

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

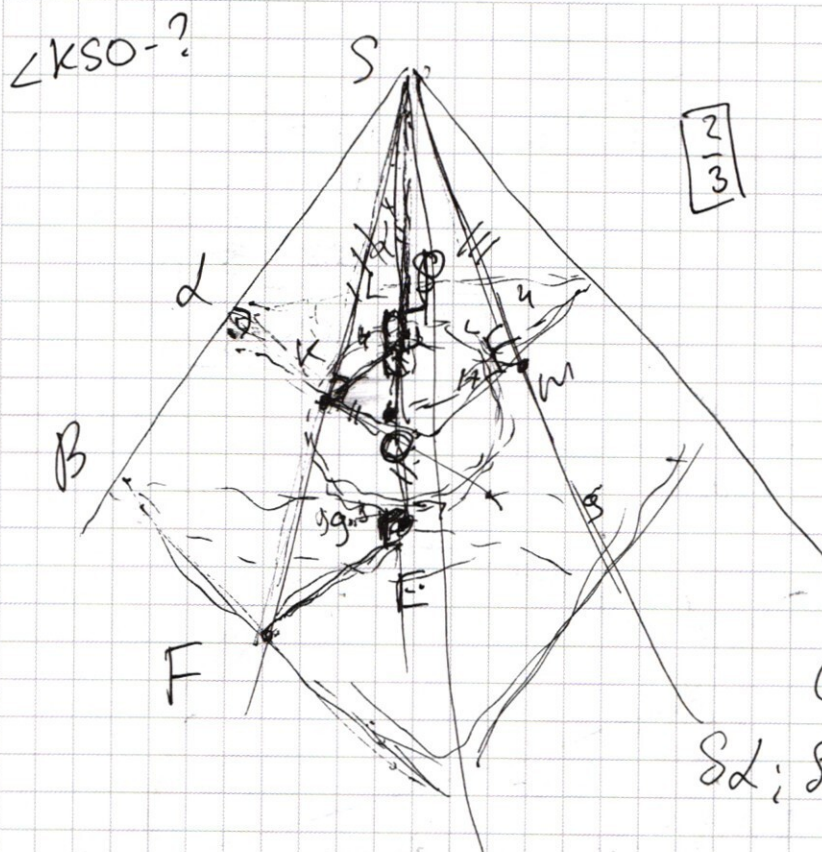
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Проведем $SK, SM,$
 SL , тогда
 $OK \perp SK,$
 $OM \perp SM; OM \perp SL.$
 (т.к. касания).

Проведен сечения
2 и 3
 $SO \perp 2, SO \perp 3$
(по условию)

$$S_{\alpha}; S_{\beta} = 4,9. (\text{по условию})$$
$$S_K \neq S_M = S_L \text{ (нам не дано, из 1 точки)}$$

Можно SO - биссектриса. Пусть L
касается в т. P ; β в т. E . тогда
 $SO \perp OK$; $SO \perp FE$. М. и. L и β можно
заданы единственно (~~по~~ SO , $\beta \perp SO$)
 L, β - касательные к окружности
(сферы) $\Rightarrow$

$$\alpha \sim \beta.$$
$$K_P \parallel F_E (K_P \perp S_O; F_E \perp S_O)$$

Γ, P — прав Γ, E — пролеция Γ, P на β ,

marga $\frac{L_{\text{P}}}{F E} = \frac{2}{3}$

$SKP \sim SFE$ (по абсолютному,
и относительному пробою), тогда

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

a - ?
2 решения.

$$(1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \Leftrightarrow |y-x+6| + |y+x-6| = 12$$

$$|y-(x-6)| + |y+x-6| = 12$$

$$1. y-(x-6) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x-6, \text{ тогда}$$

$$y-(x-6) + y+x-6 = 12 \Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$$

$$2. y-(x-6) < 0 \Leftrightarrow y < x-6, \text{ тогда}$$

$$-y+(x-6) +$$

$$1. \begin{cases} y-(x-6) \geq 0 \\ y+(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$y-(x-6) + y+x-6 = 12 \Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$$

