

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

2V $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 75$

3V ОДЗ:

4V $x > 0$

5V $x \neq 1$

6V $x \geq 1$

7V $\log_3 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$4 \log_3 x \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\ln x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

ОДЗ: $x > 1$

попробуем подставить $x = 3$

$3^{\sqrt{\log_3 3}} - 13 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 3}} + 55 \cdot 3^{\frac{1}{\sqrt{\log_3 3}}} \leq 75$

$x = 3 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow \sqrt{\log_3 x} = 1$

$x^{\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}} = 3^{\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}}$

$3^{\sqrt{\log_3 x}} = 3^1 = 3$

$3^{\sqrt{\log_3 x}} = 3^1 = 3$

$3^{\sqrt{\log_3 x}} = 3^1 = 3$

$3^{\sqrt{\log_3 x}} = 3^1 = 3$

проверим значение:

$3^{\sqrt{\log_3 x}} = y$

$\log_3 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow y \geq 1$

$y^3 - 13y^2 + 55y - 75 \leq 0$

$27 - 117 + 165 - 75 \leq 0$

$165 - 117 = 48$

$48 - 75 = -27 \leq 0$

при $y = 3$ выполняется неравенство

9.

лучи θ пересекают

и лучи θ дуги III или дуги IV

и θ не пересекают дуги III и IV, а только θ'

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$, $x \geq 0$

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$

лучи θ пересекают дугу $x = 0$

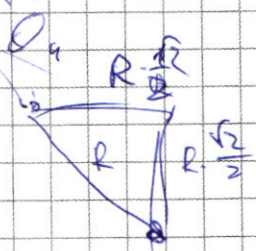
лучи θ пересекают дугу III и IV

лучи θ пересекают дугу III и IV

лучи θ пересекают дугу III и IV

лучи θ пересекают дугу III и IV

лучи θ пересекают дугу III и IV



$$5 - \frac{13\sqrt{2}}{2} > 2 - \left(12 + \frac{13\sqrt{2}}{2}\right)$$

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$

лучи θ пересекают дугу $y = 2 - x$

$$\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$$

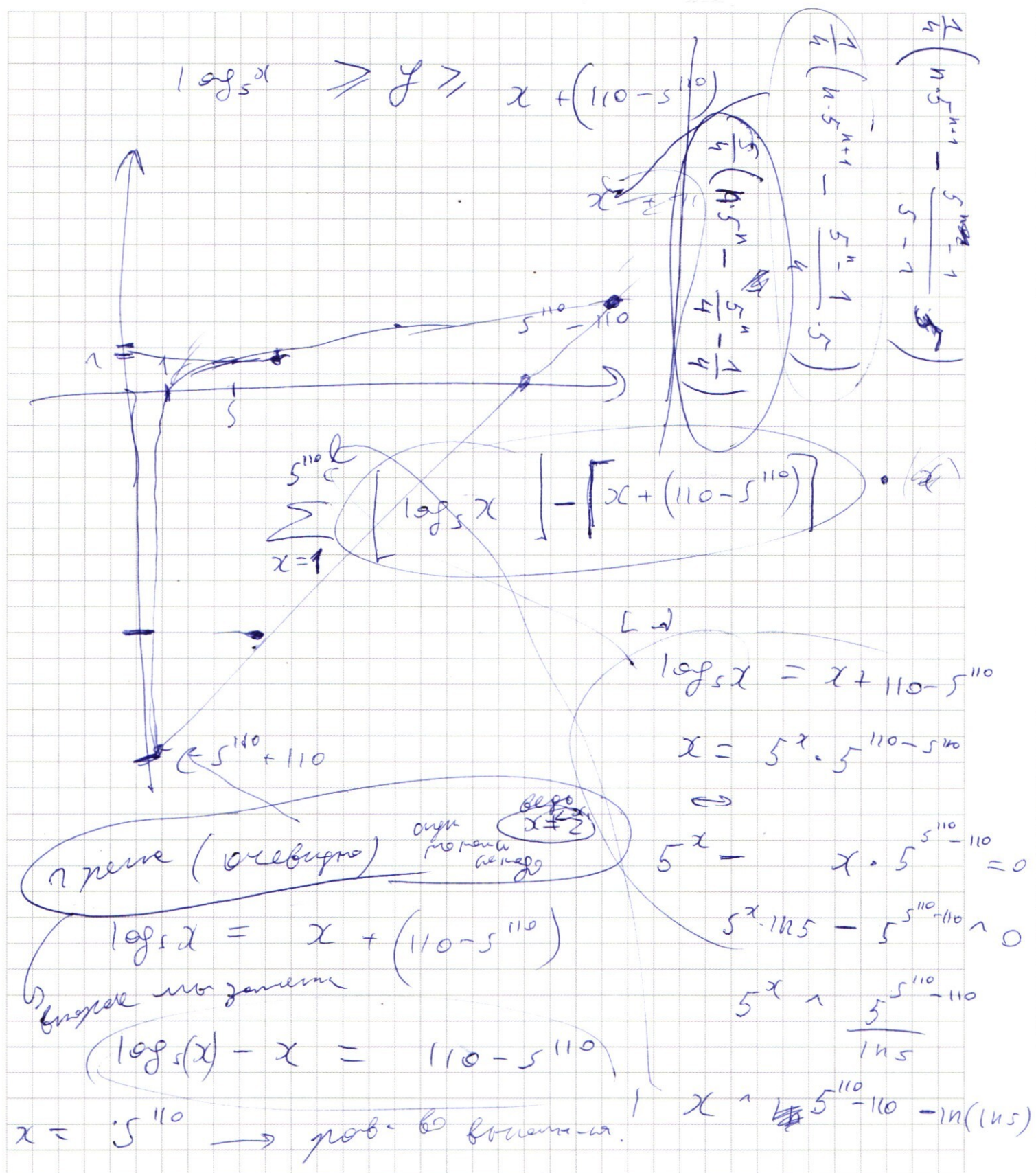
$$\theta = -|0 - b| + 2 - b$$

$$\theta = -|0 - b| + 2 - b$$

$$\theta = -b + 2 - b \Leftrightarrow 2b = 2$$

$$\theta = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$5^{110}$$

$$x=1$$

$$\lfloor \log_5 x \rfloor =$$

$$0 \quad [5^0; 5^1-1]$$

$$1 \quad [5^1; 5^2-1]$$

$$2 \quad [5^2; 5^3-1]$$

$$3 \quad [5^3; 5^4-1]$$

$$4 \quad [5^4; 5^5-1]$$

$$5 \quad [5^5; 5^6-1]$$

$$6 \quad [5^6; 5^7-1]$$

$$x \in 2$$

lepro

$$x + 110 - 5^{110}$$

more value

$$x + 110 - 5^{110}$$

$$\sum_{n=0}^{110}$$

$$5^{n+1} - 5^n$$

$$\lfloor \log_5 x \rfloor$$

$$n$$

x increases on all steps

$$1 \text{ to } 5^{110}$$

$$5$$

$$5 \leq 5$$

а мы же

затем

пох

$$x$$

more power

$$\begin{matrix} 5^n \\ 5^{n+1} & 5^{n+2} & \dots & 5^{n+1} \\ x = 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{matrix}$$

$$\log = n$$

$$\log = n+1$$

$$5^{n+1} - 1 - 5^n + 1$$

$$= 5^{n+1} - 5^n$$

$$5^n(5-1) = 4 \cdot 5^n$$

$$4 \cdot 5^n \cdot n$$

Сумма

$$\sum_{x=1}^{5^{110}} \lfloor \log_5 x \rfloor$$

$$\left(\sum_{x=1}^{5^{110}} x \right) + \sum_{x=1}^{5^{110}} (110 - 5^{110})$$

$$\sum_{n=0}^{110} 4 \cdot 5^n \cdot n$$

$$\left(\sum_{x=1}^{5^{110}} x \right) + \sum_{x=1}^{5^{110}} (110 - 5^{110})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. хлрнч.

