МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \leqslant 72$.

4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC. Через точку сферы, ближайшую к точке S, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM.

   б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

   имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 80 + x - 7^{80}, \\ y \leqslant \log_7 x. \end{cases}$$

   Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Приводя слагаемые в левой части к общему знаменателю, получаем

$$\frac{\cos 4x\cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x}{(\cos 3x - \sin 3x)(\cos 3x + \sin 3x)} = \sqrt{2},$$

$$\frac{\cos(7x) + \sin(7x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos 7x \cos\frac{\pi}{4} + \sin 7x \sin\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 6x} = \sqrt{2},$$

$$\frac{\cos(7x-\frac{\pi}{4})}{\cos 6x} = 1.$$

~~Тогда на ОДЗ:~~

$$\cancel{\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos(6x)}$$

$$\cancel{7x-\frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$$

$$\cancel{x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}.$$

ОДЗ: $\cancel{\cos 6x \neq 0}$

$$\begin{cases} \cos 3x \neq \sin 3x \\ \cos 3x \neq -\sin 3x \end{cases} \Rightarrow \quad 3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},$$

$$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}.$$

Тогда на ОДЗ

$$\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 6x$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x-\frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ 13x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}, \; k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Найдем, при каких $k \in \mathbb{Z}$ корни не принадлежат ОДЗ:

1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} \;\Big|\cdot \frac{12}{\pi}$

$3 + 24k = 1 + 2n,$

$n = 12k + 1 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$ найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что корень $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ не принадлежит ОДЗ.

Значит, все корни вида $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не подходят.

2) $\cancel{\frac{\pi}{4} + 2}$ $\frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} \;\Big|\cdot \frac{12\cdot 13}{\pi}$

$3 + 24k = 13 + 26n$

$12k = 5 + 13n$

$k = \frac{5 + 13n}{12} = n + \frac{n+5}{12}.$

$k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n+5}{12} \in \mathbb{Z}$, тогда $n + 5 = 12l$, $n = 12l - 5$,

$k = 12l - 5 + l = 13l - 5, \quad l \in \mathbb{Z}.$

Значит, при $k = 13l - 5$, $l \in \mathbb{Z}$, корни вида $x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}$ не удовлетворяют ОДЗ.

В итоге получаем, что $x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{13l - 5\}, l \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}\right\}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{13l - 5\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Заметим, что на ОДЗ выражение

$\cancel{x^{\sqrt{\log_x 2}}}\ \cancel{x^{\log_x 2}}$

$$x^{\sqrt{\log_x 2}} = x^{\frac{\log_x 2}{\sqrt{\log_x 2}}} = \left(x^{\log_x 2}\right)^{\sqrt{\frac{1}{\log_x 2}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}.$$

Тогда перепишем исходное неравенство в виде

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14 \cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60 \cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 72 \leq 0$$

Введем переменную $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$, причем с учетом ОДЗ $\log_2 x > 0$, поэтому $t > 1$.

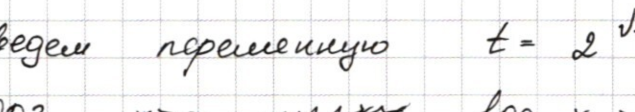
Переписывая исходное неравенство, получаем

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \leq 0$$

При этом $t=2$ является корнем многочлена $t^3 - 14t^2 + 60t - 72$ (действительно, $8 - 56 + 120 - 72 = 0$).

$$(t-2)(t^2 - 12t + 36) \leq 0$$

$$(t-2)(t-6)^2 \leq 0$$



Тогда $t \leq 2$ или $t = 6$, при этом $t > 1$.

