

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$
 имеет ровно три решения.
6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Вероятность

Всего вариантов 2^{70}

Вероятность выпадения орла больше 42 раз
- это вероятности выпадения решки меньше 28 раз.

Получается т.к. вероятности выпадения орла и
решки равны, мы считаем разности между
вероят. выпад. решки ≤ 28 и ≤ 28 , то есть
вероятности выпадение решки 28 раз.

2^{70} - всего вариантов

$\frac{70!}{28! 42!}$ - вариантов выпадения решки 28 раз
(перестановка 28 ~~разных~~ одинаковых объектов,
среди 70)

Ответ:

$$\frac{2^{70} \cdot \frac{70!}{28! 42!}}{2^{70}}$$

$$\frac{70!}{28! 42! 2^{70}} = p - q$$

N 2

ЛИПНОВИК

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \frac{\cos 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x} = \frac{\cos 6x \cdot \cos x + \sin 6x \cdot \sin x}{\cos 6x}$$

$$= \frac{\cos 6x \cdot \cos x + \sin 6x \cdot \sin x}{\cos 6x} = \cos x + \sin x$$

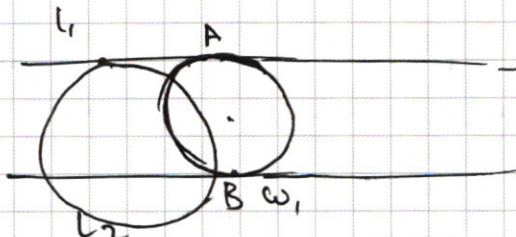
$$\cos 3x (\sin 4x + \cos 4x) + \sin 3x (\cos 4x - \sin 4x)$$

$$2 \cos^2 2x - 1$$

$$\cos 2x \cdot \sin x - \cos 2x \cdot \cos x -$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$$

$$\sin 3x = \cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x$$



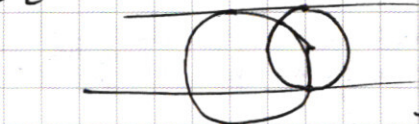
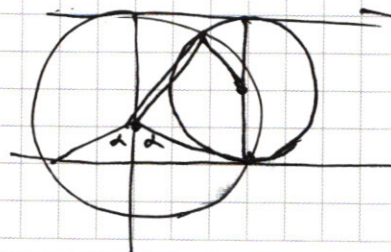
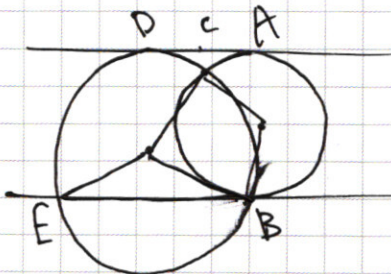
$$8 - 14 \cdot 4$$

$$8 - 8 \cdot 7$$

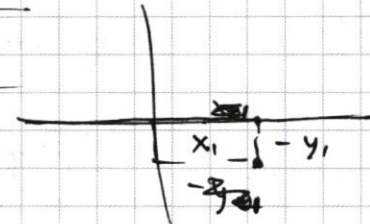
$$-6 \cdot 8 + 60 \cdot 2$$

$$6 \cdot 12$$

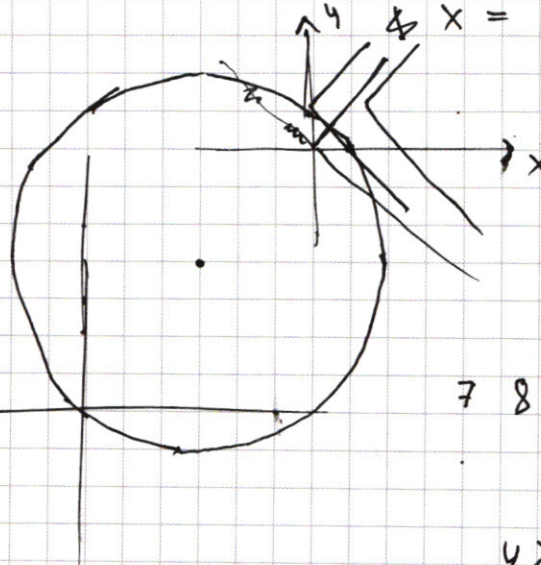
$$120 + 8 -$$



$$6 \cdot 20$$



$$x = |y - \sqrt{a}|$$



$$x = 7$$

$$7^{80} \leq 80 + x$$

$$45$$

$$78$$

$$48$$

$$y \leq 1$$

$$y \geq 80 + \dots - 7^{80}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1+2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} \leq 72$$