$$2. \begin{cases} y-(x-6) \geq 0 \\ y+(x-6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-6 \\ y < -x+6 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$y-(x-6) - y - x + 6 = 12 \Leftrightarrow -x + 6 - x + 6 = 12 \Leftrightarrow$$

$$x = 6$$

$$3. \begin{cases} y - (x-6) < 0 \\ y + (x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$-y + (x-6) + y + x - 6 = 12 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow \boxed{x = 12}$$

$$4. \begin{cases} y - (x-6) < 0 \\ y + (x-6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < x-6 \\ y < -x+6 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$-y + (x-6) - y - x + 6 = 12 \Leftrightarrow -2y = 12 \Leftrightarrow \boxed{y = -6}$$

$$(2) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a.$$

Если $a < 0$, то решений нет.

$$\text{Если } a = 0, \text{ то } (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0$$

$$\begin{cases} |x|=6 \\ |y|=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \pm 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=6 \text{ } \phi \\ x=-6, \text{ тогда} \end{matrix}$$

$$|y+12| + |y-12| = 12 \quad y = \pm 8 \text{ } \phi$$

Если $a > 0$, то исходное уравнение — четыре окружности радиуса $\sqrt{a} = R$

Построим исход. систему в координатах xOy :

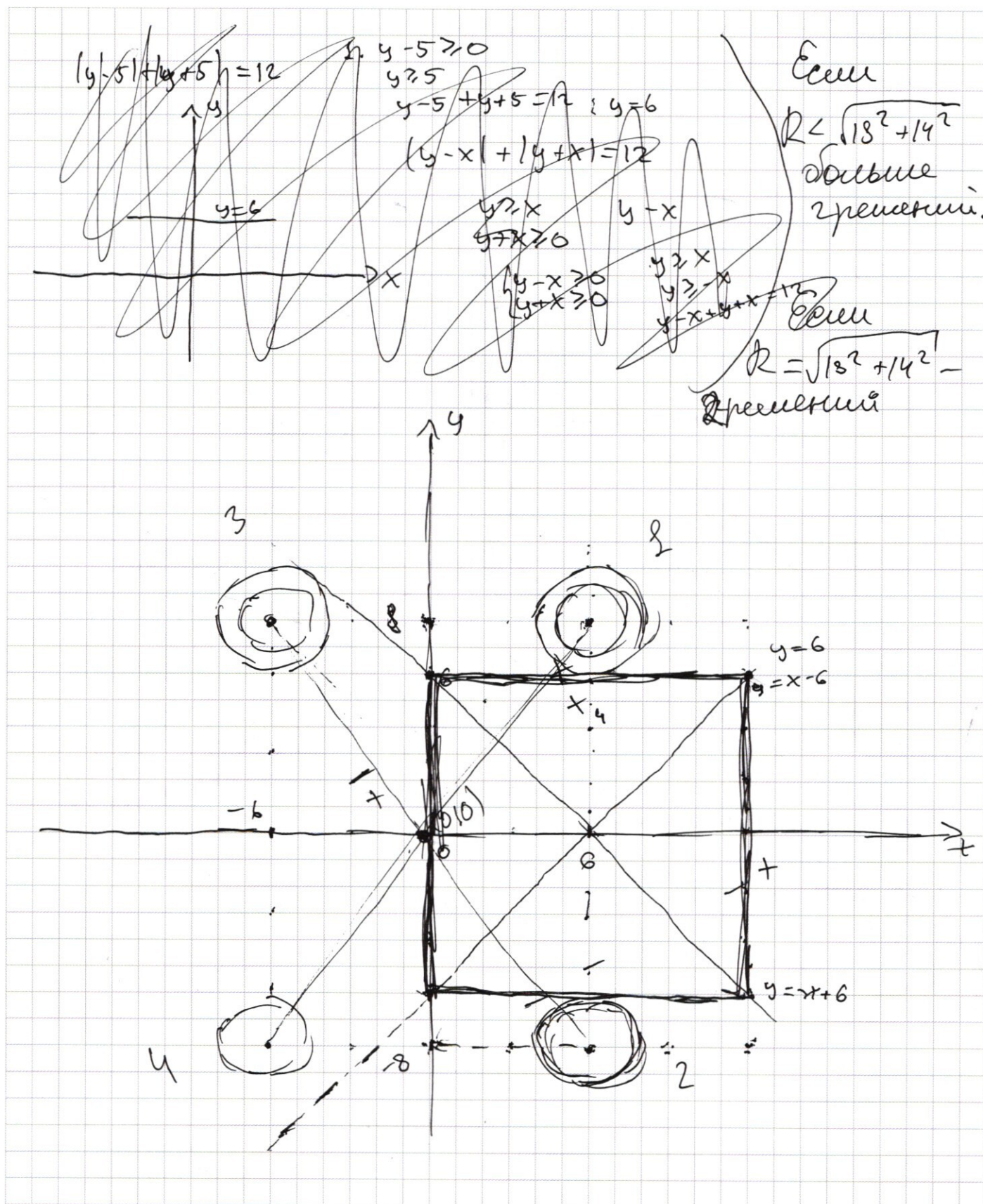
Решения — пересечение графиков.