61 pages
110 pages

for machine 61 pgs

61. μ z ymagen

(non oxygen
the bones)

Крошечный
косточек

س

1 2 3 4 ... 61 ... 100

(Kon-Bo-njo-on
nepe-mo
bo-pu-mo
bo-u-x
ne-pe-u
u-ke)

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{61} \cdot 1^{\text{sec} - 1}$$

Сделано по формуле
показано

$$\rightarrow i k = \left(\frac{1}{2}\right) 61$$

due to ~~thermal~~ transfer

My new - for the car
has made

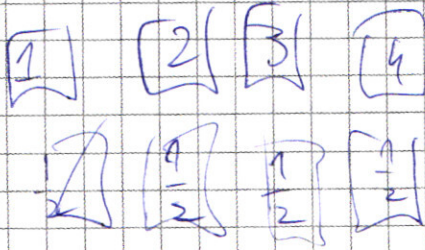
9

newer version 49
13

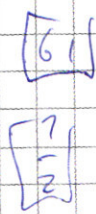
$\frac{6}{7}$ менъ башы
1-
 $110 - 42 = 68$
не менъ
 $\frac{1}{2} \cdot 62$

$q =$ ~~неповторяющийся~~
 $q =$ ~~неповторяющийся~~
 $\rightarrow 1 - q =$ ~~неповторяющийся~~
 $1 - q = \left(\frac{1}{2}\right)^{48}$ ~~неповторяющийся~~
 $q = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{48}$ ~~повторяющийся~~

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{61} = \left(\frac{1}{2}\right)^{62} \cdot 2$$

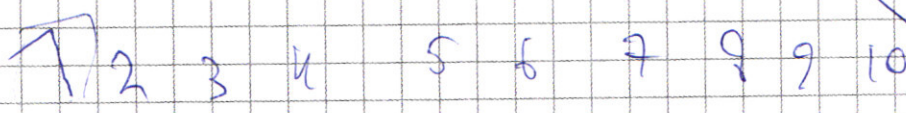


$$\frac{110!}{61!49!} = \frac{110}{2 \cdot 110}$$



(105-ком)
бопервом
разе

перен-ан



$$\frac{2 \cdot 61 \cdot 1^{49}}{110!}$$

$$\frac{110!}{110!} = 1$$



нам бо
первом
разе
наз
бо
разе

$$\frac{110!}{61!49!}$$

$$\frac{110!}{61!49!}$$

аще
нам бо
первом
разе

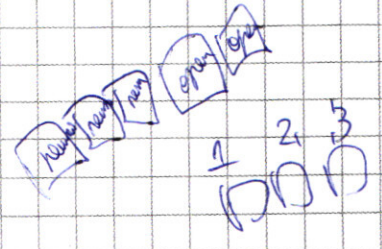
$$\frac{61!49!}{110!} \cdot 2 \cdot 61 \cdot 1^{49}$$

нам бо пер 61 разе

нам бо пер 61 разе

$$\frac{110!}{2 \cdot 110}$$

$$\frac{(2+6)!}{2!6!}$$



$$\frac{110!}{(61!49!)^{+a}}$$

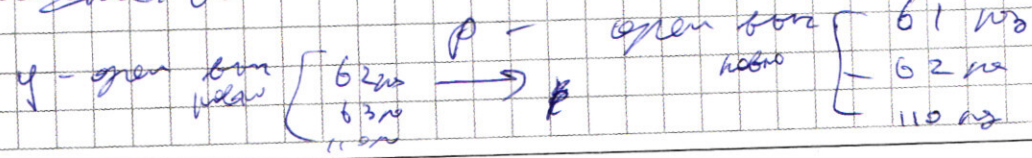
р-а
пер
возможн
на
61 разе

р пер не меньше 61 разе

р пер не меньше 61 разе

пер больше 61 разе

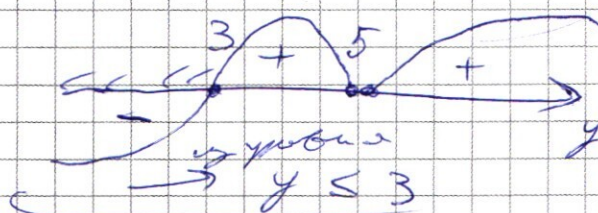
пер больше 61 разе



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3V \quad (y-3) \cdot (y^2 - 10y + 25) \leq 0$$

$$(y-3)(y-5)^2 \leq 0$$



→ $\varphi_3: 1 \leq \varphi \leq 3$

сумма

$$1 \leq 3 \sqrt{1937} \leq 3$$

m. l. 3^{er} Namen
 ne beginn en ~~mit~~ $x \in \mathbb{R}$
 () ~~u. $y \in \mathbb{R}$~~ ~~$y \in \mathbb{R}$~~ ~~$y \in \mathbb{R}$~~

$$0 \leq \sqrt{\log_2 x} \leq 1$$

12. $\frac{1}{2} \times 100 = 50$

$$- 0 \leq \log_2 x \leq 1$$

~~1. x mon~~
~~2. es ist $x \in (0, 1)$~~

$$1 \leq x \leq 3$$

$$k_0 \neq 1 (z \text{ on } \gamma)$$

$$x \in \mathbb{Q}[1/3]$$

Außen: $x \in (1, 3]$

$$19x = \frac{3\sqrt{4}}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{76} + \frac{2\pi k}{19}$$

$K \in \mathbb{R}$

$$\alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{4} + 2\sqrt{11}i$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} \quad k \in \mathbb{Z}$$

12.25 ~ 2.25 ~ 14.50 ~ 12.25
 2.25 ~ 14.50 ~ 12.25 ~ 2.25
 12.25 ~ 2.25 ~ 14.50 ~ 12.25

almost done

$$2^v \frac{\cos 14x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 14x (\cos 5x - \sin 5x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = -\sqrt{2}$$

