

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

[3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.

[5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.

[5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

[5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 6x$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{13}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{13}, n \in \mathbb{Z}.$

3.

$$8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$2 \sqrt[3]{\log_2 x} - 14 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$x^{\sqrt{\log_2 x}} = \frac{\log_2 x^2}{\sqrt{\log_2 x^2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 x^2}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}} \quad (\text{т.к. } x \neq 1)$$

Отсюда получаем что $x \neq 1$.

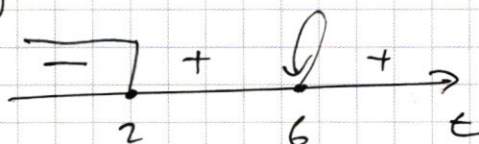
$$2 \sqrt{\log_2 x} = t.$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 14t^2 + 60t - 72 & t-2 \\ \hline t^3 - 2t^2 & \\ \hline -12t^2 + 60t & \\ -12t^2 + 24t & \\ \hline 36t - 72 & \\ 36t - 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$t^2 - 12t + 36 = (t-6)^2$$

$$(t-2)(t-6)^2 \leq 0$$



$$t \in (-\infty; 2] \cup \{6\}.$$

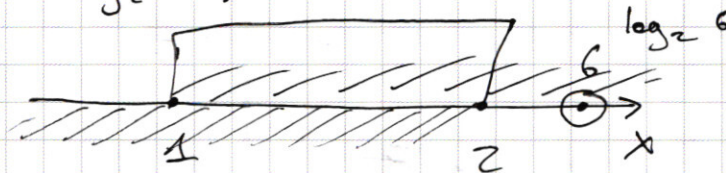
$$\begin{cases} 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 2 \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\log_2 x} \leq 1 \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x = (\log_2 3 + 1)^2 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x = (\log_2 3 + 1)^2 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x = 2^{\log_2 6} \\ x \geq 1 \end{cases}$$



ОА 3:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \\ \log_x 2 \geq 0 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x > 1$$

$$\text{Ответ: } (1; 2] \cup \{6^{\log_2 6}\}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

Пусть n - количество орлов, ~~когда~~ 70-ч
- решек.

Если ~~если~~ $n > 42$, то $70-n \leq 28$.

То есть если решки выпали ~~менее~~
не более 28 раз, то орлов выпали 42 раз.

$\Rightarrow$ вероятности событий равны.

$$q = p \Rightarrow q - p = 0.$$

Ответ: 0.

7.

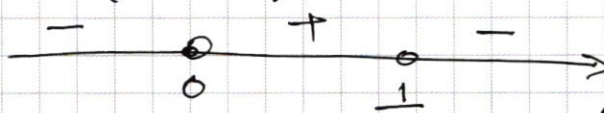
$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80} \\ y \leq \log_7 x \end{cases}$$

$$80 + x - 7^{80} \leq \log_7 x$$

$$\log_7 7^{80} - 7^{80} \leq \log_7 x - x.$$

$$f(t) = \log_7 t - t.$$

$$f'(t) = \frac{1}{\ln 7 \cdot t} - 1$$



При $t > \frac{1}{\ln 7}$ $f(t) \downarrow$,
а ~~так~~ в промежутке
 $(0; \frac{1}{\ln 7})$ нет корней

исен (при $t \leq 0$ функция не опреде-
лена).

Так как на всем интервале неас-
промежутке функция убывает, то

$\log_7 7^{80} - 7^{80} \leq \log_7 x - x$ выполняется
 при x , которое меньше или
 равно 7^{80} . Т.к. $x \in \mathbb{Z}$, то нам могут
 подойти только $x \in [1; 7^{80}]$.