R	решений
$R < 2$	0
$R = 2$	2
$\sqrt{20} \leq R < \sqrt{32}$	4

Если $R \geq \sqrt{36 + 14^2} = \sqrt{202}$
то окружности 1 и 2 не пересекаются и в-расс.

Если $R \in (2, \sqrt{202})$ больше $\sqrt{36 + 14^2}$ больше 2 решений.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



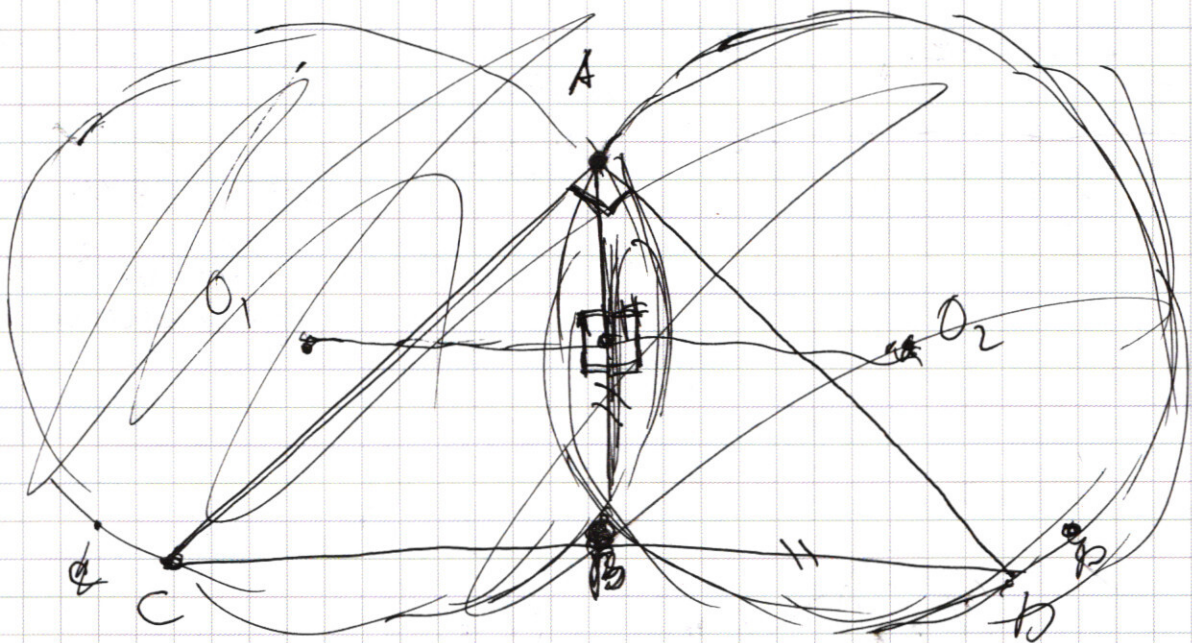
Если $R > \sqrt{18^2 + 14^2}$ меньше 2 радиусами?

Многа $R = 2$ или $R = \sqrt{292}$; или $R = \sqrt{18^2 + 14^2}$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 2 & a = 4 \\ \sqrt{a} = \sqrt{18^2 + 14^2} \Leftrightarrow a = 324 + 196 = 520 \end{cases}$$

Ответ: $a = 4$, $a = 520$

нб.