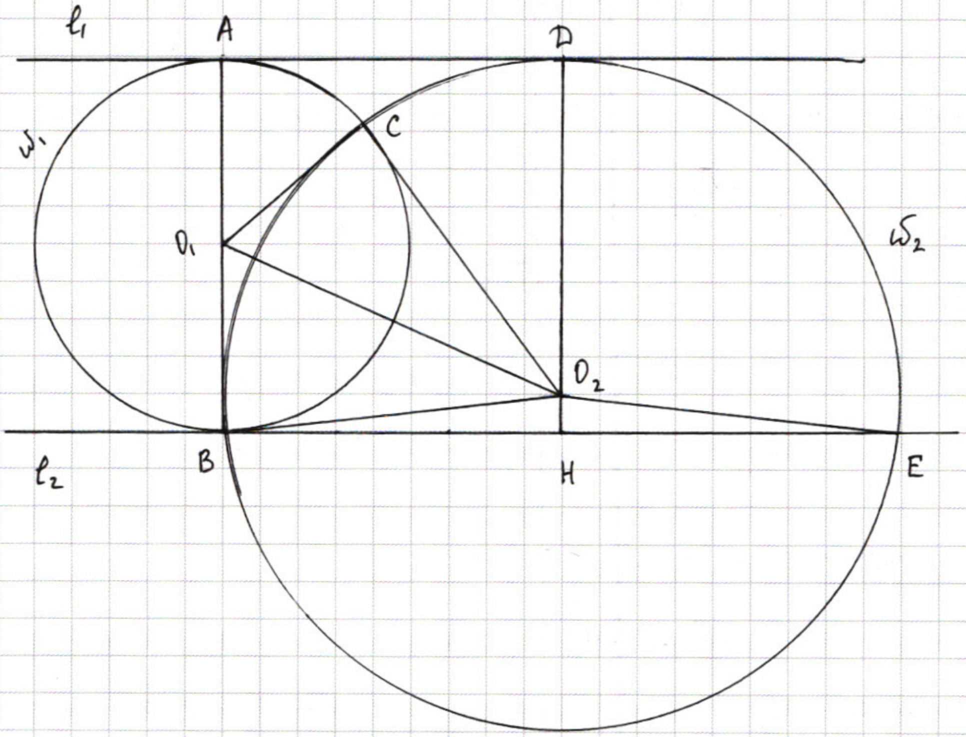
$$\left[\begin{array}{l} 1 < 2^{\sqrt{\log_2 x}} \leq 2 \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \sqrt{\log_2 x} \leq 1 \\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\log_2 6} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \log_2 x \le 1 \\ \sqrt{\log_2 x} = \log_2 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x \le 2 \\ \log_2 x = \log_2^2 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x \le 2 \\ x = 6^{\log_2 6} \end{array}\right.$$

Все эти значения удовлетворяют ООЗ, значит это и есть ответ.

Ответ: $x \in (1; 2] \cup \{6^{\log_2 6}\}$.

N6.



Обозначим радиус окружности ω_1 за r_1, радиус окружности ω_2 за r_2.

В $\triangle BO_2E$ проведем высоту $O_2H \perp BE$.

$O_1A \perp l_1$, $O_1B \perp l_2$ как радиусы, проведенные в точки касания, при этом $l_1 \parallel l_2$ по условию, тогда прямые O_1A и O_1B совпадают и AB – диаметр окружности ω_1, $AB = 2r_1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Также $O_2D \perp l_1$, $O_2H \perp l_2$, $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow$ прямые O_2D и O_2H совпадают, а так как $AB \perp l_1$ и $DH \perp l_1$, то $AB \parallel DH$, а значит $AB = DH$.

~~Прямая, соединяющая линии~~

$O_1B = O_1C = r_1$, $O_2B = O_2C = r_2 \Rightarrow$

$\triangle O_1O_2B = \triangle O_1O_2C$ по трем сторонам (O_1O_2 - общая).

$BO_2 = O_2E = r_2 \Rightarrow \triangle BO_2E$ - равнобедренный,

значит $BH = HE$, тогда $S_{BO_2H} = S_{EO_2H}$ и

$$S_{BO_2E} = S_{BO_2H} + S_{HO_2E} = 2S_{BO_2H}.$$

Из $\triangle O_1O_2B = \triangle O_1O_2C \Rightarrow S_{O_1O_2B} = S_{O_1O_2C}$ и тогда $S_{BO_1CO_2} = S_{O_1O_2B} + S_{O_1O_2C} = 2S_{O_1O_2B}$.

Пусть $O_2H = h$, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, тогда $\angle BO_2H = \angle O_1BO_2 = \alpha$ как накрест лежащие при $AB \parallel DH$ и секущей BO_2.

$S_{BO_1CO_2} = 2S_{O_1O_2B} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_1B \cdot O_2B \cdot \sin\angle O_1BO_2 = r_1 r_2 \sin\alpha$.

$S_{BO_2E} = 2S_{BO_2H} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_2B \cdot O_2H \cdot \sin\angle BO_2H = r_2 d \sin\alpha$.

По условию
$$3 = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{r_1 r_2 \sin\alpha}{r_2 d \sin\alpha} = \frac{r_1}{d}, \quad d = \frac{r_1}{3}.$$

Так как $AB = DH = DO_2 + O_2H$

$2r_1 = r_2 + d = r_2 + \frac{r_1}{3}$, откуда

$r_2 = \frac{5}{3} r_1$, или $\frac{r_2}{r_1} = \frac{5}{3}$.

б) ~~AB=2r~~, $AB = DH = 2r_1$, $DH^2 = 4r_1^2$.

$O_2H^2 = \frac{r_1^2}{9}$, $BO_2^2 = r_2^2 = (\frac{5}{3}r_1)^2 = \frac{25}{9}r_1^2$.

$\triangle BO_2H$: $BH^2 = BO_2^2 - O_2H^2 = \frac{24}{9}r_1^2 = \frac{8}{3}r_1^2$

$\triangle BHD$: $BH^2 + DH^2 = BD^2$

$4r_1^2 + \frac{8}{3}r_1^2 = 9$

$20r_1^2 = 27 \Rightarrow r_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{60}}{20}$;

$r_2 = \frac{5}{3}r_1 = \frac{\sqrt{60}}{4}$.