Q103:

$$\begin{cases} \cos 5x + \sin 5x \neq 0 \\ \cos 5x - \sin 5x \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos 14x \cdot \cos 5x - \sin 14x \cdot \cos 5x = -\sqrt{2} \cdot \cos(10x)$$

$$\cos 14x \cdot \sin 5x + \sin 14x \cdot \sin 5x$$

$$\cos^2 5x - \sin^2 5x \neq 0 = \sin(5x - 14x) - \sqrt{2} \left(\frac{\sin(9x)}{2} + \frac{\cos(9x)}{2} \right)$$

$$\cos(10x) \neq 0$$

$$10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(-9x) = -\sin(9x)$$

$$+ \cos(9x) = \cos(9x) - \sin(9x) = -\sqrt{2} \cos(10x)$$

Вспомогательная формула:

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\sin \left(\frac{A}{2} \right) \cos \left(\frac{B}{2} \right) + \sin \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{A}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$-2 \left(\sin^2 \left(\frac{A}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{B}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{B}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right) \right)$$

$$(1 - \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right)) \cos^2 \left(\frac{B}{2} \right) - (1 - \cos^2 \left(\frac{B}{2} \right)) \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$= (1 - \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right)) \cos^2 \left(\frac{B}{2} \right) - (1 - \cos^2 \left(\frac{B}{2} \right)) \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$= \cos^2 \left(\frac{B}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right) = \cos^2 \left(\frac{B}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$- \sqrt{2} \left(\sin \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \cos(10x)$$

$$\sin \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos(10x)$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - 9x + \frac{\pi}{4} \right)$$

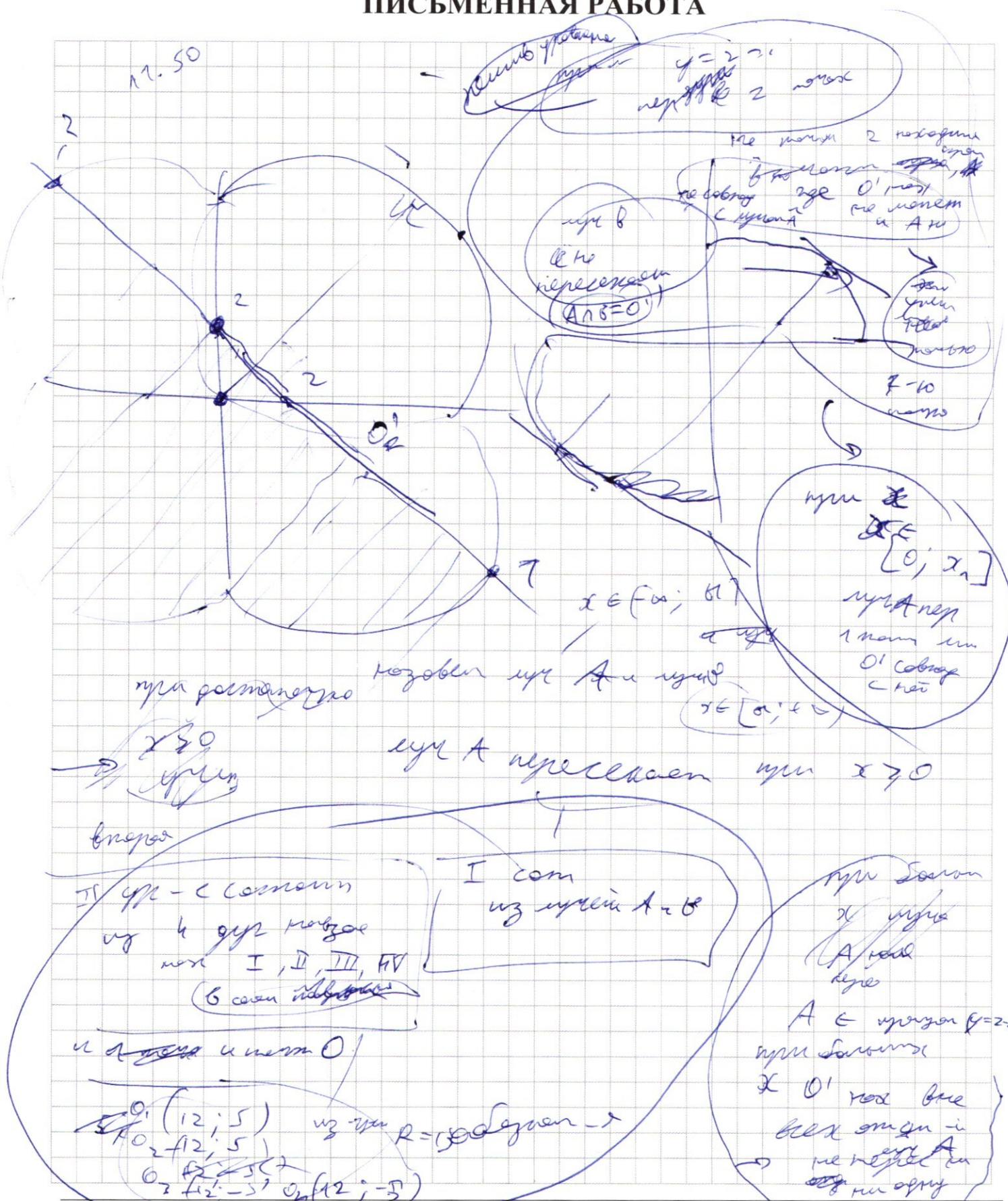
$$= \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 9x \right)$$

$$= \cos(10x)$$

$$\cos(10x) - \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 9x \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{x + \frac{3\pi}{8}}{2} \right) \cdot \sin \left(8x - \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



baffled
 King
 organizing
 Hallelujah!
 Glati
 $s^2 + s^3 + s^4 + \dots$

$$\left(\frac{5^{110} \cdot (5^{110} + 1)}{2} + (110 - 5^{110}) \cdot 5^{110} \right)$$

Handwritten mathematical expressions for nested summations:

- Left expression: $\sum_{k=1}^n$
- Right expression: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i$

$$m = 2 - K \text{ раз}$$

$$\sum_{n=1}^{110} 5^n \cdot n = ?$$

↔
neighbor
was $n=0$
→ id

$$= \frac{5}{4} \left(64 \cdot 5^n - \frac{5^{n+1} - 1}{4} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=0}^{n-k} 5^{m+k} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n 5^k \left(\sum_{m=0}^{n-k} 5^m \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n 5^k \cdot \left(\frac{5^{(n-k)+1} - 1}{5 - 1} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n 5^k \cdot \left(\frac{5^{(n-k)+1} - 1}{4} \right)$$

