

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_2 x} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках V и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Если орел выпадает больше 42 раз, это означает, что решка выпала меньше 28 раз. $\Rightarrow$ вероятности этих событий равны.

П.к. вероятность выпадения решки меньше 28 раз = вероятности выпадения орла меньше 28 раз (п.к. они равнозначны), то вероятность выпадения орла больше 42 раз = вероятности выпадения орла меньше 28 раз. Тогда $p = q'$. $q = q' + \text{вероятность выпадения орла ровно 28 раз, которая равна } t$.
 $p = q' \Rightarrow q = p + t$, $p - q = -t$.

~~Вероятность выпадения орла больше 42 раз = вероятности выпадения орла меньше 28 раз~~
~~Вероятность выпадения орла меньше 28 раз = вероятности выпадения орла больше 42 раз~~
 ~~$t = \frac{70!}{2^{70} \cdot 42!}$~~

Очевидно, что при этом количестве 2^{70} , вероятности выпадения 28 раз будет $\frac{70!}{2^{70} \cdot 42!}$.

$$t = \frac{70!}{2^{70} \cdot 42!}; \text{ Ответ: } p - q = -\frac{70!}{2^{70} \cdot 42!}$$

3

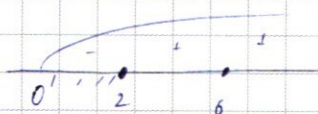
$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72; \quad x^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\log_2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$$

$$2^{3 \sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{2 \sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 72 \leq 0$$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = t, \quad t > 0;$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0, \text{ раскладываем по корням:}$$

$$\begin{cases} (t-2)(t-6)^2 \leq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$



$$t \in (0, 2] \cup \{6\}$$

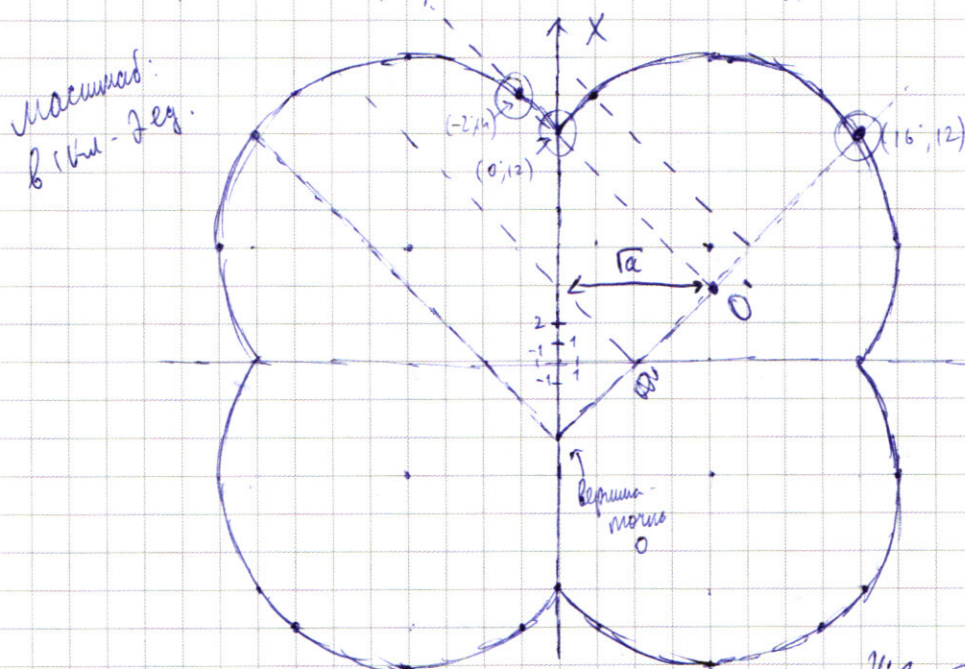
$$2^{\sqrt{\log_2 x}} \in (0, 2] \cup \{6\} \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in (0, 1] \cup \{\log_2 6\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (1, 2] \cup \{6^{\log_2 6}\}. \text{ Ответ: } x \in (1, 2] \cup \{6^{\log_2 6}\}$$

5

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 & (1) \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 & (2) \end{cases}$$

Построим 2 уравнения в осях $x(y)$:



Из рисунка видно, что единственное решение, найденное 3 корнем тогда, когда O' имеет координаты $(8; 4)$ в осях $x(y)$.