Ответ: а) $\frac{5}{3}$

б) $\frac{3\sqrt{60}}{20}$ и $\frac{\sqrt{60}}{4}$.

№5.

~~Постр~~ Рассмотрим графики данных ~~уравнен~~ уравнений в плоскости yOx $(x(y))$.

Второе уравнение: ~~$(|x-6|$~~ $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-6)^2 + (y-8)^2 = 100 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+6)^2 + (y-8)^2 = 100 \\ x < 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+6)^2 + (y+8)^2 = 100 \\ x < 0, \quad y < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-6)^2 + (y+8)^2 = 100 \\ x \geq 0, \quad y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Для каждой четверти координатной плоскости это дуга окружности радиуса 10 с конкретным центром.

Отметим, что точка $(0;0)$ также удовлетворяет уравнению.

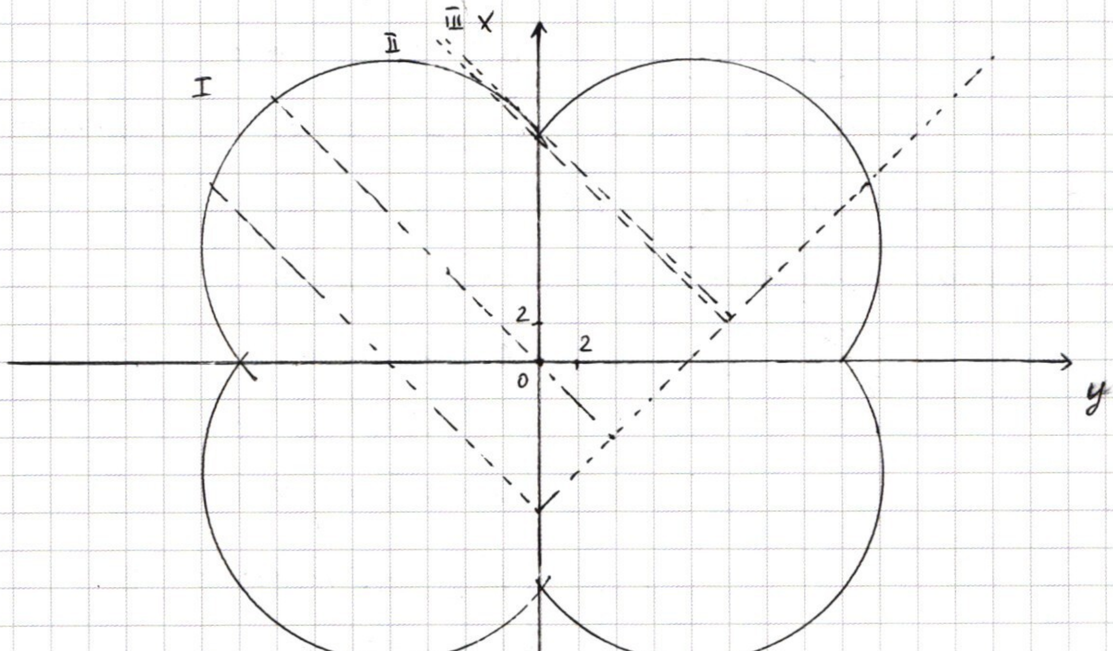
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Первое уравнение в координатах xOy задает „галочку" – комбинацию двух лучей:

$$\begin{cases} x = y-4 & \text{при } y \geq \sqrt{a} \\ x = -y + 2\sqrt{a} - 4 & \text{при } y < \sqrt{a} \end{cases}$$

Так как при $y \geq a$ $x = y-4$ не зависит от параметра a, то вершина галочки всегда лежит на прямой $x = y-4$, а так как $\sqrt{a} \geq 0$, то абсцисса вершины $y \geq 0$.

Изобразим:



Если вершина „галочки" лежит вне области, ограниченной дугами окружности, то графики пересекаются не более чем в двух точках $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ система имеет не более двух решений.

В противном случае „галочка" пересечет график второго уравнения в трех точках только в трех случаях:

I. Прямая $x = -y + 2\sqrt{a} - 4$ проходит через точку $(0;0)$:

$0 = 2\sqrt{a} - 4 \Rightarrow \sqrt{a} = 2, \quad a = 4.$

II. Прямая $x = -y + 2\sqrt{a} - 4$ проходит через точку $(0;12)$:

$12 = 2\sqrt{a} - 4 \Rightarrow \sqrt{a} = 8, \quad a = 64.$

В каждом из этих двух случаев прямая $x = y - 4$ пересекает дугу окружности в I. четверти, а прямая $x = -y + 2\sqrt{a} - 4$ проходит через указанную точку (которая принадлежит графику второго уравнения) и также пересекает дугу во II четверти – всего три решения.