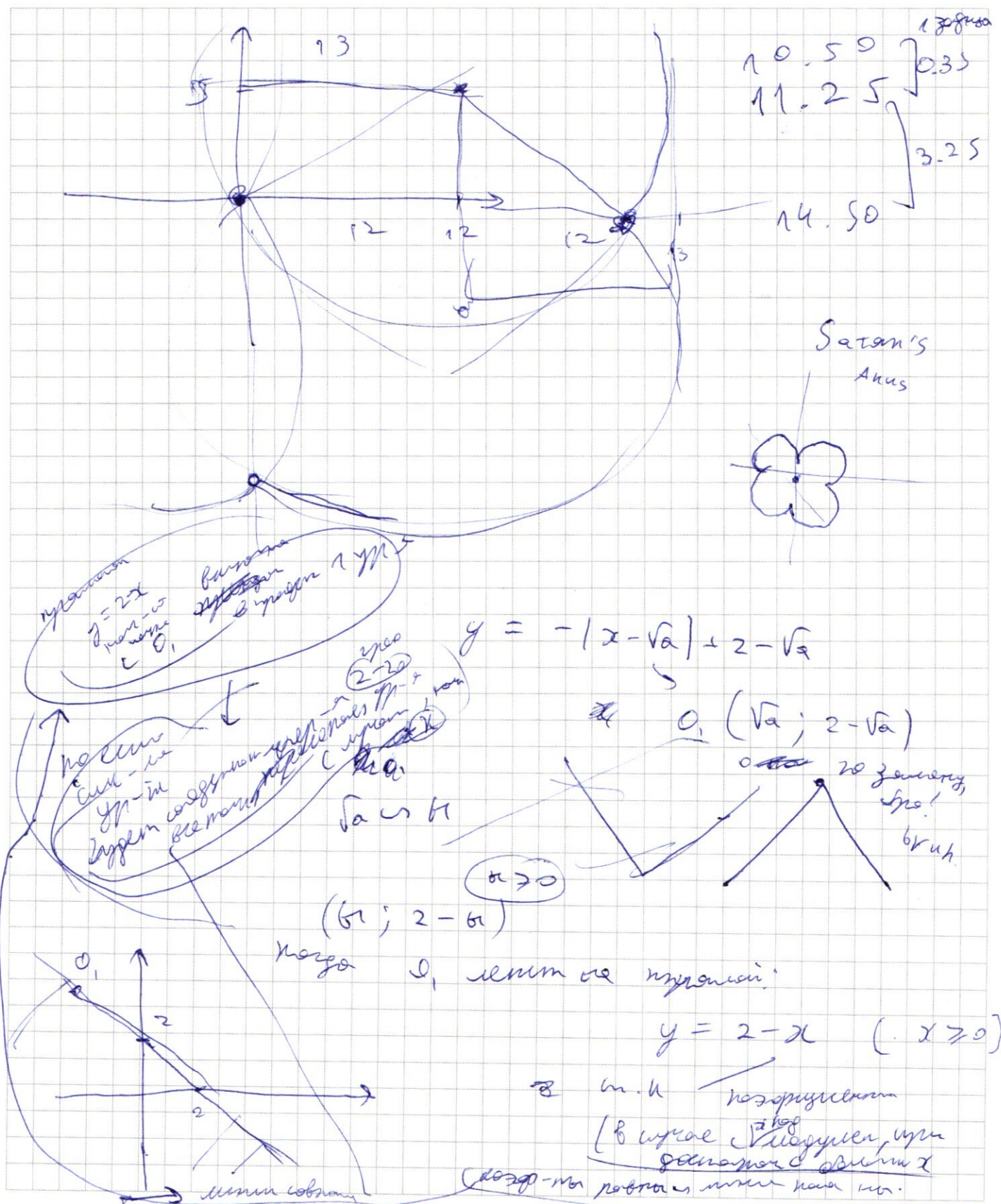
$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^n 5^k \cdot \left(5^{(n-k)+1} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} (5^{n+1} - 5^n)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} 5^k \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(n \cdot 5^{n+1} - \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \right) = \frac{5}{4} \left(n \cdot 5^n - \sum_{k=0}^{n-1} 5^k \right) \cdot 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. ~~8?~~
2. V
3. V
4. 0
5. V
6. V
7. 0

$BD = 4$

$AP \perp AB$ $AB = 2r$
 $AD = 2\sqrt{r} \cdot \sqrt{R-r}$

$PD = \sqrt{AD^2 + AB^2}$
 $PD = \sqrt{4r^2 + 4r(R-r)}$
 $PD = \sqrt{4r^2 + 4rR - 4r^2}$
 $PD = \sqrt{4rR}$
 $PD = 2\sqrt{Rr} = 4$
 $\sqrt{Rr} = 2$
 $Rr = 4$
 $R = \frac{4}{r}$

$5 \left(\left(110 - \frac{1}{4} \right) 5^{110} + \frac{1}{4} \right)$

$5^{220} - \frac{5^{110}}{2} - \frac{110 \cdot 5^{110}}{2}$

$5^{220} + \frac{5^{110}}{2}$

$5 \left(\left(110 - \frac{1}{4} \right) 5^{110} + \frac{1}{4} \right)$

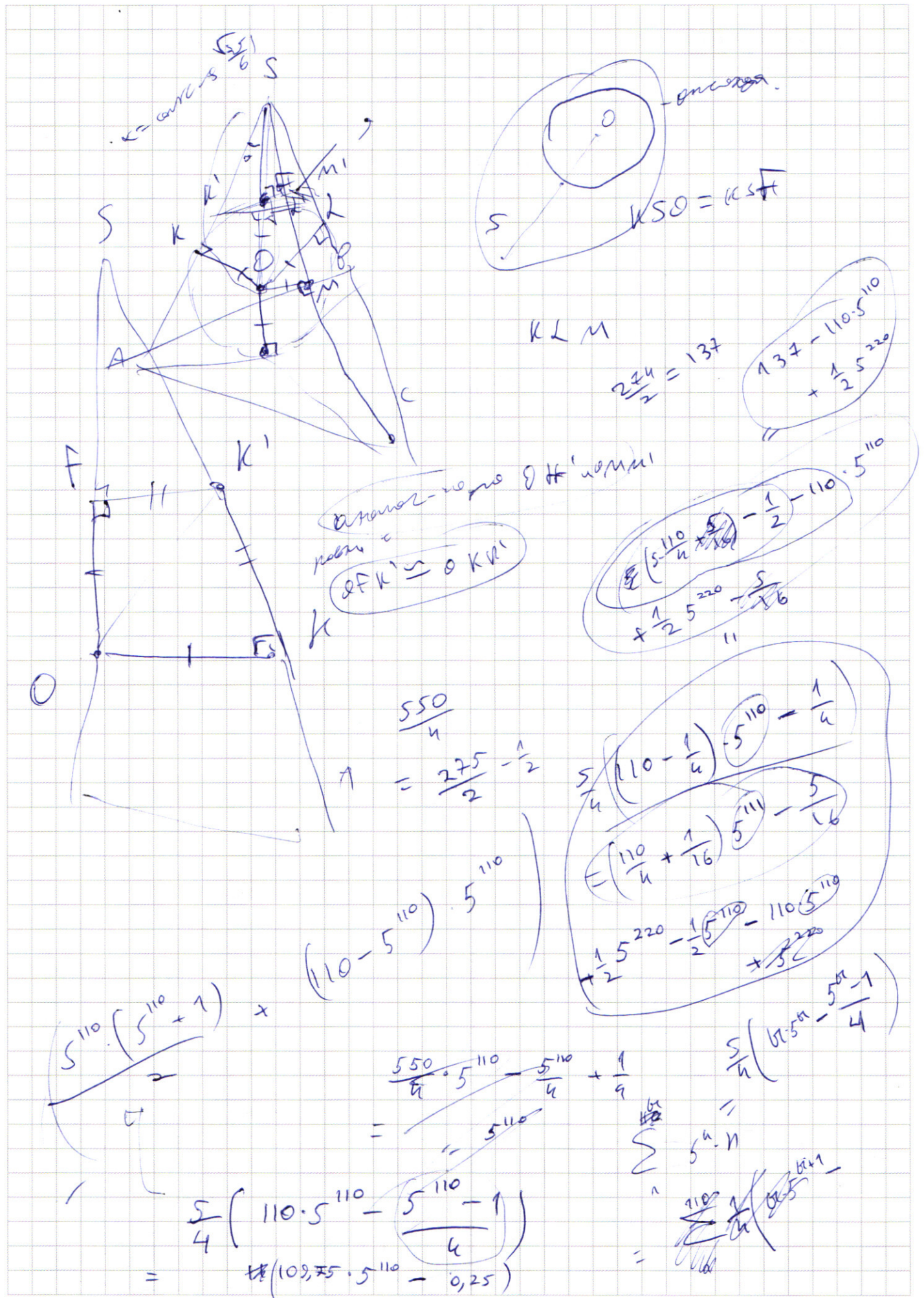
$5 \left(\left(110 - \frac{5}{4} \right) 5^{110} + \frac{5}{4} \right)$