Из рисунка видно, что единственное решение, найденное 3 корнем тогда, когда O' имеет координаты $(8; 4)$ в осях $x(y)$.

Т.к. точка $(16; 12)$ будет при любых O' , при которых вершина, а 2 оставшихся точки очевидно $(0; 12)$ и $(-2; 14)$; $\Rightarrow \sqrt{a} = 8 \Rightarrow a = 64$

Ответ: $a = 64$

$$2. \frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cdot (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x \cdot (\cos 3x - \sin 3x)}{(\cos 3x - \sin 3x)(\cos 3x + \sin 3x)} = \sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sin 7x + \cos 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4})}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos(7x - \frac{\pi}{4})}{\cos 6x} = 1$$

$$\begin{cases} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 6x \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

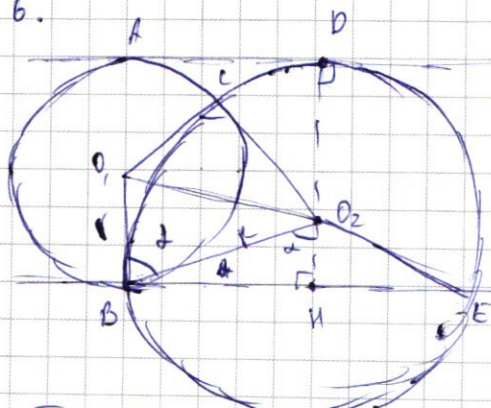
$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi n}{13}, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi n}{13}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi n}{13}, n \in \mathbb{Z}$.

6.



$AB \perp l_1$
 $DE \perp l_2$
 $l_1 \parallel l_2$
 $\Rightarrow AB \parallel DE$

$AB = 2r$, r - радиус ω_1 .

$DE = O_2H + R$, R - радиус ω_2

$AB = DE$, так как перпендикуляры
к параллельным прямым l_1 и l_2 .

$$O_2H = 2r - R$$

Так как $O_1O_2H = 2$, тогда $O_1B = 2$, так как касательная перпендикулярна радиусу.

$$S_{BO_2E} = BO_2 \cdot O_2H \cdot \sin \alpha = R(2r - R) \sin \alpha$$

$$BH = \sqrt{R^2 - (2r - R)^2} = \sqrt{R^2 - 4r^2 + 4rR} = 2\sqrt{rR - r^2}$$

$$S_{BO_2E} = BH \cdot O_2H = 2\sqrt{rR - r^2} (2r - R)$$

$$S_{BO_2E} = BO_2 \cdot \sin \alpha \cdot O_2H = R(2r - R) \sin \alpha$$

$$\cos \angle = \frac{O_2 B}{O_2 A} = \frac{2r - R}{R}$$

$$O_1 O_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2 \cdot \frac{2r - R}{R} \cdot r R} \quad \text{— теорема косинусов}$$

$$O_1 O_2 = \sqrt{r^2 + R^2 - 4r^2 + 2rR} = \sqrt{(r+R)^2 - 4r^2}$$

$S_{O_1 O_2 B} = \triangle O_1 O_2 B = \triangle O_1 O_2 A$ по 3 сторонам.

$$S_{O_1 O_2 B} = 2 S_{O_1 O_2 A} = 2 \cdot r R \cdot \sin \angle \cdot \frac{1}{2} = r R \cdot \sin \angle$$