значение x	значение y	кол-во y
1	$[81 - 7^{80}; 0]$	$7^{80} - 81 + 1$
}	}	}
6	$[86 - 7^{80}; 0]$	$7^{80} - 86 + 1$
7	$[87 - 7^{80}; 1]$	$7^{80} - 87 + 2$
}	}	}
48	$[80 + 48 - 7^{80}; 1]$	$7^{80} - 80 - 48 + 2$
}	}	}
49	$[80 + 49 - 7^{80}; 2]$	$7^{80} - 80 - 49 + 3$

~~Как можно найти количество~~

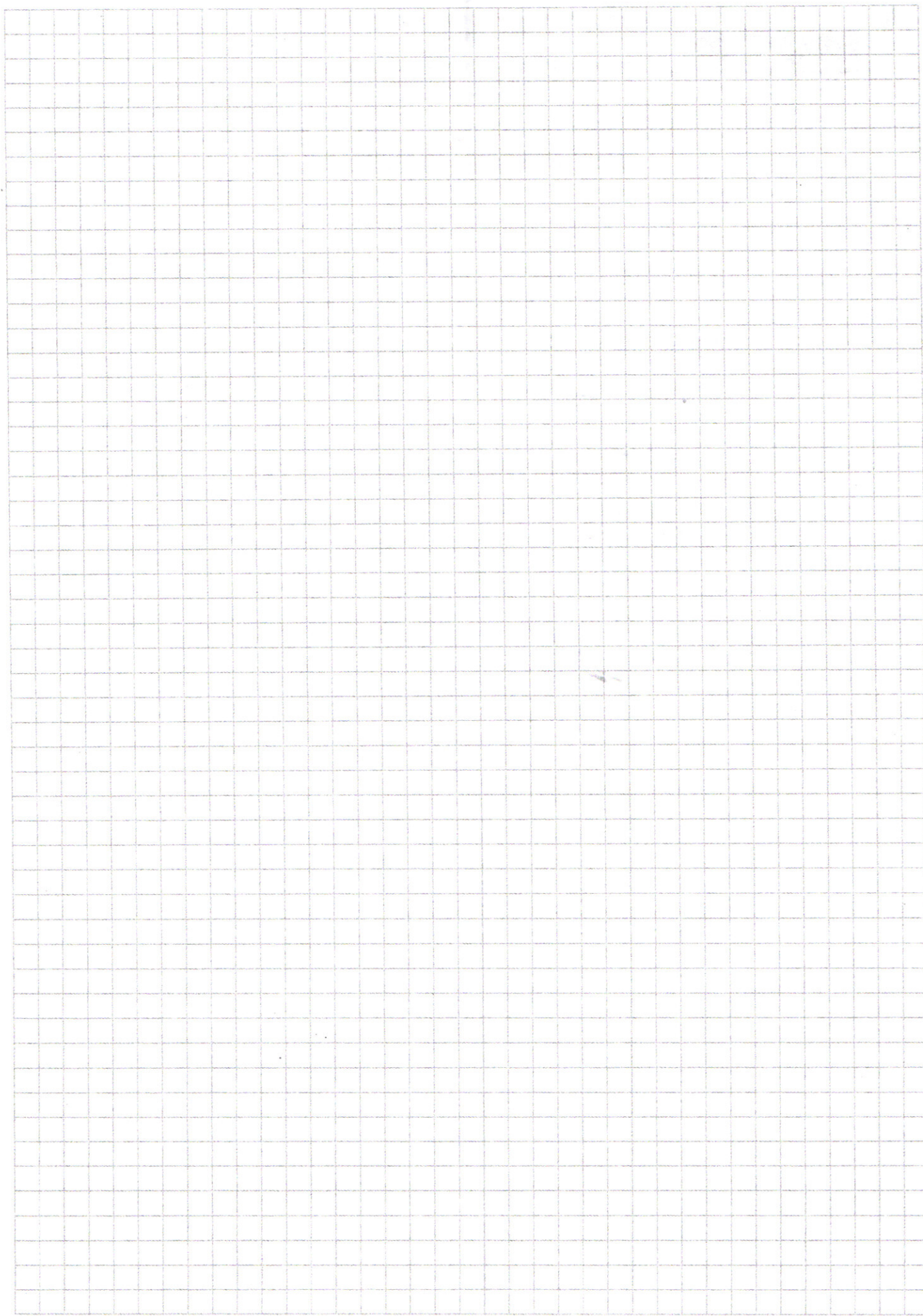
Кол-во пар $(x; y)$ удовлетворяющих усло-
 виям $\equiv 7^{80} \cdot (\text{кол-во значений } x) - 80 \cdot (\text{кол-во}$
 значений $x) - (\text{сумма чисел от } 1 \text{ до } 7^{80}) + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 41 + \dots + n \cdot (7^n - 7^{n-1} + 1)$
 $(n = 80)$.

