогда:

$$x = 2 \sqrt{2x - 4x^2}$$

$$x^2 = 2(2x - 4x^2)$$

$$x^2 = 4x - 8x^2$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x^2 = 2(2x - 4x^2)$$

$$x^2 = 4x - 8x^2$$

$$9x^2 = 4x$$

$$x = \frac{4}{9}$$

т.е. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left| \frac{r_2 - \frac{9}{4}}{\frac{r_1}{4}} \right| \Rightarrow r_2 = \frac{9r_1}{4}$

значит $\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{2 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9} - \frac{64}{81}} =$

$$= \sqrt{\frac{72 - 64}{81}} = \sqrt{\frac{8}{81}} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

т.е. $BK = r_2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{2}}{9} r_2$

По 1. теореме в $\triangle BKD$ $BK^2 + KD^2 = BD^2$

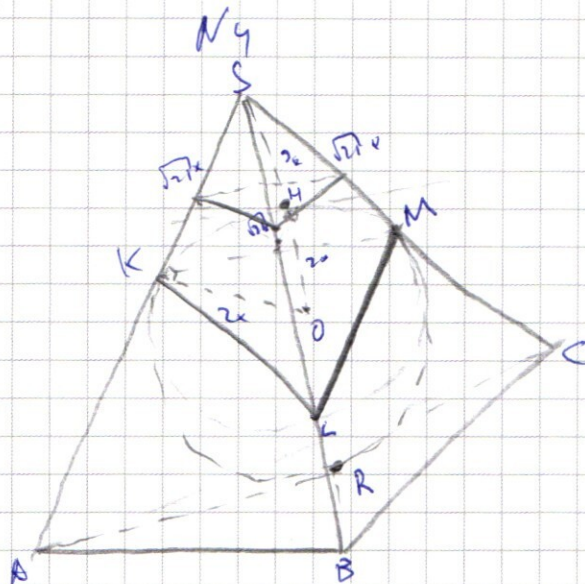
т.е. $\frac{8}{81} r_2^2 + 4r_1^2 = 4$

$$\frac{8}{81} \cdot \frac{81r_2^2}{16} + 4r_1^2 = 4 \Rightarrow \frac{r_2^2}{2} + 4r_1^2 = 4 \Rightarrow r_1^2 = \frac{8}{9}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$r_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}, r_2 = \frac{3r_1}{4} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ответ: а) $\frac{9}{4}$, б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$



Решение

$\triangle KSO$ прямоугольный, т.к. OK кас. сферы $\Rightarrow \angle KSO = 90^\circ$.

Т.к. $\angle KSO = 90^\circ$ $\arccos \frac{1}{5} \Rightarrow \cos(\angle KSO) = \frac{1}{5}$. т.е.

$SK = \sqrt{21}x$, $SO = 5x$, тогда $OK = \sqrt{21x^2 - 25x^2} = 2x$. Пусть H - наименьшая точка сферы к

т. S . Тогда $OH = 2x$. $H \in SO$, т.к. SH - миним.

$(SH \cdot SO = SH^2 + SH \cdot HO \text{ const})$ Пусть эта величина

некоторая точка H' . Тогда $SH' \cdot SO =$. Пусть $SH = x - 4x = 0$

Заметим, что $SK = SL = SM$, т.к. SK, SL, SM касаются

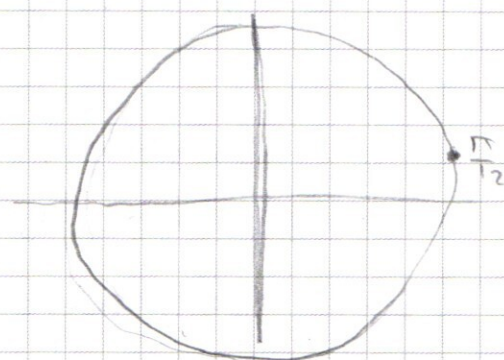
сферы и равны $\sqrt{21}x$. $S_{\triangle KLM} = \frac{KL \cdot LM \cdot KM}{4R} = \frac{KL \cdot ML \cdot KM}{8x} = 50$

$$KL-LM-MK = 40x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6}, l \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi + 8\pi k}{44}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi + 2\pi l}{12}, l \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi(8k-1)}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi(8n+1)}{44}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi + 2\pi l}{12}, l \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$



$$\frac{8k-1}{4} = \frac{2l+1}{12}$$

$$12(8k-1) = 4(2l+1)$$

$$24k-3 = 2l+1$$

$$24k-2l = 4$$

$$12k-l = 2 \Rightarrow l = 12k-2$$

$$k = \frac{l+2}{12} \Rightarrow \text{т.к. } x = \frac{\pi(2l+1)}{12}, \text{ то } k \neq 10.$$

$$\frac{8n+1}{44} = \frac{2l+1}{12}$$

$$\frac{8n+1}{11} = \frac{2l+1}{6}$$

$$48n+6 = 22l+11$$

$$48n = 22l+5 \Rightarrow n = \frac{22l+5}{48}$$

Leitern

Orbit: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6}, l \in \mathbb{Z}$$