III. Прямая $x + y + 4 - 2\sqrt{a} = 0$ касается дуги окружности $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$

Тогда расстояние от центра этой окружности $(-8;6)$ до этой прямой, равная $d = \frac{|-8+6+4-2\sqrt{a}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2-2\sqrt{a}|}{\sqrt{2}}$, равна радиусу окружности $R = 10$.

$$\frac{|2-2\sqrt{a}|}{\sqrt{2}} = 10 \iff \left[\begin{array}{l} 2 - 2\sqrt{a} = 10\sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{a} = -10\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a} = 1 - 5\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \varnothing \\ \sqrt{a} = 1 + 5\sqrt{2}, \end{array}\right.$$

откуда $a = (1+5\sqrt{2})^2 = 51 + 10\sqrt{2}$.

В этом случае прямая $x = y - 4$ также пересекает дугу I четверти в одной точке, прямая $x = -y + 2\sqrt{a} - 4$ пересекает эту же дугу и касается ~~во~~ дуги II четверти – три общих точки.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

До I положения и между I и II положением две общие точки, между II и III положением - четыре общие точки, после III - не более двух общих точек.

Ответ: $a=4$, $a=64$, $a=51+10\sqrt{2}$.

№1.

Введем обозначение событий:

H_{28} - орёл выпал не более 28 раз;

T_{28} - решка выпала не более 28 раз;

H_{43} - орёл выпал больше 42 раз.

Из условия $p(H_{43}) = p$, $p(H_{28}) = q$.

При этом, так как события „выпал орёл" и „выпала решка" ~~равно~~ ~~вероятные~~, то события H_{28} и T_{28} - также равновероятные, $p(T_{28}) = p(H_{28}) = q$.

При этом событие T_{28} равносильно событию „орел выпал хотя бы 42 раза", а разность событий T_{28} и H_{43} соответствует событию G: орёл выпал ровно 42 раза.

Всего существует $\tilde{A}_2^{70} = 2^{70}$ ~~вариантов~~ исходов, из которых благоприятными является любое сочетание ~~выборка~~ 42 бросков (в них выпадут орлы, в остальных решки), то есть

$C_{70}^{42} = \frac{70!}{42!\cdot 28!}$

Вероятность события C тогда равна

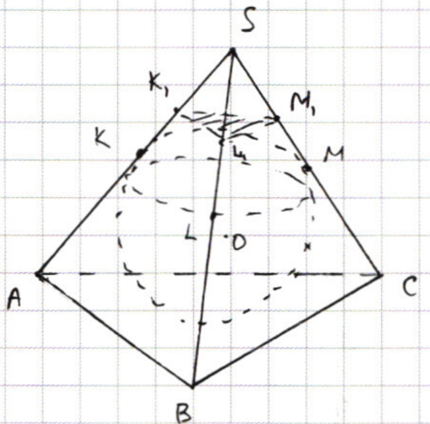
$p(C) = \cancel{\frac{C_{70}^{44}}{A_{70}}}\ \frac{C_{70}^{42}}{\tilde{A}_2^{70}} = \frac{70!}{42!\cdot 28!\cdot 2^{70}}$. При этом

$p(C) = p(T_{28}) - p(H_{43}) = q - p$,

тогда $p - q = -p(C) = -\frac{70!}{42!\cdot 28!\cdot 2^{70}}$.

Ответ: $-\frac{70!}{42!\cdot 28!\cdot 2^{70}}$.

№ 4.



Обозначим точки пересечения плоскости из условия с ребрами SA, SB, SC за K_1, L_1, M_1 соответственно.

Пусть SO пересекает сферу в точке O_1.

Докажем, что эта точка - ближайшая к S точка сферы.

Предположим, что это не так, и такая ближайшая точка — $O' \neq O_1$. Понятно, что длина ломаной $SO'O$ больше длины отрезка SO:

$SO' + O'O > SO = SO_1 + O_1O$. Но $O_1O = OO'$ как радиусы сферы, тогда $SO' > SO_1$, что приводит к противоречию.

Тогда $O_1 \in K_1L_1M_1$, при этом $OO_1 \perp K_1L_1M_1$ ~~(радус~~ (радиус сферы и касательной плоскости), значит $SO \perp K_1L_1M_1$.

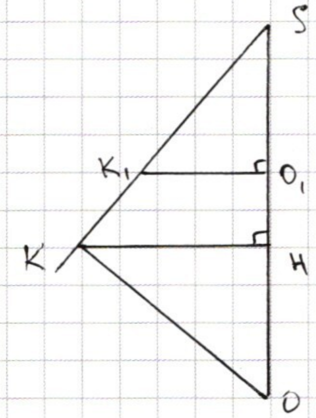
Если $SK_1 = SL_1 = SM_1$, а $SK = SL = SM$ как отрезки касательных к сфере, то

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{SK_1}{SK} = \frac{SL_1}{SL} = \frac{SM_1}{SM}$ и $(K_1L_1M_1) \parallel (KLM)$, тогда $SO \perp (KLM)$.