$$= 7^1 - 7^0 + 2 \cdot 7^2 - 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^3 - 3 \cdot 7^2 + \dots + 80 \cdot 7^{80} - 79 \cdot 7^{79} + \frac{80 \cdot 81}{2} = - (7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{79}) + 80 \cdot 7^{80} + \frac{80 \cdot 81}{2}$$

сумма геометрической прогрессии. $(b=1; q=7)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Кол-во значений $x = 7^{80}$
 сумма чисел от 1 до $7^{80} = \frac{7^{80}(7^{80}+1)}{2}$
 кол-во пар $(x; y) = 7^{80} \cdot 7^{80} - 80 \cdot 7^{80} -$
 $-\frac{7^{80}(7^{80}+1)}{2} - \frac{1 \cdot (7^{80}-1)}{6} + 80 \cdot 7^{80} + 40 \cdot 81 =$
 $= 7^{160} - \frac{7^{80}(7^{80}+1)}{2} - \frac{7^{80}-1}{6} + 3240 =$
 $= 7^{160} - \frac{7^{160}}{2} - \frac{7^{80}}{2} - \frac{7^{80}}{6} + \frac{1}{6} + 3240 =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 7^{160} - \frac{4 \cdot 7^{80}}{6} + 3240 \frac{1}{6}.$
 Ответ: $\frac{1}{2} \cdot 7^{160} - \frac{4 \cdot 7^{80}}{6} + 3240 \frac{1}{6}.$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$1 - 7 \cdot 8 + 60$$

$$x^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\frac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$$

$$2^{3 \sqrt{\log_2 x}} - 14 \cdot 2^{2 \sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 72 \leq 0$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

$$8 - 14 \cdot 4 + 60 \cdot 2 - 72$$

$$120$$

$$t = 2$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \div t - 2$$

$$t^3 - 2t^2$$

$$-12t^2 + 60t$$

$$12t^2 - 12t$$

$$72t - 72$$

$$72t$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72$$

$$t^3 - 2t^2$$

$$-12t^2 + 60t$$

$$-12t^2 + 24t$$

$$36t - 72$$

$$\log_2 x = \log_2 6$$

$$\log_2 x = \log_2 6$$

$$x = 6$$

$$t^2 - 12t + 1 = 0$$

$$D_1 = 36 - 1 = 35$$

$$t = 6 \pm \sqrt{35}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos 7x + \sin 7x}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} (\cos^2 3x - \sin^2 3x)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \cos 6x$$

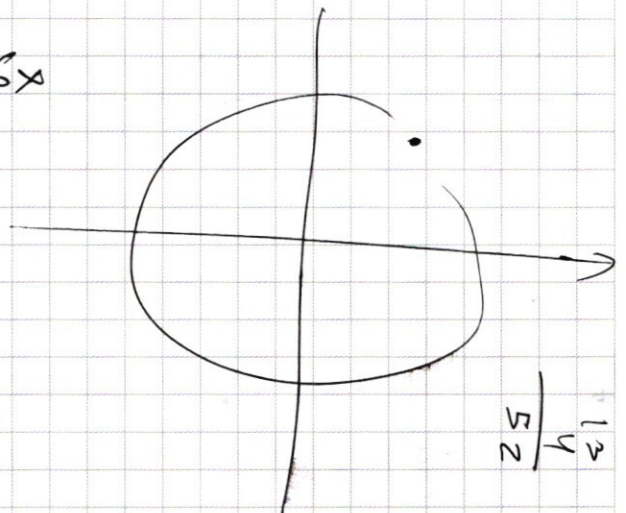
$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 6x$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi n \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4 \cdot 13} + \frac{2\pi n}{13}, n \in \mathbb{Z}$$



$$8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_2 x}} \leftarrow 4? \leq 0$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}}$$