$5^{220} - \frac{5^{110}}{2} - 110 \cdot 5^{110}$

$5^{220} + \left(440 - \frac{3}{4} \right) 5^{110} + \frac{5}{4}$

$5^{220} + \left(\frac{1}{2} \right) 5^{220} + (439,25) \cdot 5^{110} + 1,25$

$7r^2 = 64$
 $r^2 = \frac{64}{7}$
 $r = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$
 $R = 7r = 8\sqrt{7}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. *сумма вероятностей*

$P \sim$ *вероятность* *подраз?*
или просто
вероятность до n-символа бинар?

$\square \square \square$
1 2 3 ...

$\square$
61

61 раз по 61

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots$$

$$\times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{61} = P$$

$P \square \times \dots$
1 2 3 ...

$\square$
49

вероятность 49 раз
 $\downarrow$
 $\frac{1}{2}$
вероятность 49 раз
по нашей схеме:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \dots$$

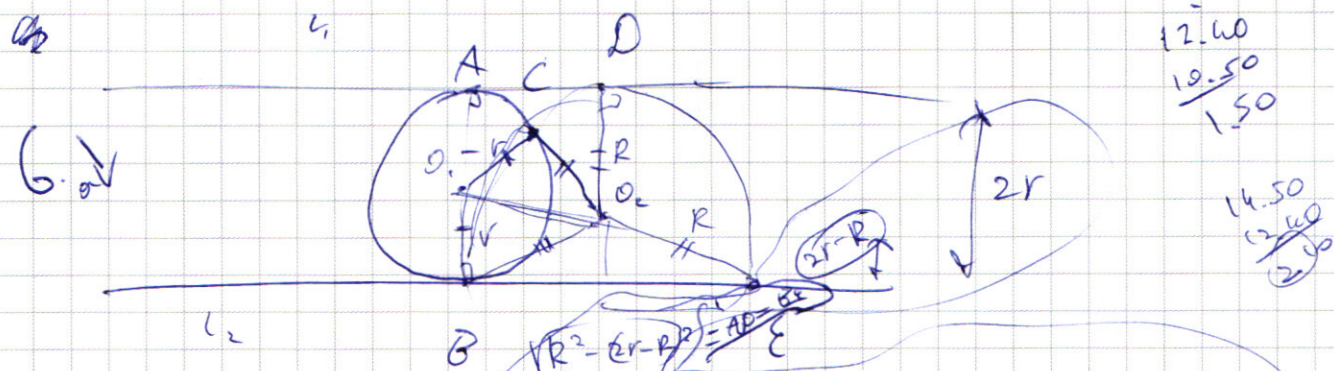
$$\frac{1}{2}$$

$$= 1 - q = \left(\frac{1}{2}\right)^{49}$$

так что?

$$q = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{49}$$

$$P - q = \left(\frac{1}{2}\right)^{61} + \left(\frac{1}{2}\right)^{49} - 1$$



12.60
19.50
1.50

14.50
12.60
1.90

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = 4$$

Заметим что $CO_1O_2 \cong BO_1O_2$
 $CO_1 = BO_1$
 $CO_2 = BO_2$
 O_1O_2 - общий

то 3 стороны

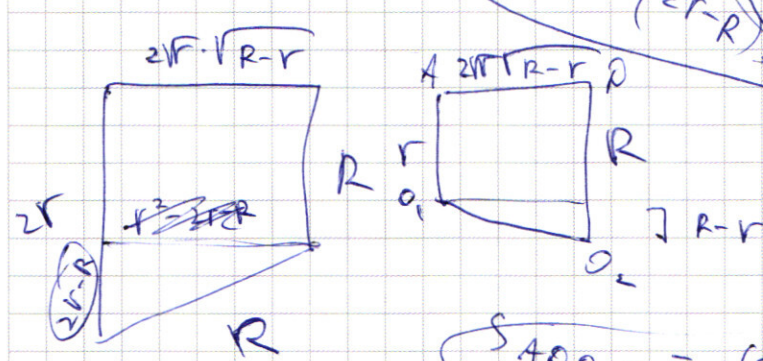
$$S_{CO_1O_2} = S_{BO_1O_2}$$

$$S_{BO_1CO_2} = 2 S_{CO_1O_2} = 2 \cdot S_{BO_1O_2}$$

$$\frac{S_{BO_1O_2}}{S_{O_2BE}} = 2$$

need:

$$\frac{R}{r} = ?$$



$$S_{AO_2O_1} = \left(\frac{r+R}{2}\right) \cdot 2r\sqrt{R-r} = r\sqrt{R-r} \cdot (R+r)$$

$$S_{AO_2B} = \left(\frac{2r+R}{2}\right) \cdot 2r\sqrt{R-r}$$

$$= r\sqrt{R-r}(2r+R)$$

$$S_{O_1O_2B} = S_{AO_2B} - S_{AO_2O_1}$$

$$= r\sqrt{R-r} \cdot (2r+R) - r\sqrt{R-r} \cdot (R+r)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{O_1O_2}}{S_{O_2BE}} = \frac{r\sqrt{R-r}}{r\sqrt{R-r}(2r-R)} = 2$$

$$\Rightarrow V = 4(2r-R) \Leftrightarrow V = 8r - R$$

$$\Leftrightarrow R = 7r \Leftrightarrow \frac{R}{r} = 7$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $y = 3^{\sqrt{\log_3 x}} \rightarrow$

$$y \in (0; 3] \cup \{5\} \Leftrightarrow \sqrt{\log_3 x} \in (-\infty; 1] \cup \{\log_3 5\}$$