$$\log_2 x > 0$$

$x > 1$

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$x^{\sqrt{\log_2 2}} = k \quad x^{\sqrt{\log_2 2}} = x^{\sqrt{\frac{1}{\log_2 x}}}$$

$$x = 2^{t^2}$$

Пусть $\sqrt{\log_2 x} = t$

$$2^{3 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}}} - 7 \cdot 2^{1+2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 2}} \cdot x^{\sqrt{\log_2 2}} = f(t) = 2^{3t} - 14 \cdot 2^{1+t} + 60 \cdot (2^{t^2})^{\frac{1}{t}}$$

$$= 2^{3t} - 2^{1+t} \cdot 7 + 60 \cdot 2^t \leq 72$$

$$f'(t) = 3 \cdot 2^{3t} \ln 2 - 14 \cdot 2^{1+t} \ln 2 + 60 \cdot 2^t \ln 2 > 0 \quad \text{т.к.}$$

$$3 \cdot 2^{3t} > 14 \cdot 2^{1+t}$$

$$2^{2t-1} > \frac{14}{3}$$

$$t > 1 + \frac{\log_2 \frac{14}{3}}{2}$$

$$60 \cdot 2^t > 14 \cdot 2^{1+t}$$

$$\frac{30}{7} > 2^{1+t}$$

$$t < 1 + \log_2 \frac{30}{7}$$

$$k = 2^t$$

$$k^3 - 14k^2 + 60k - 72 \leq 0$$

$k = 2$ - находим

$$\begin{array}{r|l} k^3 - 14k^2 + 60k - 72 & k-2 \\ \hline k^3 - 2k^2 & k^2 - 12k + 36 \\ \hline -12k^2 + 60k & \\ -12k^2 + 24k & \\ \hline 36k - 72 & \\ 36k - 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$D/4 = 6^2 - 36 = 0$$

$$k_{1,2} = 6 \pm 0$$

$$k^3 - 14k^2 + 60k - 72 = (k-2)(k-6)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq 2 \\ k = 6 \end{cases}$$

$$x = 2^{t^2} = k^2$$

Ответ: $\frac{1}{4} < x \leq 4$ и $x = 36$

№5 начало

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

Что происходит с окружностью

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$6(|x| - x_0)^2 + (|y| - y_0)^2 = r^2$$

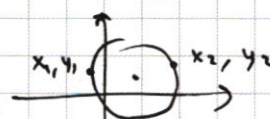
Эта окружность (только часть в ~~2-е~~ положительных числах)

отражается относительно

O_x и O_y

$\sqrt{a}$

задней



те точки где

$$x_1 < 0$$

теперь не подходит по уравнению, где $x_2 > 0$ имеют "отражение" $(-x_2; y_2)$ - подходящее по уравнению

при изменении

$$y \rightarrow |y|$$

отражаются все

отриц. y

$$|y| \rightarrow |y - \sqrt{a}|$$

график поднимается

вверх на $\sqrt{a}$

$$|y - \sqrt{a}| \rightarrow |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4$$

- график спускается

вправо на

$$\sqrt{a} - 4$$

по которой

Пунктиром обозначена прямая, по которой может двигаться A - вершина "шапочки"