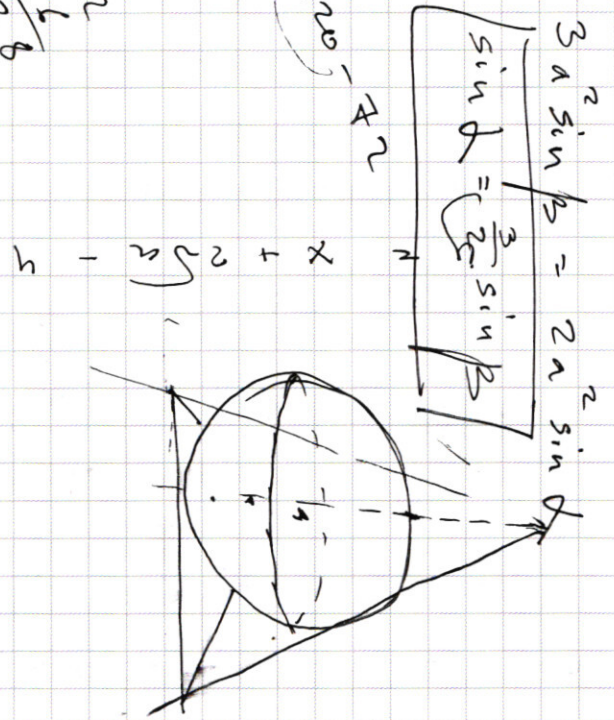
$$14 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 8 \sqrt{\log_2 x}$$

$$\frac{14}{8} \sqrt{\log_2 x}$$

$$= \binom{8-8}{2} + \binom{9-4}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} 100 &= \binom{8-4}{2} + \binom{9-x}{2} \\ 100 &= \binom{8-14}{2} + \binom{9-14}{2} \end{aligned}$$



$$36 = 6 \cdot 6$$

$$x = y + \sqrt{y} + \sqrt{y} + 6$$

$$h + x = y$$

$$y > 24$$

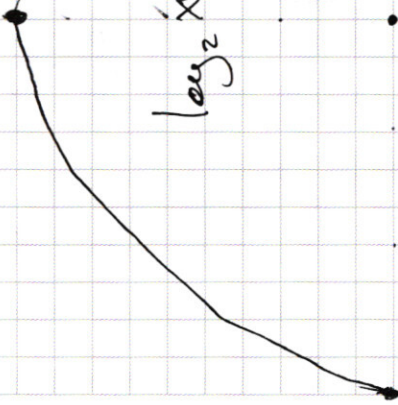
$$h - y = x$$

$$x = y - \sqrt{y} + \sqrt{y} - h = x$$

$$\begin{aligned} 100 &= \binom{8-14}{2} + \binom{9-14}{2} \\ x &= y + \sqrt{y} + \sqrt{y} - h = x \end{aligned}$$

x

$$\log_2 x \leq 1$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = 0.$$

$$\frac{3}{2} \cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -1.$$

$$\frac{3}{2} \cos \beta = -\frac{3}{2} \sin \beta = -1.$$

$$r^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha = a^2 + 2a^2 \cos \beta \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= a^2 + 3a^2 \cos \beta.$$

$$v^2 = a^2 (1 + 3 \cos \beta) = a^2 - 2a^2 \cos \beta = a^2 (1 - 2 \cos \beta)$$