~~Рассмотрим~~ Если $KH \perp SO$, то $\frac{S_{K_1L_1M_1}}{S_{KLM}} = \left(\frac{O_1K_1}{HK}\right)^2$.

Рассмотрим $\triangle KSO$:



$OO_1 = OK = R$ – радиус сферы.

$\angle SKO = 90°$, $\Rightarrow$

$\angle SOK = 90° - \angle KSO$, и тогда

$OH = OK \cos\angle SOK = OK \sin\angle KSO =$

$R \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{4}R$,

Тогда $O_1H = \frac{1}{4}R$.

При этом $SO = \frac{OK}{\sin\angle KSO} = \frac{4}{3}R$, тогда $SO_1 = \frac{1}{3}R$,

~~O_1K_1~~ Из $\triangle SKH$ и $\triangle SK_1O_1$:

$\frac{O_1K_1}{KH} = \frac{SO_1}{SH} = \frac{SO_1}{SO_1 + SH} = \frac{\frac{1}{3}R}{\frac{7}{12}R} = \frac{4}{7}$.

$\frac{S_{K_1L_1M_1}}{S_{KLM}} = \left(\frac{O_1K_1}{KH}\right)^2 = \frac{16}{49}$. $\Rightarrow S_{KLM} = \frac{49}{16} S_{K_1L_1M_1} = \frac{49}{8}$ / Ответ а)

б) Если $ABC \parallel KLM$, то $SO \perp (ABC)$. Пусть

$SO \cap (ABC) = E$, тогда $SE = SO + OE = \frac{4}{3}R + R = \frac{7}{3}R$

Если $SO = 9 = \frac{4}{3}R$, то $R = \frac{27}{4}$, $SE = \frac{7}{3}R = \frac{63}{4}$;

$SH = \frac{7}{12}R = \frac{63}{16}$.

$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}}$ ~~$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}}$~~ $= \left(\frac{KH}{AE}\right)^2 = \left(\frac{SH}{SE}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow S_{ABC} = 16 S_{KLM} = 98$.

$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SE = \frac{1}{3} \cdot 98 \cdot \frac{63}{4} = \frac{21 \cdot 49}{2} = \frac{1029}{2}$ / Ответ б)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80} \\ y \leq \log_7 x \end{cases}$$

$7^y \leq x$

$y \geq 80 + x - 7^{80} \geq 80 + 7^y - 7^{80}$

$y - 7^y \geq 80 - 7^{80}$

$7^y - y$

№2

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

$c4x\,c3x + c4x\,s3x + s4x\,c3x - s4x\,s3x$

$$\frac{\cos(7x) + \sin(7x)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$\cos(7x) + \cos($

$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos(7x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(7x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cos 6x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 6x} = 1$$

$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(6x)$

$7x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$7x - \frac{\pi}{4} = \cancel{\pi - 6x}$

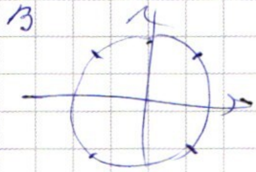
$= -6x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$13x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$\cos 3x \neq \sin 3x$

$\cos 3x \neq -\sin 3x$

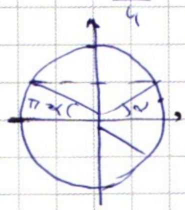
$x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13}$



$3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$

$\frac{26\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{27\pi}{12} = \frac{9\pi}{4}$



$\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$

$3 \neq 1 + 2n$

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$1 + 2n \neq 3 + 24k$

$n \neq 1 + 12k$

$k \neq \frac{n-1}{12}$

$n = 12l + 1$

Ответ:

$\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right\}$,

$k \in \mathbb{Z} \setminus \left\{\frac{n-1}{12}\right\},\ n \in \mathbb{Z}$

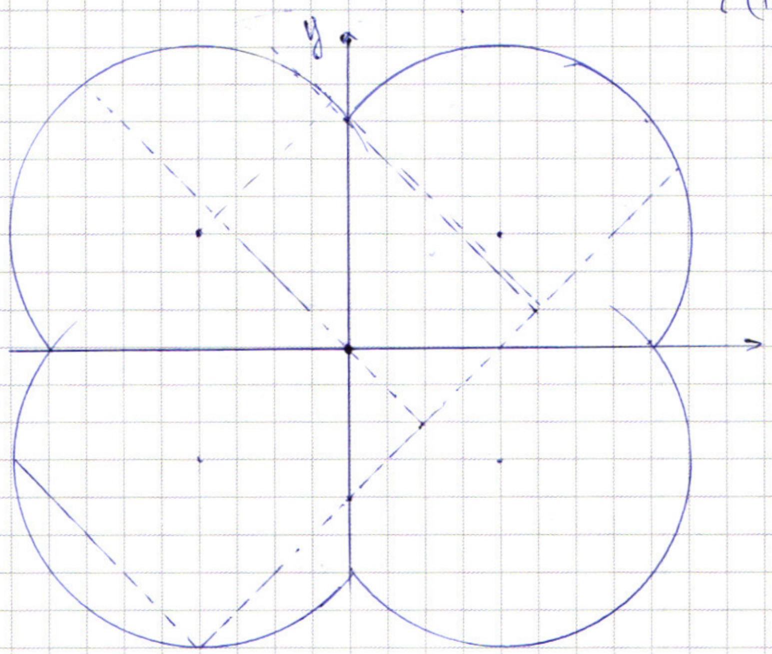
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№ 5

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4 \\ (|y| - 6)^2 + (|x| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$



Вершина:

~~y = a~~

$x = \sqrt{a}$

$y = \sqrt{a} - 4$

$y = x - 4$

$x = \sqrt{a} =$

I $y = -x + 2\sqrt{a} - 4$ проходит через $(0;0)$

$\sqrt{a} = 2$

$\boxed{a = 4}$

II. $y = -x + 2\sqrt{a} - 4$ через $(0; 12)$

$12 = 2\sqrt{a} - 4$ $\sqrt{a} = 8$

$\boxed{a = 64}$

III. $y = -x + 2\sqrt{a} - 4$ касается окружности II четв:

$R = 10$ $d((-8;6);\ x + y + 4 - 2\sqrt{a})$

$x + y + 4 - 2\sqrt{a} = 0$

$d =$ ~~$|-8+6|$~~ $\dfrac{|-8 + 6 + 4 - 2\sqrt{a}|}{\sqrt{1+1}} = 10$

$|2 - 2\sqrt{a}| = 10\sqrt{2}$

$2 - 2\sqrt{a} = 10\sqrt{2}$

$2 - 2\sqrt{a} = -10\sqrt{2}$

$2\sqrt{a} = 2 + 10\sqrt{2}$

$\sqrt{a} = 1 + 5\sqrt{2}$

$\boxed{a = 51 + 10\sqrt{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7\cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60\cdot x^{\frac{\log_x 2}{\sqrt{\log_x 2}}} \le 72$$

$$2^{3\sqrt{\log_2 x}} - 14\cdot 2^{2\sqrt{\log_2 x}} + 60\cdot 2^{\sqrt{\log_2 x}} - 72 \le 0$$

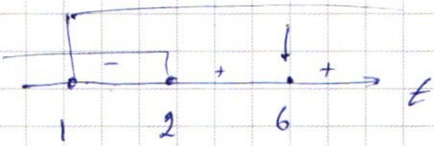
$t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$, $t \ge 1$

$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \le 0$ $\quad$ 1 -14 60 -72

$8 - 56 + 120 - 72 = 0$ $\quad$ 2 1 -12 36 0

$(t-2)(t^2-12t+36) \le 0$

$(t-2)(t-6)^2 \le 0$



$$\left[\begin{array}{l} 1 \le t \le 2 \\ t = 6 \end{array}\right.$$

$1 \le 2^{\sqrt{\log_2 x}} \le 2$

$0 \le \sqrt{\log_2 x} \le 1$

$0 \le \log_2 x \le 1$

$\boxed{1 \le x \le 2}$

$2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2^{\log_2 6}$

$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 6$

$\log_2 x = \log_2^2 6$

$x = 2^{\log_2^2 6} = 6^{\log_2 6}$

Ответ: $[1;2] \cup \{6^{\log_2 6}\}$.

$$\begin{cases} y \ge 80 + x - 7^{80} \\ y \le \log_7 x \end{cases}$$

$7^y \le x$

$y \ge 80 + 7^y - 7^{80}$

$7^y - y \le 7^{80} - 80$

Пусть $f(t) = 7^t - t$, тогда

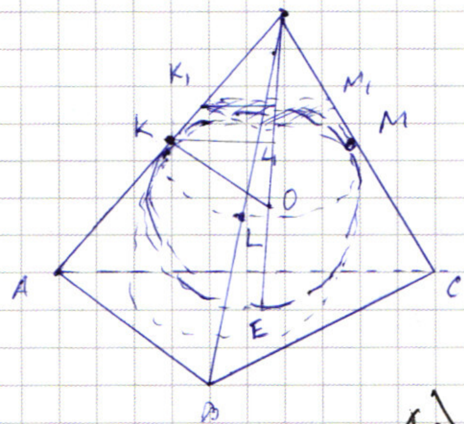
$f(y) \le f(80)$

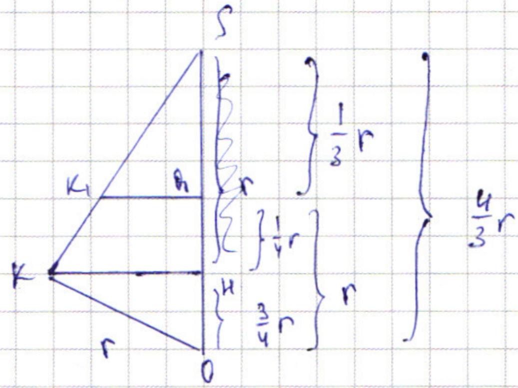
$f'(t) = 0$

$f'(t) = 7^t \cdot \ln 7 - 1$, $\quad t = -\log_7 \ln 7$.