$$x_A = \sqrt{a} - 4$$

$$y_A = \sqrt{a}$$

$$\rightarrow y = x + 4$$

$$y \geq 0$$

Три решения

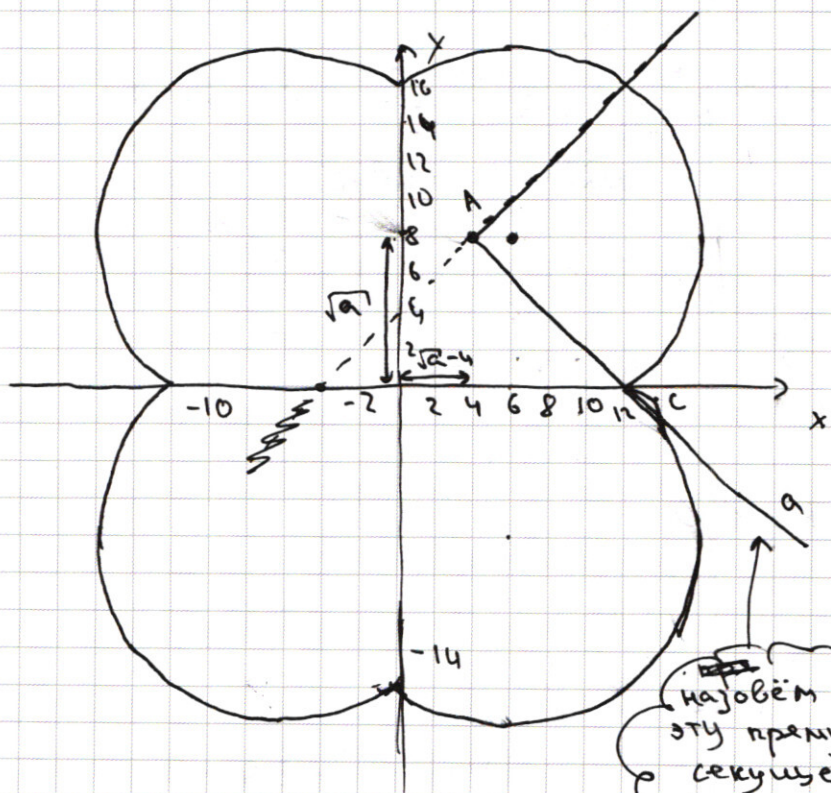
будет если секущая прямая

пересечёт

графики окружностей два раза.

$B(12; 0)$

C - крайняя точка касания



назовём эту прямую секущей

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 продолжение

Если секущая ниже B, она пересечёт окр.

1 раз. Если ~~немного выше~~ выше B и ниже C

- ~~будет~~ ^{всего} 4 решения. $X_B - X_A = Y_A - Y_B$ и $Y_A = X_A + 4$

При прохождении B: $X_A = 4$ $Y_A = 8 = \sqrt{a}$

$$A = (12; 8) \rightarrow \sqrt{a} = 12 \rightarrow a = 144 \quad a = 64$$

При прохождении C:

$$X_C = \frac{6}{2} + \frac{10}{2}\sqrt{2} = 3 + 5\sqrt{2}$$

$$Y_C = -8 + \frac{10}{2}\sqrt{2} = -8 + 5\sqrt{2}$$

$$C \left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}}; -4 + \frac{5}{\sqrt{2}} \right)$$

$$X_C - X_A = Y_A - Y_C \quad (\text{т.к. } y_{201} \text{ и } 45^\circ)$$

$$Y_A = -X_A + X_C + Y_C = -X_A - 1 + 5\sqrt{2}$$

$$Y_A = X_A + 4$$

$$2Y_A = \frac{96}{2} + \frac{10}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{a}$$

$$a = 25(3 - 2\sqrt{2})$$

$$a = 25(\sqrt{2} - 1)^2 = 25 \cdot 2 - 2 \cdot 50\sqrt{2} + 25 = 75 - 100\sqrt{2}$$

$$a = \frac{(3 + 5\sqrt{2})^2}{4} = \frac{9 + 30\sqrt{2} + 50}{4} = \frac{59 + 30\sqrt{2}}{4}$$

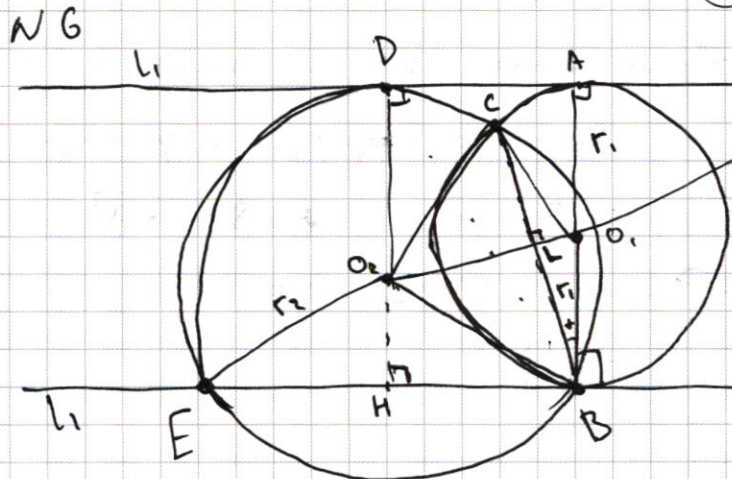
Ответ: при $a = \frac{64}{1}$ ~~$25(3 - 2\sqrt{2})$~~ ~~$\frac{59 + 30\sqrt{2}}{4}$~~