$$v = \sqrt{a^2 (1 - 2 \cos \beta)} = a \sqrt{1 - 2 \cos \beta}.$$

$$\log_2 x - 4 \leq \log_2 x.$$

$$\log_2 x - 4 \leq \log_2 x - x$$

$$x - 4 \leq \log_2 x - \log_2 x$$

$$8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

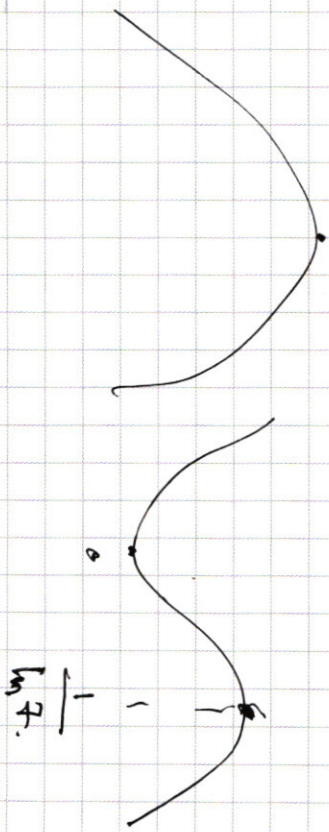
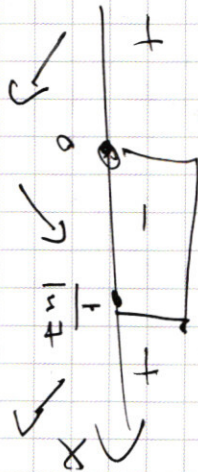
$$8 \sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2 \cdot 4^{\sqrt{\log_2 x}} + 60 x^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 72$$

$$2A \approx \sqrt{x \cdot \log^2} + \sqrt{x \cdot 2 \log^2} + 1 - \sqrt{x \cdot 2 \log^2} - 8$$

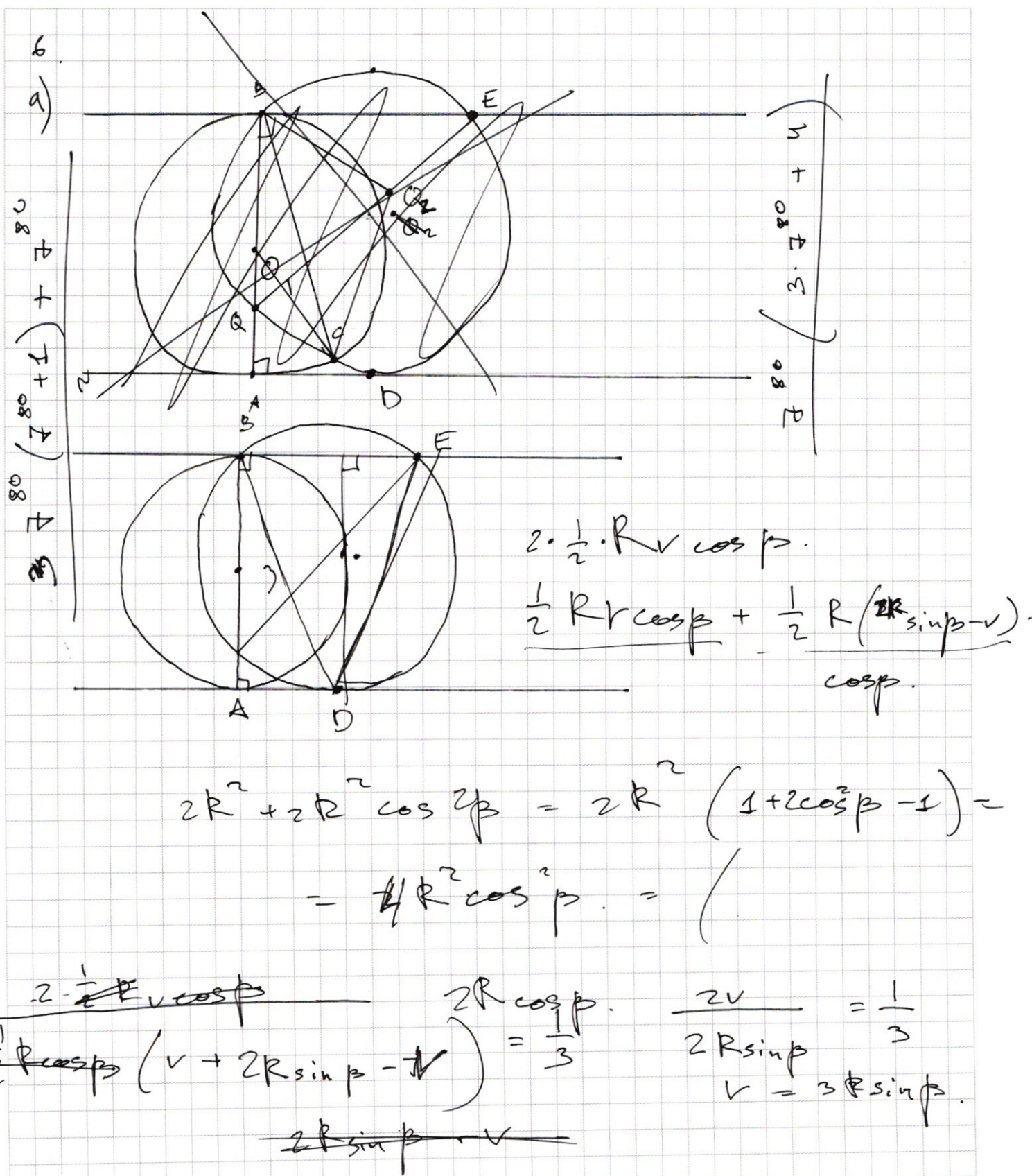
$$2. \sqrt[2]{\log x} \sqrt[2]{\log x^2} \sqrt[2]{\frac{1}{\log x^2}}$$