$$\frac{SO}{SK} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{OK}{SK} = \frac{3}{4} \qquad \cos\angle KSO = \frac{\sqrt{7}}{4}$$





$$\frac{KQ_1}{KH} = \frac{\frac{1}{3}r}{\frac{7}{12}r} = \frac{4}{7} \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}r$$

$$S_{KLM} = S_{K_1M_1L_1} \cdot \left(\frac{KH}{K_1Q_1}\right)^2 = \cancel{\frac{4}{4}} \cancel{2} \cdot \cancel{\frac{16}{49}} = 2 \cdot \frac{49}{16} = \frac{49}{8}$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\cancel{AE}}{\cancel{K}} \frac{KH}{AE}\right)^2 = \left(\frac{SH}{SE}\right)^2$$

$$SO = \frac{4}{3}r = 9, \quad \text{то} \quad r = \frac{27}{4}$$

$$SH = \frac{7}{12}r = \frac{63}{16} \qquad SE = SO + OE = SO + r = 9 + \frac{27}{4} = \frac{63}{4}$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SH}{SE}\right)^2 = \left(\frac{63}{16} \cdot \frac{4}{63}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$S_{ABC} = 16 S_{KLM} = 16 \cdot \frac{49}{8} = 98$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SE \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{4} \cdot 98 = \frac{21 \cdot 49}{2} = \boxed{\frac{1029}{2}}$$

49
21
49
98
1029

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

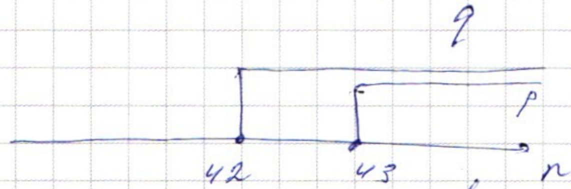
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7\cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60\cdot x^{\sqrt{\log_x 2}} \le 72$$

$$p = \frac{\tilde{A}_2^{27}\cdot C_{70}^{43}}{\tilde{A}_2^{70}} = \frac{2^{27}\cdot 70!}{2^{70}\cdot 43!\cdot 27!} = \frac{70!}{43!\, 27!\cdot 2^{43}}$$

$$q = \frac{\tilde{A}_2^{28}\cdot C_{70}^{42}}{\tilde{A}_2^{70}} = \frac{70!\cdot 2^{28}}{42!\cdot 28!\cdot 2^{70}}$$



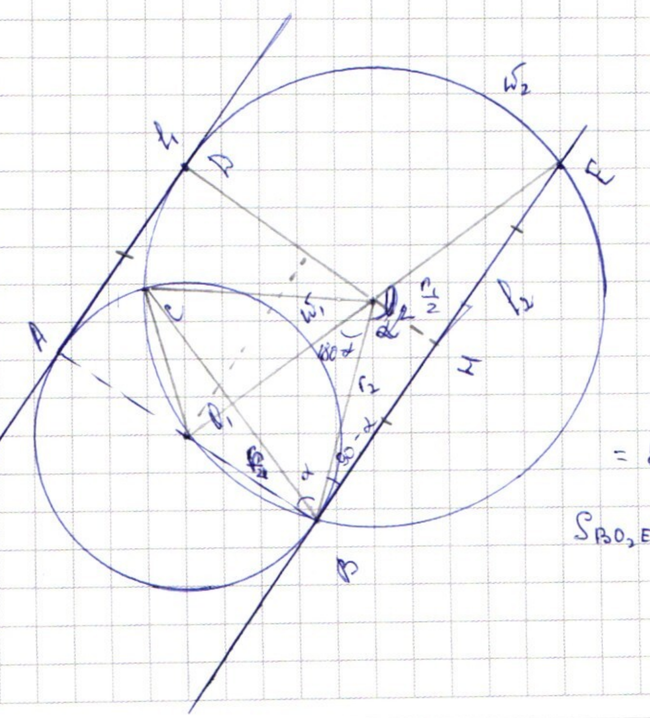
№1 $(q-p)$ – вероятность того, что орел выпадет ровно 42 раза.

$$(q-p) = \frac{C_{70}^{42}}{\tilde{A}_2^{70}} = \frac{70!}{42!\cdot 28!\cdot 2^{70}}$$

Тогда $\boxed{p-q = -\frac{70!}{42!\cdot 28!\cdot 2^{70}}}$?