По условию:

$$\frac{S_{O_1 O_2 B}}{S_{BO_2 E}} = 3 \Rightarrow \frac{r R \sin \angle}{R(2r+R) \sin \angle} = 3$$

$$r R = 3R(2r+R)$$

$$r = 6r - 3R \Rightarrow$$

$$3R = 5r$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{5}{3}; \quad \text{Ответ а): } \frac{R}{r} = \frac{5}{3}.$$

$$d) BD = 3.$$

$$BO_2^2 + O_2 D^2 - 2 \cos(180^\circ - \angle) \cdot BO_2 \cdot O_2 D = 9 \quad \text{— по теореме косинусов}$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 + R \cdot 2 \sin \angle = 9$$

$$\sin \angle = \frac{2(RR - R^2)}{R}$$

$$\left(\sin \angle = \frac{BO_2}{BO_2} \right)$$

$$BO_2 = \sqrt{R^2 - (2r - R)^2} \quad \text{— по теореме Пифагора}$$

$$2R^2 + r \sqrt{R^2 - r^2} = 9 \quad \text{англ.}; \quad r = \frac{3}{5} R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R^2 + \frac{3}{5} R \sqrt{\frac{16}{25} R^2} = 9$$

$$2R^2 + \frac{3\sqrt{6}}{25} R^2 = 9$$

$$R^2 \cdot \frac{50 + 3\sqrt{6}}{25} = 9$$

$$R = \frac{3 \cdot 5}{50 + 3\sqrt{6}} = \frac{15(50 - 3\sqrt{6})}{(50 + 3\sqrt{6})(50 - 3\sqrt{6})} = \frac{15(50 - 3\sqrt{6})}{2500 - 54} = \frac{15(50 - 3\sqrt{6})}{2446}$$

$$\text{Ответ б): } R = \frac{15}{50 + 3\sqrt{6}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

> 42

≤ 28

$\frac{42}{28}$ or $\frac{28}{42}$

43

27

$\frac{42}{28}$

$-\frac{1}{70}$

2^{70}

2^8

70

70

$70!$

43

$70 \cdot 69 \cdot 68 \dots 43$

2^{70}

2^{70}

$42!$

$\frac{70}{2^{70}}$

$\frac{2^{70}}{70!}$

2^{70}

$\frac{1}{70!}$

2.

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x + \cos 3x \cdot \sin 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\sin + = \cos \sin \cdot \cos + \cos \sin$$

$$\sin - = \sin \cdot \cos - \cos \sin$$

$$\cos + = \cos \cdot \cos - \sin \cdot \sin$$

$$\cos - = \cos \cdot \cos + \sin \cdot \sin$$

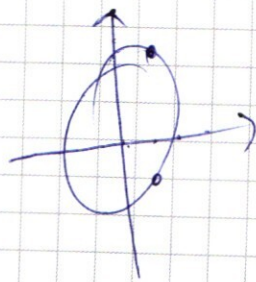
$$\frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\frac{\cos 7x + \sin 7x - \sqrt{2} \cos 6x}{\cos 6x} = 0$$

$$\cos 6x (\sin 4x + \cos 4x) + \cos 6x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$



$$\frac{\cos x + \sin x}{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}$$

$$\sin 7x = \sin x \cdot \cos 6x + \cos x \cdot \sin 6x +$$

$$\cos 7x = \cos x \cdot \cos 6x - \sin x \cdot \sin 6x$$

$$\cdot \cos 6x (\sin x + \cos x) + \sin 6x (\cos x - \sin x)$$

$$\cos 6x (\sin x + \cos x - \sqrt{2})$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \sin 3x}{\cos 3x - \sin 3x}$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos^2 3x + \cos x \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x - \sin x \cdot \sin^2 3x - \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x}{(\cos 3x - \sin 3x)(\cos 3x + \sin 3x)}$$

$$\sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos 3x + \cos^2 3x \cdot \sin x - \sin^2 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin 3x \cdot \sin x$$

$$\cos x \cdot \sin 6x - \sin x \cdot \sin 6x + \cos^2 3x (\sin x + \cos x) - \sin 6x (\cos x - \sin x) + \cos 6x (\sin x + \cos x)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

1/4

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

3.