$$f(t) = \log t - t$$

$$\left[\begin{array}{c} \tau \\ \vee \\ \odot_3 \end{array} \right]$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin \alpha = \frac{3}{2} \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 0$$

$$S_1 = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin_1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin_2$$

$$S_3 = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin_3$$

$$\frac{1}{2} R^2 (\sin_1 + \sin_2) = 3 \frac{1}{2} R^2 \sin_3$$

$$\sin_1 + \sin_2 = 3 \sin_3$$

$$2 \sin_2 = 3 \sin_3$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{5}{4} \sin^2 \beta$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{2} \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 0$$

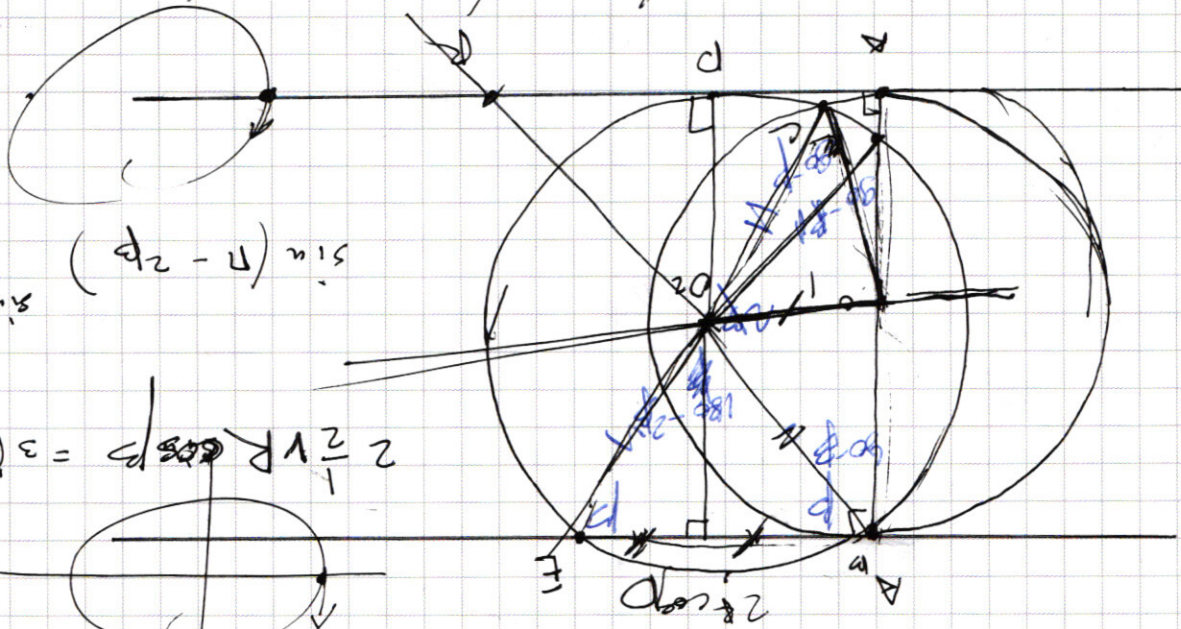
$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = 0$$