с учетом ОДЗ $\rightarrow \sqrt{\log_3 x} \in [0; 1] \cup \{\log_3 5\}$

$$\begin{matrix} (x)^2 \nearrow \\ \leftarrow \end{matrix} \log_3 x \in [0; 1] \cup \{(\log_3 5)^2\}$$

$$\begin{matrix} 3^x \nearrow \\ \leftarrow \end{matrix} x \in [1; 3] \cup \{3^{(\log_3 5)^2}\}$$

Ответ: $x \in [1; 3] \cup \{5^{\log_3 5}\}$

2.

$$\frac{\cos 14x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin(14x)}{\cos^2 5x - \sin^2 5x}$$

$$\frac{(\cos 5x - \sin 5x)}{=} = -\sqrt{2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x \neq 0 \\ \sin 5x + \cos 5x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 10x - \sin^2 5x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 10x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z}$$

Заметим:

$$\frac{\cos 14x \cdot \cos 5x + \cos 14x \cdot \sin 5x - \sin(14x) \cdot \cos 5x}{\cos 10x}$$

$$+ \frac{\sin(14x) \cdot \sin 5x}{=} = -\sqrt{2}$$

3

$$\longleftrightarrow \cos(14x - 5x) + \sin(5x - 14x) = -\sqrt{2} \cos(10x)$$

$$= \cos(9x) - \sin(9x) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(9x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(9x) \right)$$

$$= -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(9x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(9x) \right) = -\sqrt{2} \cdot \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \cos(10x) \longleftrightarrow \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(10x)$$

$$\longleftrightarrow \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right)$$

$$\longleftrightarrow \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) = 0$$

$$\longleftrightarrow 2 \sin\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 10x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 10x}{2}\right) = 0$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} \sin\left(8,5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \longleftrightarrow 8,5x - \frac{\pi}{4} = \pi k \\ \cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) = 0 \longleftrightarrow -0,5x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow 8,5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \longleftrightarrow 17x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \longleftrightarrow x = \frac{\pi}{38} + \frac{2\pi k}{19}$$

$$\longleftrightarrow 0,5x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \longleftrightarrow x - \frac{3\pi}{2} = \pi + 2\pi k$$

$$\longleftrightarrow x = \frac{5\pi}{2} + 2\pi k \longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{38} + \frac{2\pi k}{19}$

$$\text{и } x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

r - радиус ω_1
 R - радиус ω_2

$$CO_1O_2 \sim BO_1O_2$$

по 3 сторонам

$$CO_1 = BO_1$$

$$CO_2 = BO_2$$

O_1O_2 - общий

$$\rightarrow S_{CO_1O_2} = S_{BO_1O_2}$$

$$\rightarrow \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = 4 \Leftrightarrow \frac{S_{BO_1O_2}}{S_{O_2BE}} = 2$$

$$S_{BO_1O_2} = S_{AO_1BO_2} - S_{AO_2BO_1}$$

$$AO_1 \parallel BO_2 \rightarrow S_{AO_1BO_2} = (2r + R) \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \quad AO = BE \cdot \frac{1}{2} = BH$$

$$= \sqrt{O_2E^2 - O_2H^2} = \sqrt{R^2 - (2r - R)^2} = \sqrt{R^2 - R^2 - 4r^2 + 4rR}$$

(здесь $H \in BE$, $O_2H \perp BE$)

$$= 2\sqrt{R-r} \cdot \sqrt{r} \rightarrow S_{AO_1BO_2} = (2r + R) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{R-r} \cdot \sqrt{r} \cdot 2$$

$$= (2r + R) \sqrt{R-r} \cdot \sqrt{r} \quad S_{AO_2BO_1} = \frac{r+R}{2} \cdot AO = \frac{r+R}{2} \cdot BH = \frac{r+R}{2}$$

$$\cdot 2\sqrt{R-r} \cdot \sqrt{r} = (R+r) \sqrt{R-r} \sqrt{r}$$

$$S_{BO_2E} = \frac{1}{2} \cdot O_2H \cdot BE = \frac{1}{2} (2r - R) \cdot 4\sqrt{R-r} \sqrt{r}$$

$$= 2(2r - R) \sqrt{R-r} \sqrt{r} \rightarrow S_{BO_1O_2} = (2r + R) \sqrt{R-r} \sqrt{r}$$

$$- (R+r) \sqrt{R-r} \sqrt{r} = r \sqrt{r} \sqrt{R-r} \rightarrow \frac{S_{BO_1O_2}}{S_{O_2BE}} = 2 =$$

$$= \frac{r \sqrt{r} \sqrt{R-r}}{2(2r - R) \sqrt{R-r} \sqrt{r}} = \frac{r}{2(2r - R)} = 2 \Leftrightarrow r = 8r - 4R \Leftrightarrow R = \frac{7r}{4}$$

6. а) Ответ: $R = \frac{7}{4}r$

б) $BD = 4$, $AD \perp AB$, $AD = 2r$

$$AD = 2\sqrt{r} \cdot \sqrt{R-r}$$

$$\rightarrow BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{4r^2 + 4r(R-r)} = \sqrt{4Rr} = 4 \Leftrightarrow Rr = 4$$

$$R = \frac{7}{4}r \rightarrow Rr = \frac{7}{4}r^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 = \frac{16}{7}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} \rightarrow R = \frac{7}{4} \cdot \frac{4\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}$$

б) Ответ: $r = \frac{4\sqrt{7}}{7}$, $R = \sqrt{7}$

3.

$$27 \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_3 x}} - 75 \leq 0$$

ОДЗ:

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$x > 1$$

$$\log_3 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\log_3 x > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

С учетом ОДЗ равенство преобразуется:

$$\log_3 x \cdot \sqrt{\log_3 x} = \log_3 x \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \sqrt{\log_3 x}$$

$$\left(3^{\sqrt{\log_3 x}}\right)^3 - 13 \cdot \left(3^{\sqrt{\log_3 x}}\right)^2 + 55 \cdot 3^{\frac{\log_3 x \cdot \sqrt{\log_3 x}}{\sqrt{\log_3 x}}} - 75 \leq 0$$

$$\left(3^{\sqrt{\log_3 x}}\right)^3 - 13 \left(3^{\sqrt{\log_3 x}}\right)^2 + 55 \cdot \left(3^{\sqrt{\log_3 x}}\right) - 75 \leq 0$$