Ответ: $a = 64; 25(3 - 2\sqrt{2})$

~~ху~~ 7^n - ~~xy~~

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80} \\ y \leq \log_7 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 80 + 7^n - 7^{80} \\ y \leq n \\ n \geq 80 + 7^n - 7^{80} \end{cases}$$



высота $\triangle EO_2B$

$$O_2H = 2r_1 - r_2$$

$$BH = EH = \sqrt{r_2^2 - 4r_1^2 - r_1^2 + 4r_1r_2}$$

$$= \sqrt{4r_1r_2 - 4r_1^2} = 2\sqrt{r_1(r_2 - r_1)}$$

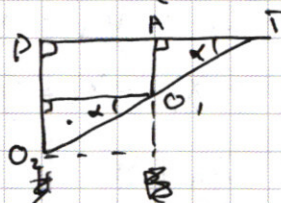
$$S_{EO_2B} = EH \cdot O_2H = BH \cdot O_2H$$

T - пересечение l_1 и

O_1, O_2

$$\triangle TO_2D \sim \triangle TO_1A$$

$$\frac{TA}{TD} = \frac{TO_1}{TO_2} = \frac{r_1}{r_2}$$



$$O_1O_2 = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + BH^2}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{4r_1^2 + BH^2}$$

$$\angle O_1LC = 90^\circ - \text{высота}$$

$$\angle LO_1B = 90 - \alpha$$

$$LB = r_1 \sin(90 - \alpha) = r_1 \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{BH}{O_1O_2}$$

$$S_{BO_1CO_2} = LB \cdot O_1O_2 = \sqrt{4r_1^2 + BH^2} \cdot r_1 \cdot \frac{BH}{O_1O_2}$$

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{EO_2B}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{2r_1 - r_2} = 3$$

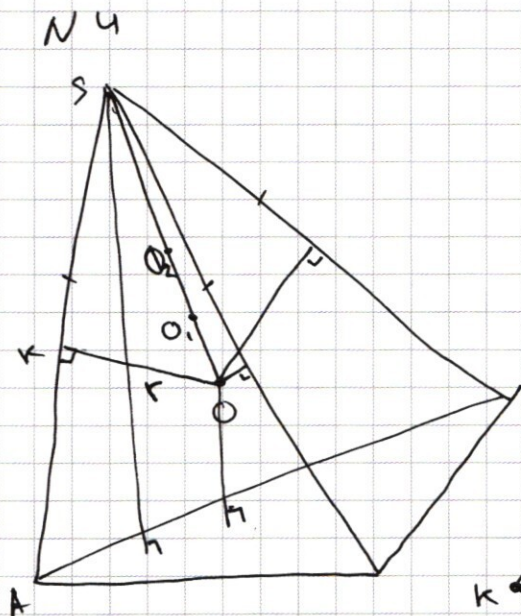
$$3r_2 = 5r_1$$

Ответ: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{5}$

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = 4r_1^2 + 4(r_1r_2 - r_1^2) = 4r_1r_2 = \frac{4 \cdot 5}{3} r_1^2 = 3$$

Ответ: $r_1 = \frac{3}{2\sqrt{5}}; r_2 = \frac{5}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



r - радиус сферы

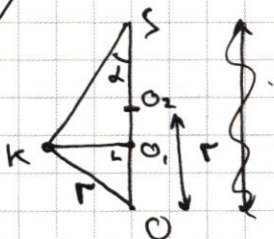
$$\frac{KS}{GS} = \frac{\sqrt{75}}{5}$$

$$KS^2 = OS^2 + r^2 \quad \text{аналогично}$$

→ KML - перпендикулярная
к OS плоскость

O_1 - проекция O на KML

O_2 - ближайшая точка
на сфере к S
(~~с~~ очевидно
лежит на OS)