$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ -xy = x^2 + 4x + 8y - 2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy > 0 \\ (-x) > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy < 0 \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

.....
8 чисел.

В числе 16875 были 4 множителя, т.е. 25-е число, тогда оставшиеся либо 3 тройки, либо 2 тройки и 1 двойка оставшееся - единичное

$$(1) \boxed{13335555}$$

$$(2) \boxed{13915555}$$

и всевозможные перестановки - найдем всевозможные числа.

$$(1) \frac{8!}{3!4!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5}{1} = 70 \cdot 4 = \boxed{280}$$

$$(2) \frac{8!}{1!2!1!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \boxed{840}$$

Тогда $280 + 840 = \boxed{1120}$

Ответ: 1120

№ 3.

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right) = (-x) \lg(-xy) = (-x) \lg(-x) + (-x) \lg y$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

03 :

$$\begin{cases} -x > 0 \\ -xy > 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \\ xy < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \Leftrightarrow$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = \frac{1}{2} \sin 5x \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) \Leftrightarrow$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad (1)$$

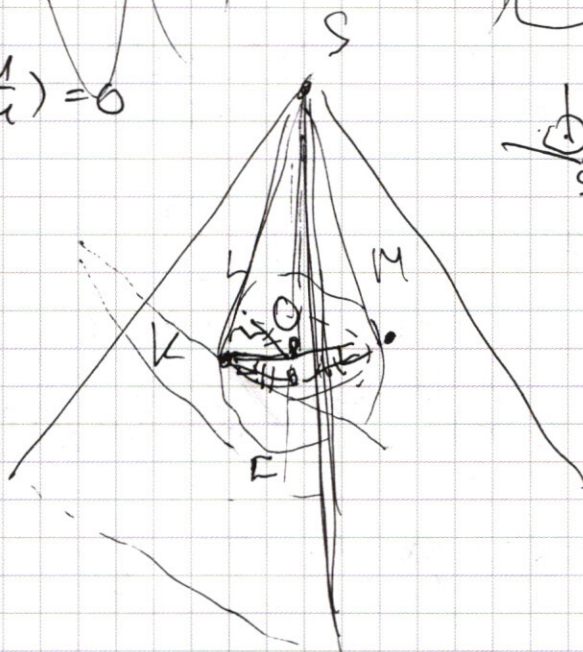
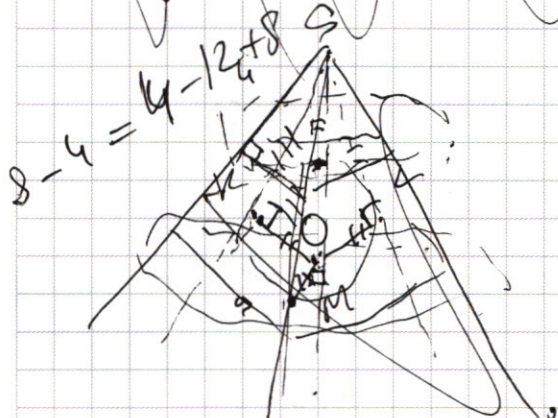
$$\frac{1}{2} \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \cos 5x - \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \frac{1}{2} \cos 2x - \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \quad (\Rightarrow)$$

$$\cos 7x - \sin 7x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 3x - \cos 3x \quad (\Rightarrow)$$

$$\sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 10x = -\sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) \quad (\Rightarrow)$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) - \cos 10x + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x \quad (\Rightarrow)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x \quad (\Rightarrow)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) \quad (\Rightarrow)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \cos(5x - \frac{\pi}{4})) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ \cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(2) -2 \sin \frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k \\ \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{y}{4} = 2nk \\ 7x - \frac{y}{4} = 2mk \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{12} + \frac{2nk}{3} \\ x = \frac{y}{28} + \frac{2mk}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{y}{12} + \frac{2nk}{3}$; $x = \frac{y}{28} + \frac{2mk}{7}$; $x = \frac{y}{20} + \frac{nk}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \lg y = (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ:
 $\begin{cases} -x > 0 \\ -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ xy < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \lg y = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} \\ 2y^2 - 8y - x^2 - 4x = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = \lg(-x)^{\lg(-xy)} \\ 2(y^2 - 4y + 4) - 8 - x^2 - 4x - 4 + 4 = xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