 $x > 1$

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$\left(x^{\log_x 2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$2^{3k} - 14 \cdot 2^{2k} + 60\sqrt{2} - 72 \leq 0$$

$$2^k = t \quad t > 0$$

$$t^3 - 14t^2 + 60\sqrt{2} - 72 \leq 0$$

$$t(t^2 - 14t + 49) - 49t + 60\sqrt{2} - 72 \leq 0$$

$$t(t-7)^2 - 49t + 60\sqrt{2} - 72 \leq 0$$

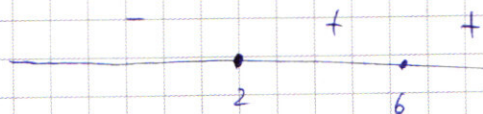
$$2^{3k} - 14 \cdot 2^{2k} + 60 \cdot 2^k - 72 \leq 0$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

1	-14	60	-72
8	-56	120	-72
2	-12	36	0

$$(t-2)(t^2 - 12t + 36) \leq 0$$

$$(t-2)(t-6)^2 \leq 0$$



$$t \in (-\infty; 2] \cup \{6\}$$

$$t = 2^k; \quad t > 0$$

$$2^k = 6$$

$$t \in (0; 2] \cup \{6\}$$

$$k \in (-\infty; 1] \cup \{\log_2 6\}$$

$$k = \sqrt{\log_2 x}, \quad k \geq 0$$

$$k \in [0; 1] \cup \{\log_2 6\}$$

$$x \in [1; 2] \cup$$

$$6 = \log_2 2^{\log_2 6}$$

$$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 6$$

$$\log_2 x = \log_2^2 6$$

$$x = 2^{\log_2^2 6} = 2^{\log_2 6 \cdot \log_2 6}$$

$$x = 2^{\log_2 6} \quad \log_2 x = \log_2 6$$

$$6 = \log_2$$

$$x = \left(2^{\log_2 6} \right)^{\log_2 6}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x - 4\sin^4 x =$$

$$= 4(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) =$$

$$= \cancel{4(\cos^4 x - \sin^4 x)} - 3 = 4\cos^2 x - 3\cos^2 x - 4\sin^2 x + 3\sin^2 x = \cos^2 x - 7\sin^2 x$$

$$\sin 4x = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x = 3\sin x \cdot \cos x - 4\sin^3 x \cos x + 4\cos^3 x \cdot \sin x - 3\cos x \cdot \sin x =$$

$$= 4\sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 4\sin^3 x = 4(\sin x + \cos x) \left(\frac{1 + \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)(1 + 4\sin x \cos x)} \right) =$$

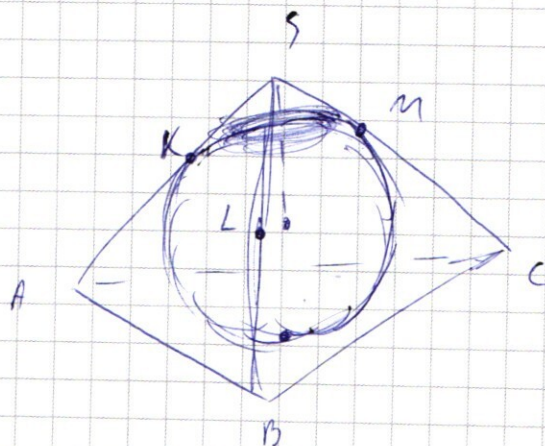
$$\cos 3x + \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x =$$

$$= 4(\cos x - \sin x) \left(\frac{1 + \sin x \cos x}{(\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x \cos x)} \right) = (\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x \cos x)$$