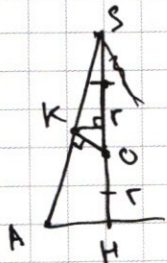
$$\frac{S_{\cancel{31}}}{S_2} \approx \frac{S_{02}}{\cancel{S_1}}$$

$$r = \frac{3}{5} OS$$

$$SO_2 = \frac{1}{4} OS$$

$$S_{KLM} = \frac{30}{302} \cdot 2 = 8$$

a) Ответ: $S_{KLM} = 8$



← Проекция на SOK

$$SH = SO + r = \frac{7}{5} SO \quad \text{m}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_0} = \frac{S_H^2}{S_{O_2}^2} = \frac{8}{25} \cdot 49$$

$$V = \frac{S_{ABC} \cdot SH}{3} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 8}{24 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 49 \cdot 3}{2} = \frac{147 \cdot 7}{2}$$

Or let: $V = \frac{147.7}{2} = \frac{1029}{2}$

N 2

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \frac{\cos 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x +$$

$$+ \cos 3x \cdot \sin 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x}{-\sin^2 3x} = \frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 7x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 7x}{\sqrt{2}} = \cos 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos(7x - \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \cos 6x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 6x = -7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi + 2\pi k}{4 \cdot 13} = \frac{\pi + 2\pi k}{52} = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 3x - \sin 3x \neq 0 \\ \sin 3x + \cos 3x \neq 0 \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad k \in \mathbb{Z}$$

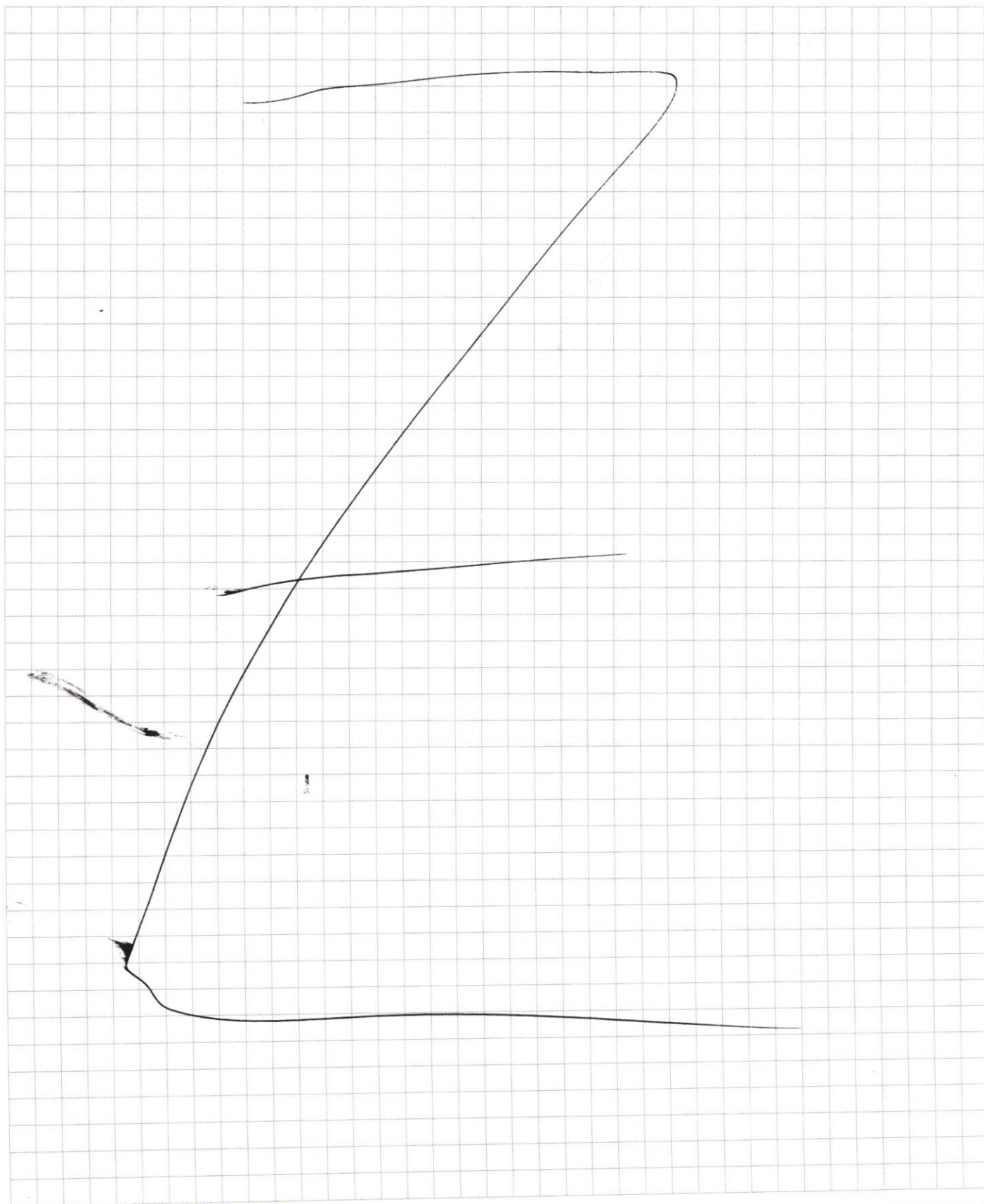
$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} \quad k \in \mathbb{Z}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$r_2^2 = 4$$