N7

$$y \geq 90 - x - 6^{90}$$

$$y \leq \log_6 x$$

$$\log_6 x \geq 90 - x - 6^{90}$$

$$6^{90+x-6^{90}} \leq x, \text{ т.к. } x \text{ — целое } x \in (0; 1)$$

Заметим, что при $x = 6^{90}$ достигается равенство. Левая часть ~~возрастает~~ ~~быстро~~ ~~и~~ ~~монотонно~~, значит $x = 6^{90}$ — единственное значение при котором достигается равенство.

т.к. при $x = 6^{90}$ ~~возрастает~~ ~~быстрее~~ ~~чем~~ $f(x) = x$, то ~~т.к.~~ $6^{90+x-6^{90}} < x$, то $x \leq 6^{90}$.

т.к. $y \leq \log_6 x$, и $x \leq 6^{90}$, то $y \leq 90$.

~~т.к. $y \geq 90 - 6^{90} + x$ и $x \leq 6^{90}$, то $y \geq$~~

Пусть $y = 90 - a$, где $a \geq 0$ и a — целое, т.к. ищут целые решения.

$$\text{Тогда } 90 - a \geq 90 + x - 6^{90}$$

$$-a \geq x - 6^{90}$$

$$a \leq 6^{90} - x$$

$$x \leq 6^{90} - a$$

$$90 - a \leq \log_6 (6^{90} - a)$$

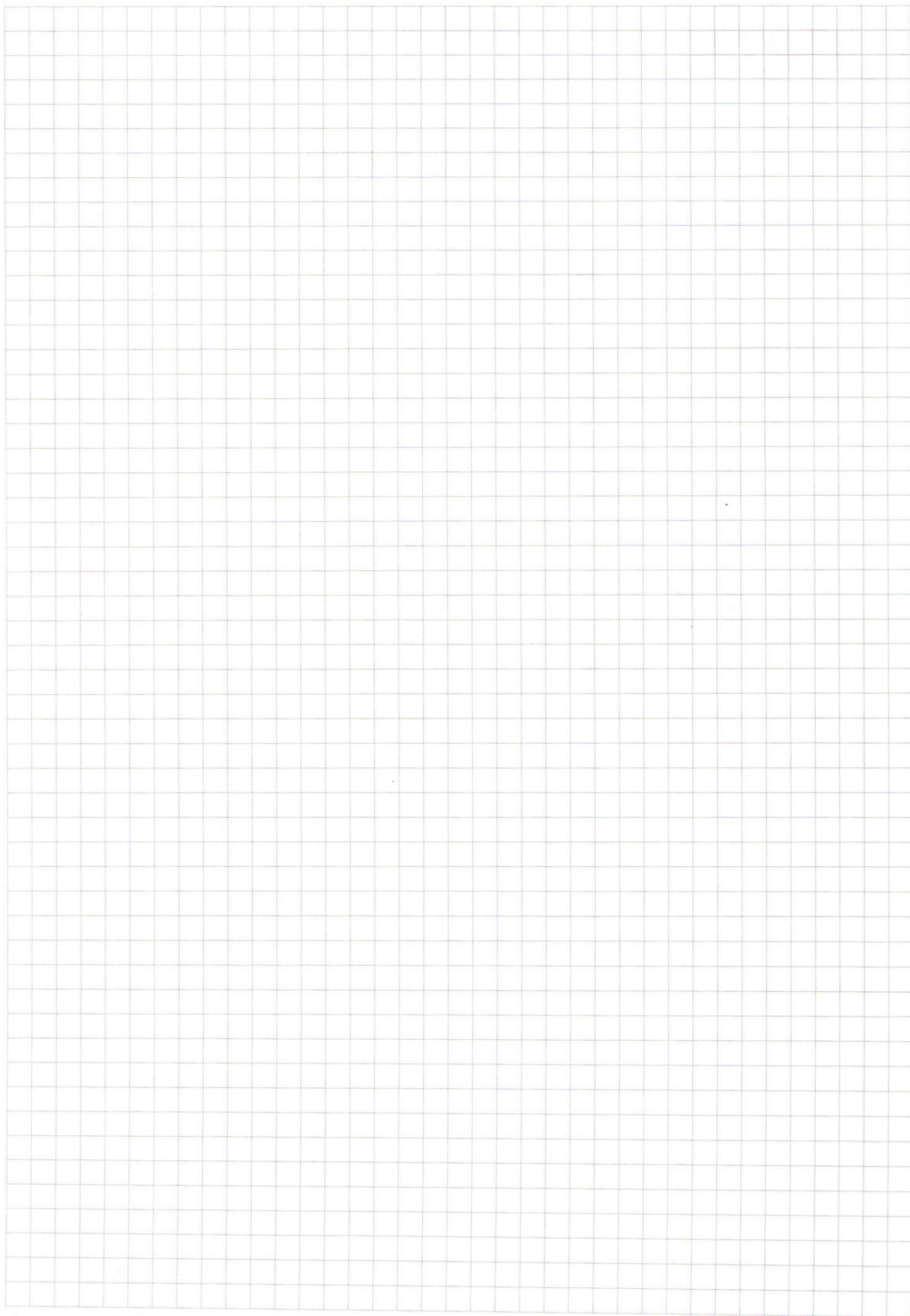
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \leq \log_6 x$$
$$90 - a \leq \log_6 (6^{90} - a)$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} y = 90 + x - 6^{90} + l, & l \geq 0 \\ y = \log_6 x - m, & m \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = y - 90 - x + 6^{90}, & l \geq 0 \\ m = y - \log_6 x, & m \geq 0 \end{cases}$$