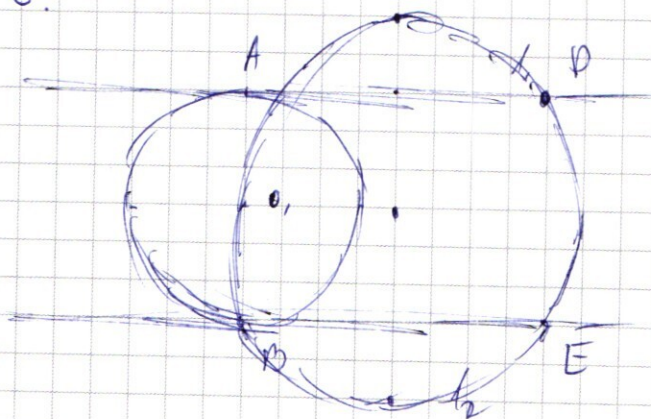
$$\frac{\cos^2 x - 7\sin^2 x}{(\sin x + \cos x)(1 + 4\sin x \cos x)} + \frac{4\sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x \cos x)} = \sqrt{2}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

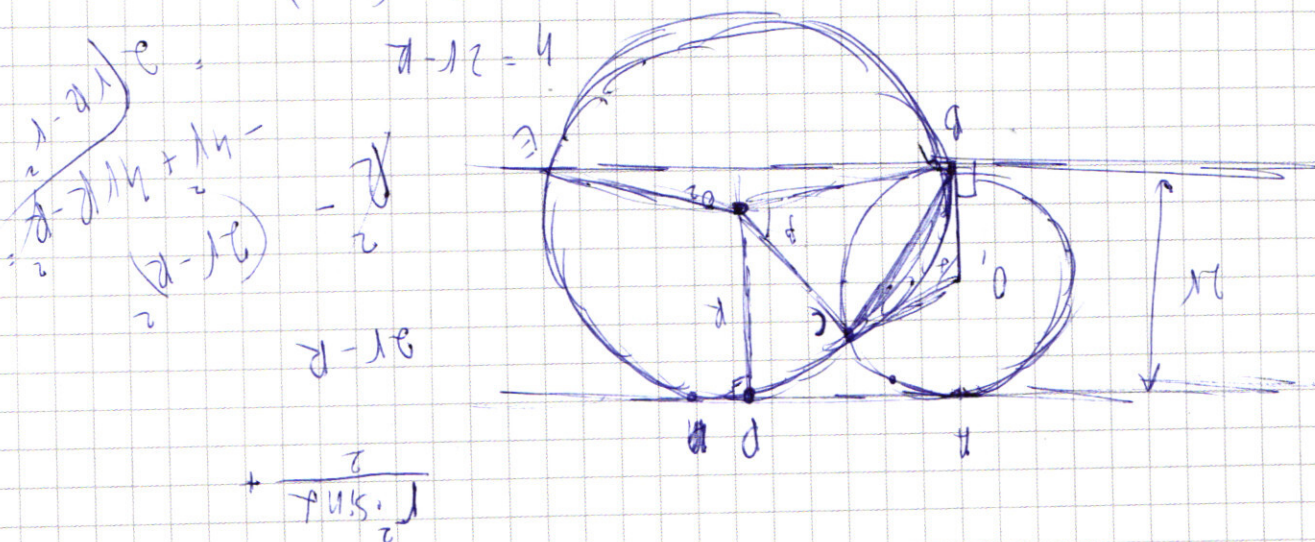