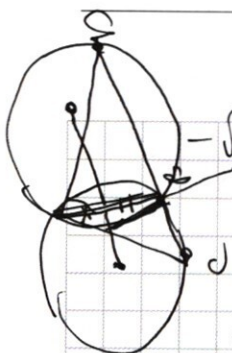
$$\begin{cases} \lg y \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(xy) \cdot \lg(-x) \\ 2(y-2)^2 - 8 - (x+2)^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \lg y \cdot \lg \frac{x^2}{y} = \lg xy \cdot \lg(-x) \\ 2(y-2)^2 - 8 - (x+2)^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \lg y (\lg x^2 - \lg y) = \lg(-x) (\lg(-x) + \lg y) \\ 2(y-2)^2 - 8 - (x+2)^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \lg y \cdot 2 \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(y) \cdot \lg(-x) \\ 2(y-2)^2 - 8 - (x+2)^2 = xy \end{cases}$$

Пусть $a = \lg y$, $b = \lg(-x)$, тогда
 $4ab - 2a^2 = b^2 + ab \Leftrightarrow 2a^2 - 3ab + b^2 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$= \sqrt{2}(\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \frac{1}{2} \cos 5x - \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x =$$

$$\frac{1}{2} \cos 5x \cos 2x$$

$$a+b - \sqrt{2}(a^2)$$

$$a+6\sqrt{2}(ab-cd)=c+d$$

$$a+b-\sqrt{2}ab + \sqrt{2}cd = c+d$$

$$\cos 10x = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x. \quad (a - \sqrt{2}ab + b) = c - \sqrt{2}ad + d$$



$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos(5x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos 5x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 5x \sin \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sqrt{2 \cos(5x)}$$

$$\binom{4}{2} \log_2 = (-x)$$

$$|y-a| + |y+a| = 12$$

$$\begin{array}{r} y-a \\ y+a \\ \hline 2y \end{array}$$

$$3575.5 = 715.5 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{-15} \\ 3575 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -15 \\ \underline{-18} \\ -15 \\ \underline{-37} \\ -35 \\ \underline{-25} \end{array}$$

$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) - \cos(10x + \frac{\pi}{4})$

$$\begin{array}{r} 715 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 21 \\ \underline{20} \\ 15 \end{array}$$

$$\cos 2x \sin 3x = \cos$$

$$\cos 7x - \sin \left(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

$$k_{ab} - 2a^2 = \frac{1}{2} + ab$$
$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$
$$2a^2 - 8b^2 = 6$$
$$P = \frac{96^2 - 8b^2}{u}$$
$$a \cdot z = \frac{96^2 - 8b^2}{u}$$
$$\begin{array}{r} 2 \\ 443 \\ \times 25 \\ \hline 715 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 715 \\ 86 \end{array}$$

$$a = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 3575 \\ \times 715 \\ \hline 17875 \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16875 \overline{) 25} \\ \underline{150} \\ 187 \\ \underline{175} \\ 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ + 196 \\ \hline 520 \end{array}$$

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

гешемини 4. 5

$$(y-12) + (y+12) (-x) (y-xy)$$

$$16875 \div 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{aligned} 2(y^2 - 4y + 4) - 8 \\ -x^2 - 4x - 4 + 4 = xy \\ 2(y-2)^2 - (x+2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 9 & 3 & 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\frac{1}{2} \cos 5x \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 5x \cos 8x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\begin{aligned} y^2 + y^2 - xy + x^2 - 2x^2 - 4x - 8y = 0 \\ 2(y^2 - 4y + 4) - 8 - (x+2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 675 \cdot 5^2 \\ 27 \cdot 25 \cdot 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 9 \\ 3^3 \cdot 5^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 25} \\ \underline{50} \\ 175 \\ \underline{175} \\ 0 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \frac{1}{2} (\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x)) =$$