$$\frac{3}{2} \sin \beta$$

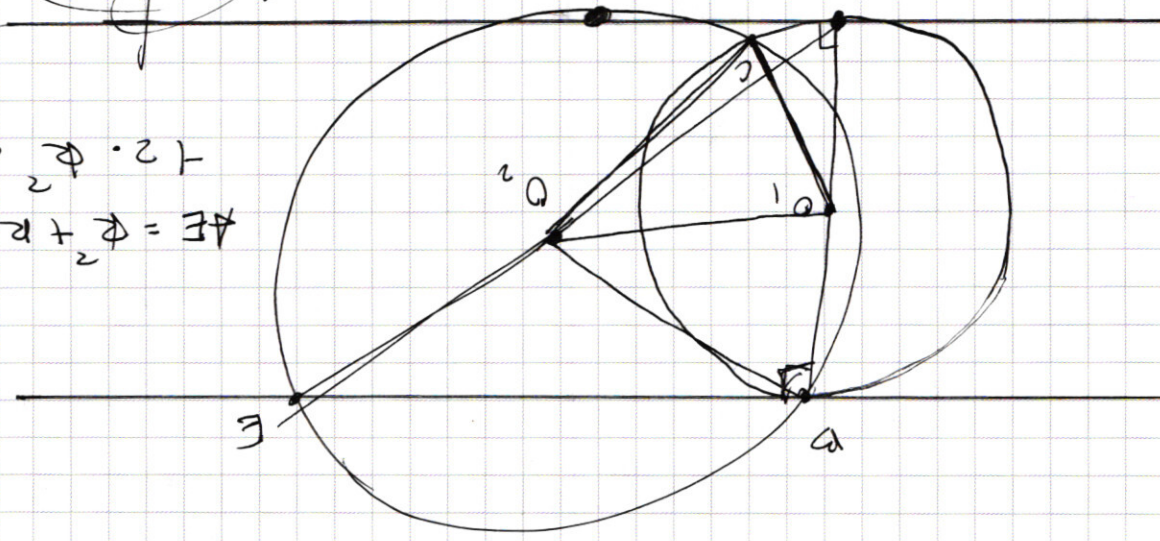
$$\frac{3}{2} \cos \beta + \cos \alpha = 0$$