$$x = 6^{90} - a - b, \quad b \geq 0$$
$$90 - a \leq \log_6 (6^{90} - a - b)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{\log x 3} = \sqrt{x^{\log x 3}} = (\sqrt{x^{\log x 3}})^2$$

$$x^a = (\sqrt{x})^{2a}$$

$$x^{\log x 3} = 3$$

$$\left(16\right)^{\frac{1}{2}} = 16$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{a^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}})}$$

$$b = \frac{1}{9}$$

$$x^{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2}} = \sqrt{x^a}$$

$$\frac{11}{9} - \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$a^2 = \log_x 3 \Rightarrow x^{a^2} = 3$$

$$x = \log_a 3$$

$$36(16 - b^2 + 16) = 40$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{4} + 16\right) = 80$$

$$3(11 \cdot 3^{a+1} - 3^{2a+1} + 48) \geq 40$$

$$3 \cdot \frac{22}{3} - \frac{4}{9} + 16 = 40$$

$$b = \frac{2}{3}$$

$$b^2 = b$$

$$36b^2 - 3b^3 + 48b - 40 \geq 0$$

$$36b^2 - 3b^3 + 48b - 40 \geq 0$$

$$36b^3 - 33b^2 - 48b + 40 \leq 0$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$3 - 3b - 48 + 40$$

$$b = 3$$

$$\frac{3}{27} - \frac{33}{9} - 46 + 40 \leq 0$$

$$\frac{1}{9} - \frac{33}{9} = -\frac{32}{9}$$

$$\begin{aligned} & C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \dots + C_{90}^{90} - C_{90}^{90} - C_{90}^{90} - \dots - C_{90}^{34} = \\ & = C_{90}^{55} + C_{90}^{56} + \dots + C_{90}^{90} - C_{90}^{90} - \dots - C_{90}^{56} - C_{90}^{55} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos 8x \cos 3x - \cos 8x \sin 3x + \cos 3x \sin 8x + \sin 3x \sin 8x = \sqrt{2} \\ & \cos^2 3x - \sin^2 3x \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos 3x$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$1 + 2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x$$

$$\log_3 3$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$a^2 = \log_3 x$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} (\cos(5x + \pi/4))$$

$$\frac{1}{a^2} = \log_3 x$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} (\cos 5x \cos \pi/4 - \sin 5x \sin \pi/4)$$

$$\cos 5x (1 - \sqrt{2} \cos 5x) + \sin 5x (1 + \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x + \sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sqrt{2} \cos 6x$$

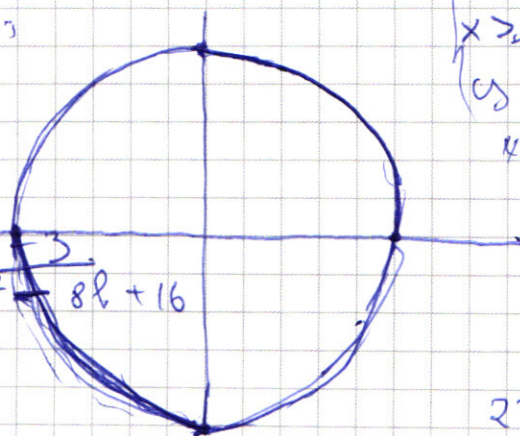
$$\cos 3x (\cos 2x + \sin 2x) + \sin 3x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$(\cos 3x + \sin 3x)(\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 3x + \sin 3x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$x = -1, 3^2 + (1y - 3)^2 = 23$$