$$3^{\sqrt{\log_3 x}} = y, y > 0$$

$$y^3 - 13y^2 + 55y - 75 \leq 0$$

Заметим: $y = 3$ является решением

$$\rightarrow (y-3)(y-5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y \in (0; 3] \cup \{5\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 7. \quad \sum_{n=1}^k 5^n \cdot n &= \sum_{n=1}^k \sum_{i=n}^k 5^i \quad (i=n) \\
 &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=0}^{k-n} 5^{m+n} = \sum_{n=1}^k 5^n \left(\sum_{m=0}^{k-n} 5^m \right) = \\
 &= \sum_{n=1}^k 5^n \cdot \frac{5^{k-n+1} - 1}{5 - 1} = \sum_{n=1}^k \frac{5^{k+1} - 5^n}{4} = \frac{5}{4} \sum_{n=1}^k 5^k - 5^{n-1} \\
 &= \frac{5}{4} \left(\left(\sum_{n=1}^k 5^k \right) - \left(\sum_{n=1}^k 5^{n-1} \right) \right) = \frac{5}{4} \left(k 5^k - \sum_{n=0}^{k-1} 5^n \right) \\
 &= \frac{5}{4} \left(k 5^k - \frac{5^k - 1}{5 - 1} \right) = \frac{5}{4} \left(k \cdot 5^k - \frac{1}{4} 5^k + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4} \left(\left(k - \frac{1}{4} \right) 5^k + \frac{1}{4} \right) \\
 \text{Итак:} \quad \sum_{x=1}^{110} \lfloor \log_5 x \rfloor &= 110 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{109} 5^n \cdot n \\
 &= 110 + 4 \left(\frac{5}{4} \left(\left(109 - \frac{1}{4} \right) 5^{109} + \frac{1}{4} \right) \right) = 110 + 5 \left(\left(109 - \frac{1}{4} \right) 5^{109} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= 110 + \left(109 - \frac{1}{4} \right) 5^{110} + \frac{5}{4} \quad \text{Далее, искомая сумма} \\
 \text{равна:} \quad &110 + \left(109 - \frac{1}{4} \right) 5^{110} + \frac{5}{4} = \frac{5^{220}}{2} - \frac{5^{110}}{2} + 5^{220} - 110 \cdot 5^{110} \\
 &= 110 + \frac{5}{4} + \left(109 - \frac{1}{4} \right) 5^{110} - \frac{1}{2} \cdot 5^{110} - 110 \cdot 5^{110} + \frac{1}{2} 5^{220} = \\
 &= 111,25 + \left(-1 - \frac{3}{4} \right) 5^{110} + \frac{1}{2} \cdot 5^{220} = \frac{1}{2} \cdot 5^{220} - 1,75 \cdot 5^{110} + 111,25
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2} 5^{220} - 1,75 \cdot 5^{110} + 111,25$

5.

По 2-м уравнению $\ln y = f$ находим
лог зн. модуля $\rightarrow$ его график строится
относительно Ox и Oy . Без знаков модуля
уравнение выражает окружность с
центром в $O_4(12; 5)$ и $R = 13$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$x + 110 - 5^{110} \leq y \leq \log_5 x \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

РРЗ: $x > 0$ При $x = 1$ $\log_5 x > 0$

$x + 110 - 5^{110}$ пересекает Oy , а Oy — вертикальная асимптота $\log_5 x$
в точке $x \rightarrow 0^+$ $\rightarrow$ 1-е решение уравнения

$$\log_5 x = x + 110 - 5^{110}$$

находится на интервале $x \in (0, 1)$

Решений уравнения может быть всего 2 т.к.

с учетом $x > 0$

$$\log_5 x \geq x + 110 - 5^{110}$$

$$x \geq 5^x - 5^{110} - 5^{110}$$

$$\iff 5^x \cdot 5^{110} - 5^{110} - x \leq 0$$

$$\iff 5^x - \frac{1}{5^{110-5^{110}}} \cdot x \leq 0$$

А эта функция непрерывна на $x > 0$

и имеет максимум в точке $x =$

$$\left(5^x - \frac{1}{5^{110-5^{110}}} \cdot x \right)' = \ln 5 \cdot 5^x - \frac{1}{5^{110-5^{110}}} \leq 0$$

$$\iff 5^x \ln 5 \leq \frac{1}{5^{110-5^{110}}} = \frac{5^{5^{110}-110}}{\ln 5} \in (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow x \leq \log_5 \left(\frac{5^{5^{110}-110}}{\ln 5} \right) = 5^{110} - 110 - \log_5(\ln 5)$$

имеется еще одно и только одно решение уравнения

7. (т.е. ~~нужная~~ точка, в которой неравенство выполнено). Далее заметим, что неравенство выполняется в точке $x = 5^{110}$.

$$\log_5(5^{110}) = 110 + 5^{110} - 5^{110} = 110$$

Итак, для пар целых чисел (т.е. точек в координатах $x, y \in \mathbb{Z}$) посчитаем по формуле:

$$\sum_{x=1}^{5^{110}} \lfloor \log_5 x \rfloor = \lfloor x - 5^{110} + 110 \rfloor$$

т.е. для каждой целочисленной абсциссы (x) будут посчитаны кол-во всех целочисленных ординат (y) , удовлетворяющих неравенству.

$$\forall x \in \mathbb{Z} \rightarrow x - 5^{110} + 110 \in \mathbb{Z}$$

Значит

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{5^{110}} \lfloor \log_5 x \rfloor = \lfloor x - 5^{110} + 110 \rfloor \\ & = \sum_{x=1}^{5^{110}} \lfloor \log_5 x \rfloor = \left(\sum_{x=1}^{5^{110}} x \right) + 5^{110} (5^{110} + 110) \\ & = \sum_{x=1}^{5^{110}} \lfloor \log_5 x \rfloor = \frac{5^{110} (5^{110} + 1)}{2} + 5^{220} - 110 \cdot 5^{110} \end{aligned}$$

Заметим, что $\lfloor \log_5 x \rfloor =$

- 0, $x \in (0; 5)$ (4 целых абсциссы)
- 1, $x \in [5; 25)$ (25-5) целых абсцисс
- 2, $x \in [25; 125)$ (125-25) целых абсцисс
- 3, $x \in [125; 625)$ (625-125) целых абсцисс
- $\dots$
- 109, $x \in [5^{109}; 5^{110})$ ($5^{110} - 5^{109}$) целых абсцисс
- 110, $x \in [5^{110}; 5^{111})$ ($5^{111} - 5^{110}$) целых абсцисс

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum_{x=1}^{5^{110}} \lfloor \log_5 x \rfloor &= 110 + \sum_{n=0}^{109} (5^{n+1} - 5^n) \cdot n = 4 \sum_{n=1}^{109} 5^n \cdot n \end{aligned}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