$$S_{EO_2B} = O_2H \cdot HB = \cancel{O_2B} \cdot \frac{HB}{r_2 \cdot \cos \alpha} \cdot HO_2$$

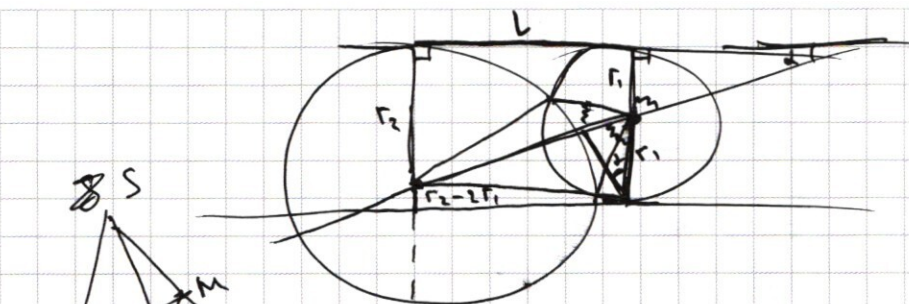
$$S_{BO,CO_2} = BL \cdot O_1O_2 = \cancel{BO_1} \cdot \frac{r_1}{\cos \alpha} \cdot O_2O_1 \cdot HB$$

$$\frac{HO_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{2\sqrt{4r_1r_2 - r_1^2}} = 3$$

$$r_1 =$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 147 \\ \hline 1029 \end{array}$$

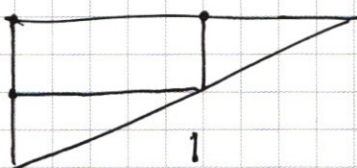
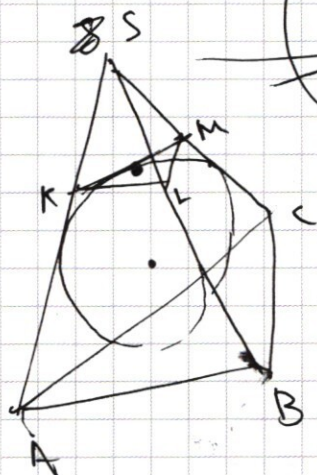
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$k^2 - 12k + 36$$

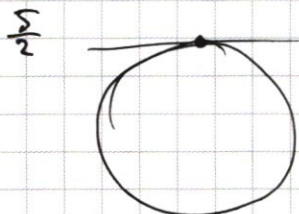
$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$= 6^2 - 36$$

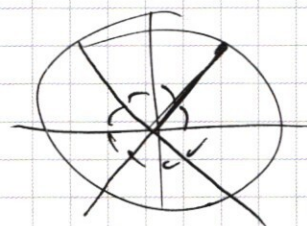
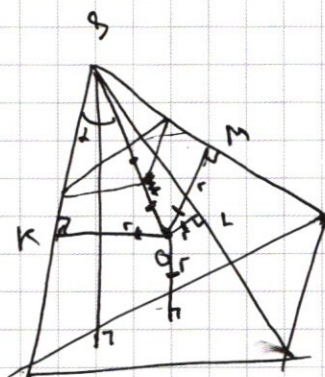
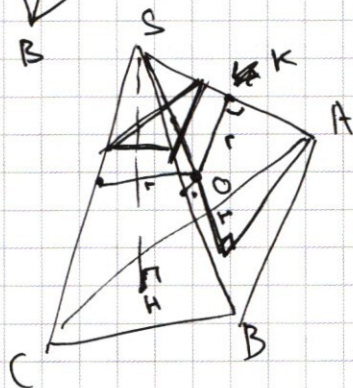
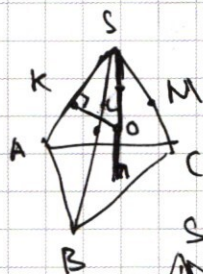


$$\begin{aligned} & \Gamma_2^2 - 2\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1^2 + \\ & 4\Gamma_1\Gamma_2 - 4\Gamma_1^2 \end{aligned}$$