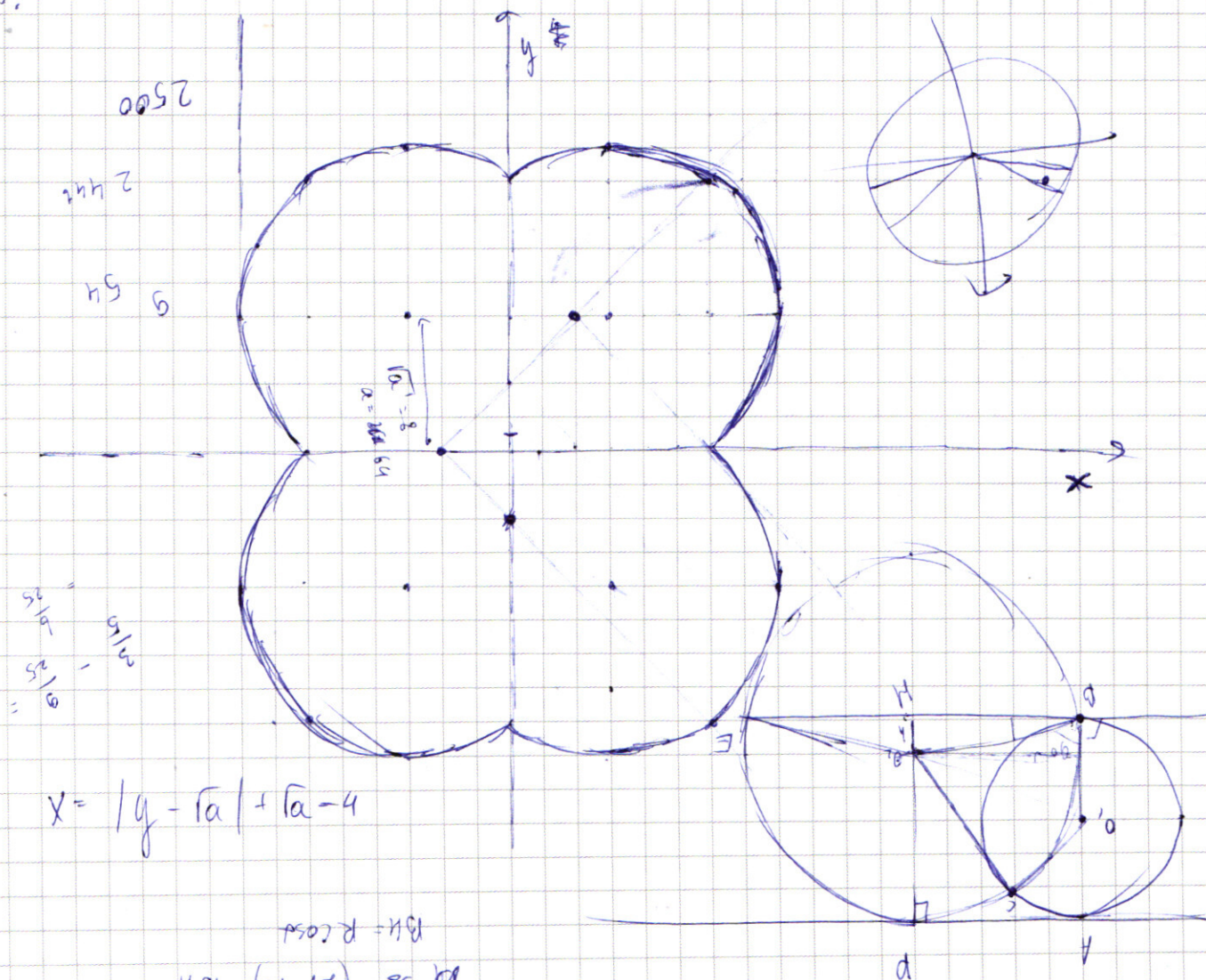
4.



6.



5.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \frac{\overset{(1)}{\cos 4x}}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\overset{(2)}{\sin 4x}}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