$$V = 3R \sin \beta$$

~~$$V R \cos \beta = 6R \sin \beta \cos \beta$$~~

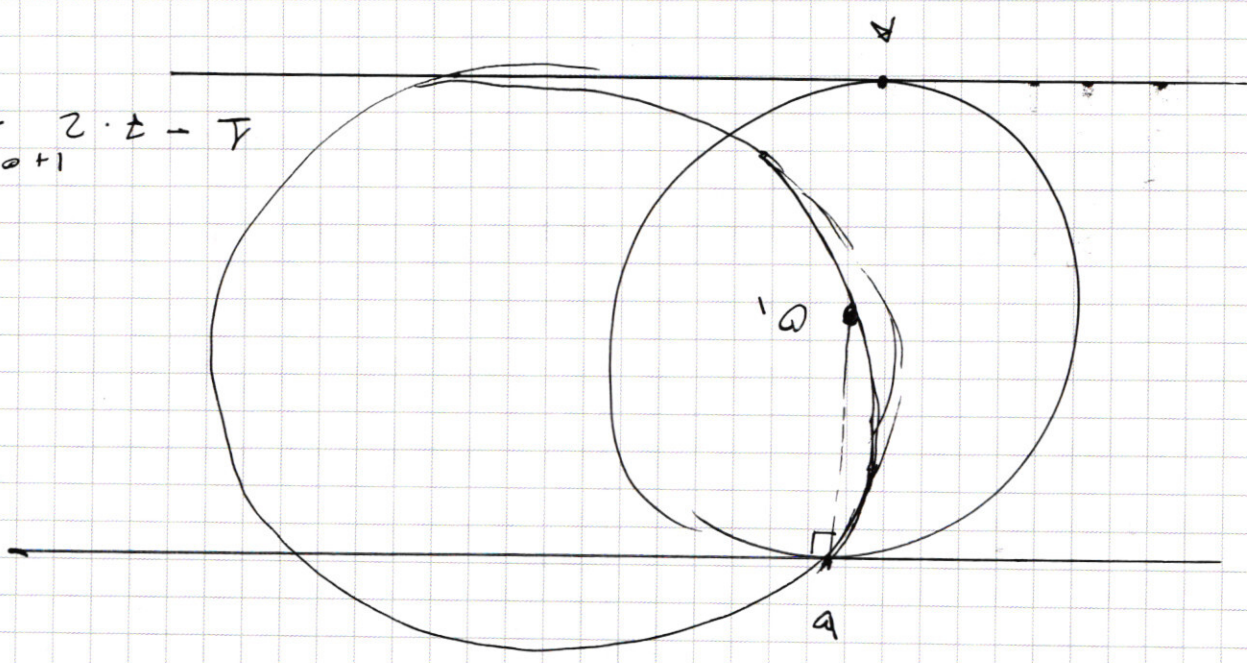


$$2 \frac{1}{2} V R \cos \beta = 3 R^2 \sin 2\beta$$



$$AE = R_2 + R_2$$

$$12 \cdot R_2 \cos 2\beta$$



$$1 + 0.1 \cdot 2 \cdot 2 + 60 \cdot 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 80 + x - 7^{80}$$

$$y \leq \log_7 x$$

$$80 + x - 7^{80} \leq \log_7 x$$

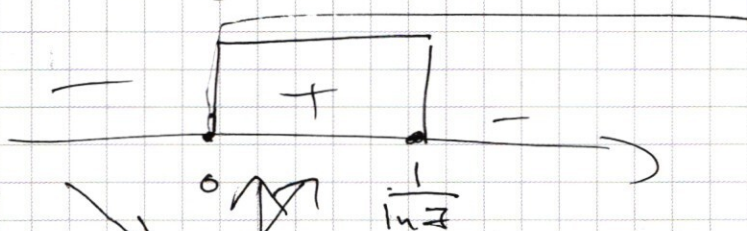
$$\log_7 7^{80} - 7^{80} \leq \log_7 x - x$$

$$f(t) = \log_7 t - t$$

$$f'(t) = \frac{1}{\ln 7 \cdot t} - 1 =$$

$$= \frac{1 - \ln 7 \cdot t}{\ln 7 \cdot t}$$

$$= \frac{1}{\ln 7} - t \geq 0 \quad t > 0$$



$$y \geq 80 + x - 7^{80}$$

$$y \leq 80$$

$$x - 7^{80} \leq 0$$

$$80 + x - 7^{80} \leq y \leq \log_7 x$$

~~$$y \geq 78 - 7^{80}$$~~
~~$$y \leq \log_7 x$$~~

$$y \geq 78 - 7^{80}$$

$$y \leq 0$$

~~$$\log_7 e$$~~



$$\sqrt{R} \cos \beta = 3R^{\frac{1}{2}} \cos \beta \sin \beta \quad V = 3R \sin \beta$$

~~$$\sin \beta = \frac{V}{R} = \frac{3R \sin \beta}{R}$$~~

$$x \in [1, \infty)$$