3



$$\frac{ks}{os} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$



$$36.2 - 12.6$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

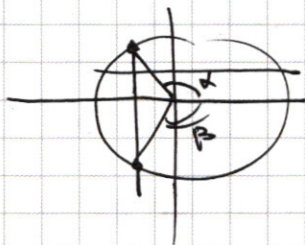
$$\begin{array}{r} 2 \\ 36 \\ 14 \\ \hline 1144 \\ 36 \\ \hline - 504 \end{array}$$

$$+600 - 72$$

$$\frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

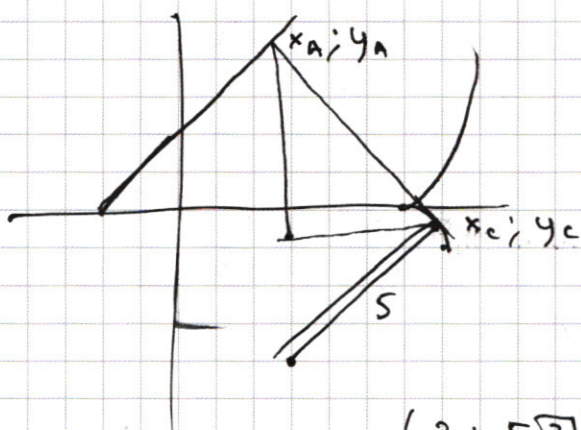
$$\cos 6x = \frac{\cos 7x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 7x}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 6x = \cos 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos(7x - \frac{\pi}{4})$$



$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = -\beta + 2\pi k \end{cases}$$



$$x_C - x_A = y_A - y_C$$

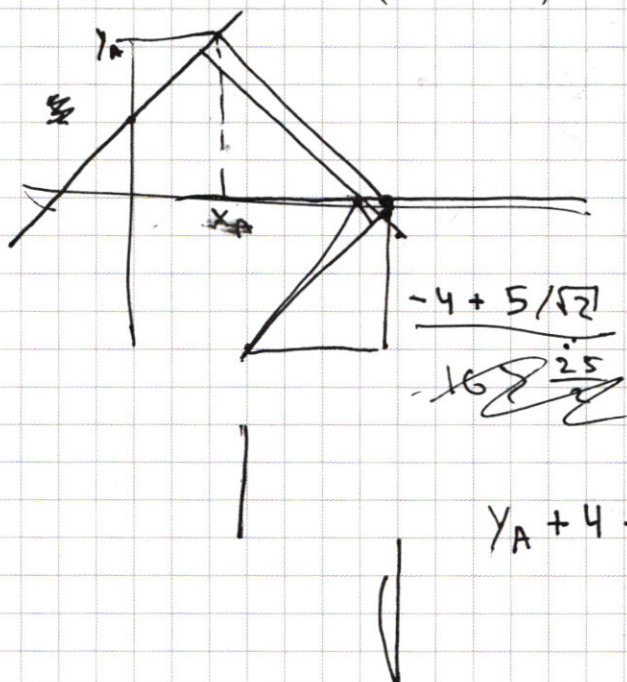
$$3 + \frac{5}{\sqrt{2}} - x_A = y_A + 4 - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$y_A = -x_A - 1 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y_A = x_A + 4$$

$$2y_A = 3 + 5\sqrt{2}$$

$$a = \left(\frac{3 + 5\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{9 + 30\sqrt{2} + 50}{4}$$



$$y_A + \frac{5}{\sqrt{2}} - 4 = 3 + 5\sqrt{2} - x_C - y_C - x_C$$

$$y_A = 7 - x_C - 4 + x_C$$

$$y_A = \frac{11}{2}$$

$$\frac{121}{4}$$

$$y_A + 4 -$$