$$(1y - 3)^2 = 16$$

$$\begin{aligned} & 9^2 - 16^2 + 40b - 48 \\ & 81 - 256 \\ & -8b^2 + 40b \\ & -8b^2 + 24b \\ & 16b - 48 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & x \geq \sqrt{a} \\ & y = x - 2 \\ & x \leq \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$y = (x - \sqrt{2})^2$$

$$y = x - 2\sqrt{a} - 2$$

$$27 + 120 - 48 - 99$$

$$144$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 5x = a + \sin 5x (a + 2\sqrt{2} \sin x) = 0$$

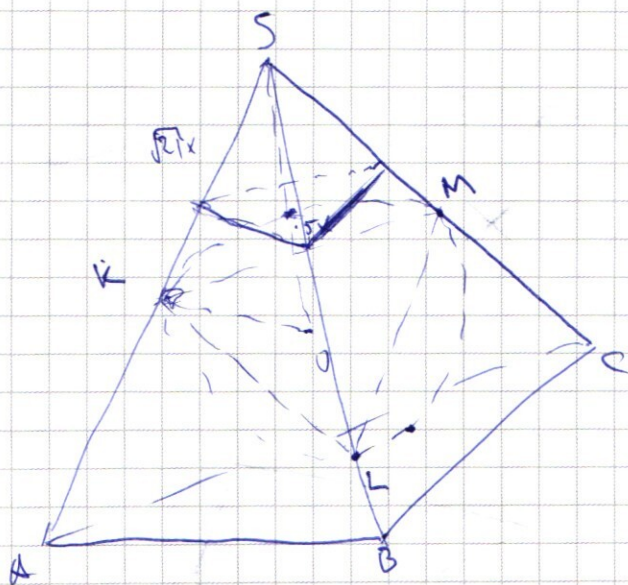
$$a(\cos 5x + \sin 5x) + 2\sqrt{2} \sin x \sin 5x = 0$$

$$\sin 3x (\sin 8x + \cos 8x) + \cos 3x (\sin 8x + \cos 8x) = 0$$

$\cos^2 3x - \sin^2 3x$

$-2\sin 5x \cos 8x = \sqrt{2}$

$$\frac{(\sin 3x + \cos 3x)(\sin 8x + \cos 8x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \frac{2\sin 3x \cos 8x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$



$$\frac{\text{Ord}_1}{\sin(x+1)} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

Dep. C. y. (0, 1) C. y. (4, 3)

$$x < 0$$
$$y < 0$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\frac{r_1}{\sin \alpha} = \frac{r_2}{\sin \alpha}$$

$$\frac{r_1 \sin \alpha}{r_2} = \sin \beta$$

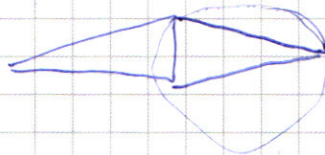
$$\frac{r_1}{r_2}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

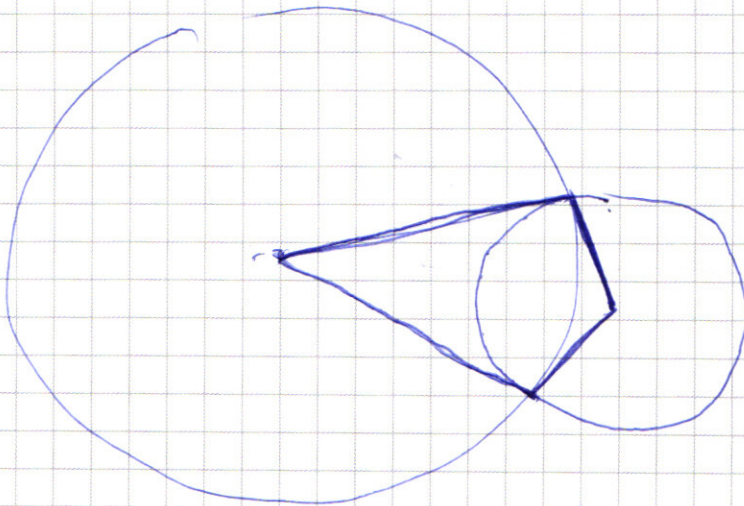
15-5-1

$$\log_6 x \geq 90 + x - 6^{90}$$

$$6^{90} - 6^{30} \leq \times$$



$$\frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$



$$\frac{r_2 \sin 2\theta}{2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} (\sin \theta + \sin \phi) = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sin \theta + \sin \phi}{\sin \theta + \sin \phi} = 2$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР



2 0 0 1 0 6 5 8

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