20011267

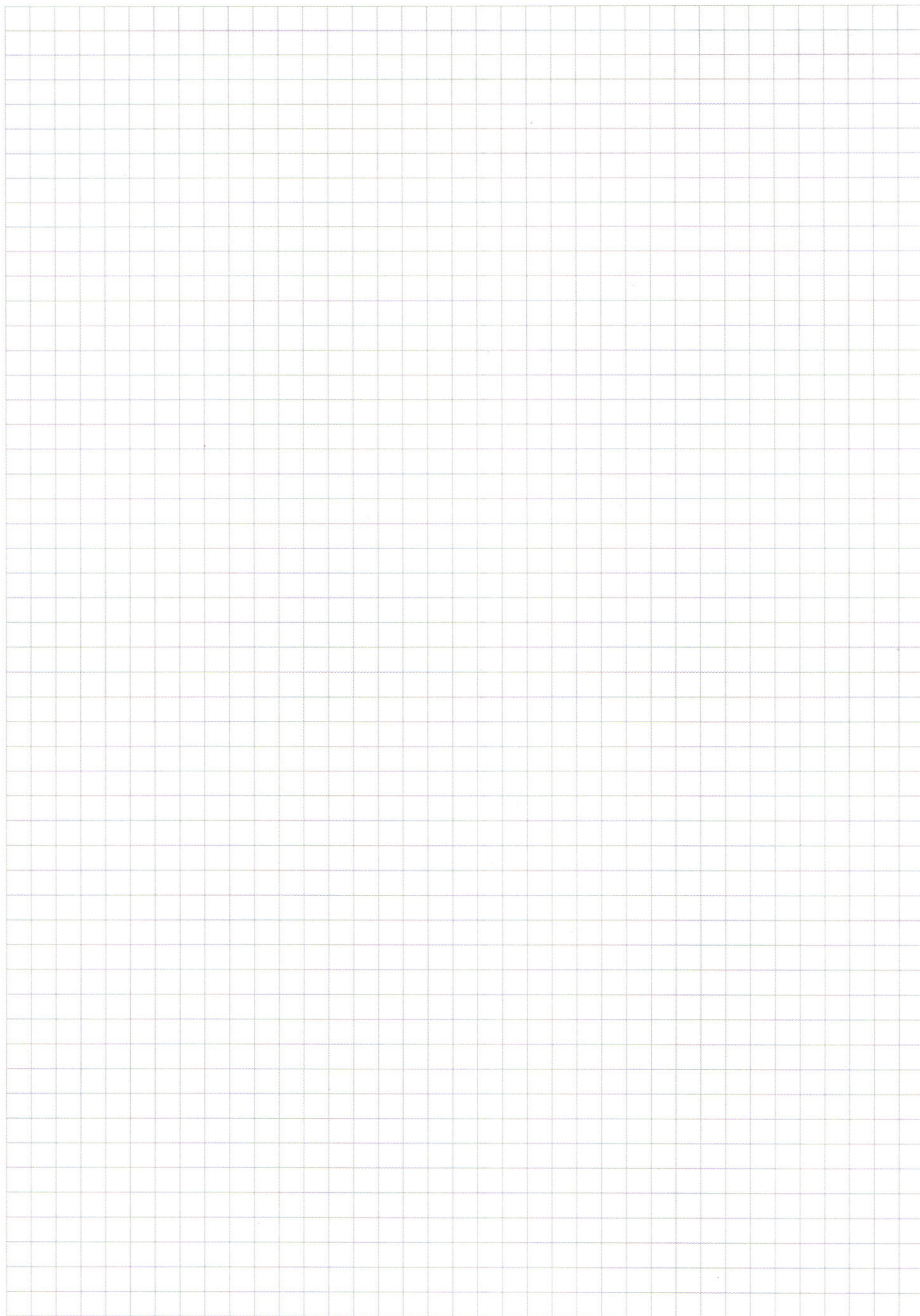
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

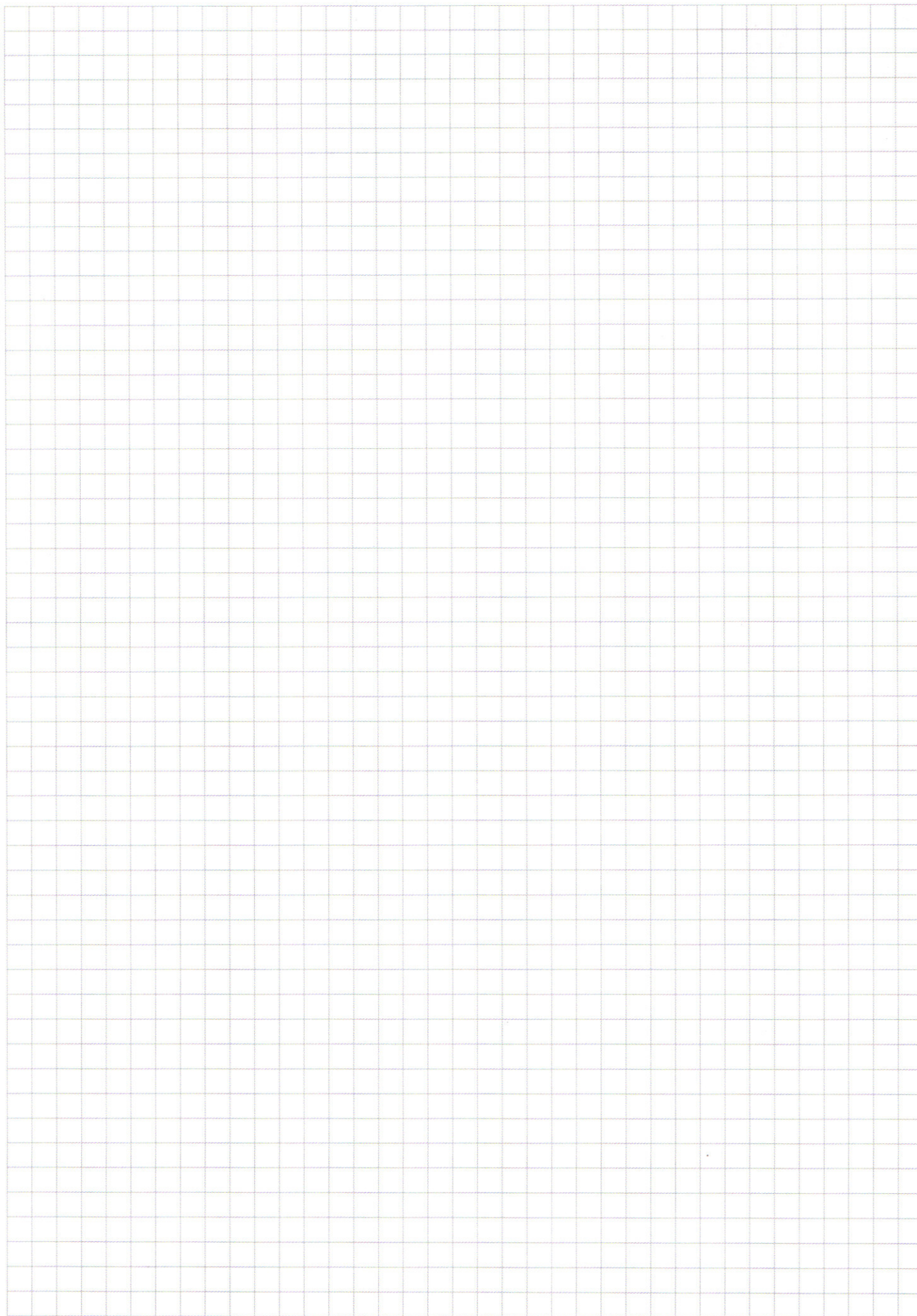
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)