$S_{BO_2E} = \frac{1}{2} r_2^2.$

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = 3$$



$S_{BO_1CO_2} = r_1 r_2 \sin\alpha$

$S_{BO_2E} = r_1 \frac{r_2}{2} \sin\alpha$

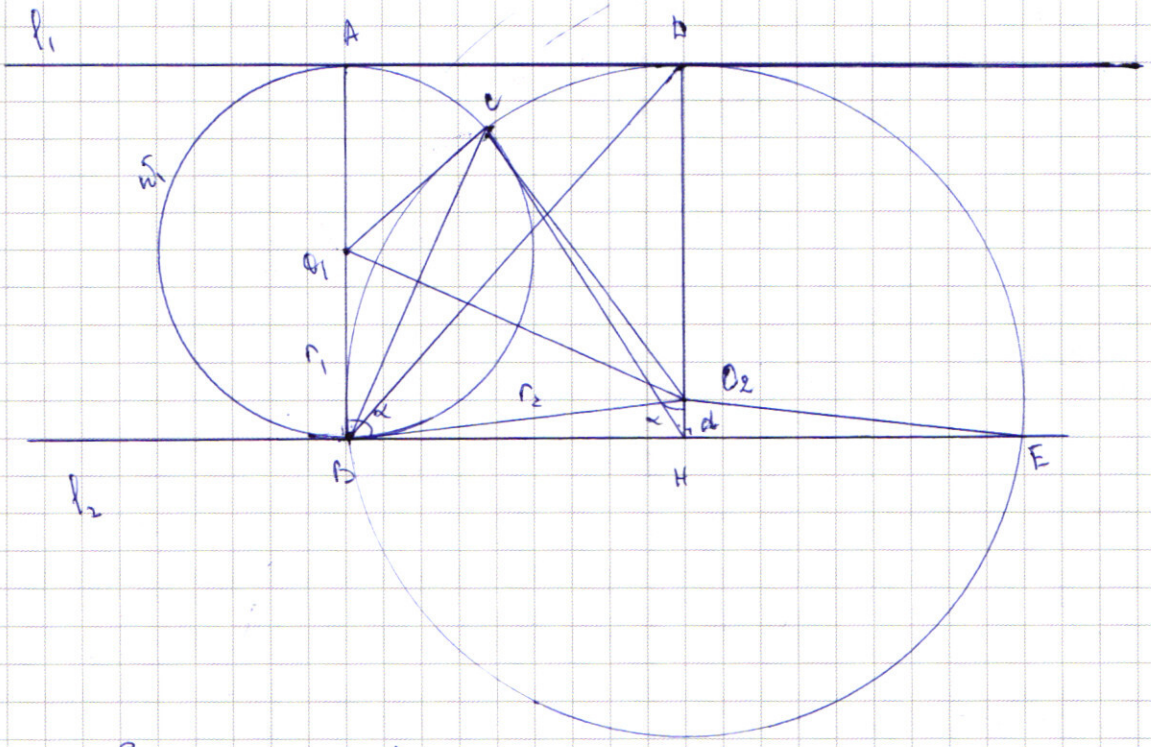
$S_{BO_1CO_2} = 2 S_{BO_1O_2} =$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot r_1 r_2 \sin\alpha$

$S_{BO_2E} = 2 S_{BO_2H} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{r_1}{2}\cdot r_2 \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\alpha$

№6



$S_{BO_1CO_2} = r_1 r_2 \sin\alpha$

$S_{BO_2E} = r_2 d \sin\alpha$

$\frac{r_1}{d} = 3$

$d = \frac{r_1}{3}$

$r_2 + d = 2r_1$

$r_2 = 2r_1 - \frac{r_1}{3} = \frac{5r_1}{3}$ а) $\boxed{\frac{r_2}{r_1} = \frac{5}{3}}$

$DH = 2r_1$

$BO_2 = r_2 = \frac{5}{3} r_1$

$O_2H = d = \frac{r_1}{3}$

$BH^2 = BO_2^2 - O_2H^2 = \frac{25}{9} r_1^2 - \frac{1}{9} r_1^2 = \frac{24}{9} r_1$

$DH^2 = 4r_1^2$

$BH^2 + DH^2 = BD^2 = 9$

$4r_1^2 + \frac{24}{9} r_1^2 = 9$

$36r_1 + 24r_1^2 = 81$

$60r_1^2 = 81$

$20r_1^2 = 27$

$r_1^2 = \frac{27}{20}$

б) $r_1 = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{20}} = \frac{3}{20}\sqrt{60}$

$r_2 = \frac{5}{3} r_1 = \frac{\sqrt{60}}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)