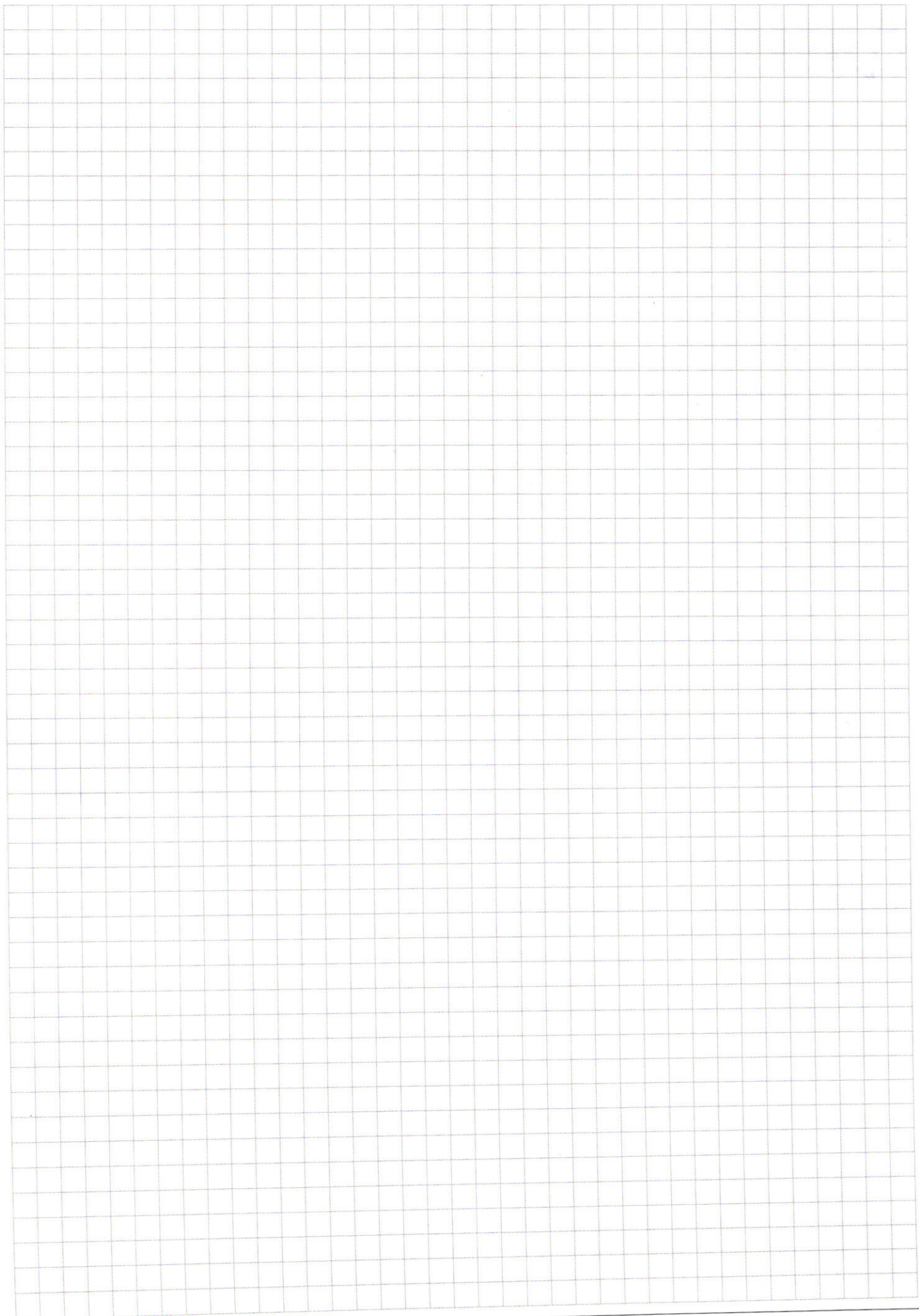
$$(1) \cos 4x = \cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 4\sin^4 x = \\ = 4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3$$

$$(2) \sin 4x = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x = 3\sin x \cos x - 4\sin^3 x \cos x + 4\cos^3 x \sin x - 3\sin x \cos x = \\ = 4\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$(3) \cos 3x - \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 4\sin^3 x - 3\sin x = (\sin x + \cos x)(1 - 4\sin x \cos x)$$

$$(4) \cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x \cos x)$$

$$\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 - 4\sin^2 2x)}{(1 - 4\sin^2 2x)}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)