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) =$$

$$\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x =$$

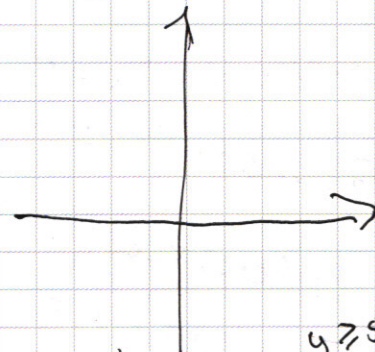
$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1250 \\ + 4375 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\begin{aligned} |y-a| + |y+a| &= 12 \\ 3^3 &= 9 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &\geq a \\ y-a + y+a &= 12 \end{aligned}$$

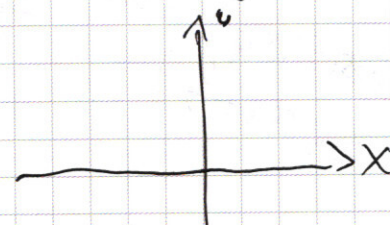
$$\begin{array}{r} 3 \cdot 25 \\ \times 7 \\ \hline 175 \end{array}$$



$$\begin{aligned} y &\geq 5 \\ y-5 + y+5 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 5 \cdot 6 \\ 2 \cdot 40 \\ \times 6 \\ \hline 840 \end{aligned}$$

$$(y-5) + (y+5) = 12$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решим ив-рациональное уравнение.

$$D_a = 36^2 - 86^2 = 6^2 \quad a_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{6^2}}{4} = \frac{36 \pm 6}{4}$$

$\pm 6 \geq 0$, тогда $\lg(-x) \geq 0 \Leftrightarrow \lg(-x) \geq \lg 1 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$

$a_{1,2} = 36 \pm 6$

Скорее всего расширяется через $\pm \Rightarrow$ не
надо строить интервалы

$$\begin{cases} a = \frac{46}{4} \\ a = \frac{26}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = \frac{6}{2} \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \lg y = \lg(-x) \\ \lg(y) = \frac{\lg(-x)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x. (1) \\ y^2 = -x. (2) \end{cases} \text{ Подставим во 2 уравнение.}$$

$$(1) 2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \quad x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} (x < 0) \Rightarrow x = -2$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = 2 \end{matrix}}$$

$$(2) 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow -y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0 \Leftrightarrow y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0 \quad (y \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

Методом подстановки
 $y=2$ - корень

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + 8 & y-2 \\ \underline{y^3 - 2y^2} & \\ 0 + y^2 - 6y & \\ \underline{-y^2 - 2y} & \\ -4y + 8 & \end{array}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D_y = 1 + 16 = 17.$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2 + \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad (y > 0) \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \begin{cases} x = -4 \\ x = -\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{2} = 9 - \sqrt{17}. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 2); (-2; 2); (-4; \frac{1 + \sqrt{17}}{2})$
 $(-4; 9 - \sqrt{17})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \sin 7x + \sin 3x &= \\ \text{№2.} \quad \sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x + \\ \sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x. \end{aligned}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \quad (\Rightarrow)$$

$$\frac{1}{2} \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2} \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x, \quad (\Rightarrow)$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x) = -\sqrt{2} \cos 10x, \quad (\Rightarrow)$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) \quad (\Rightarrow)$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) \quad (\Rightarrow)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \right) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \cos 5x - \sin 5x = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\Rightarrow)$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$$\cos 7x$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{10x + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$-(\cos 3x - \sin 3x) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x &= \\ \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \\ \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x &= \\ \sin 7x + \sin 3x &= \\ \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \cos 4x + \\ \sin 5x \sin 4x - \cos 5x \sin 4x &= \\ \sin 7x + \sin 3x &= \\ \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x + \\ \sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x &= \end{aligned}$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x - \cos 3x$$

$$\cos \sin\left(\frac{11}{2} - 7x\right) - \sin 7x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x - \sin\left(\frac{11}{2} - 3x\right)$$

$$\sin \frac{\frac{11}{2} - 7x - 7x}{2} \cos \frac{\frac{11}{2} - 7x + 7x}{2}$$

$$\sin 3x - \cos 3x.$$

$$\sqrt{2} \cos\left(7x + \frac{11}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{11}{4}\right)$$

$$\cos\left(7x + \frac{11}{4}\right) - \cos 10x = \sin\left(3x - \frac{11}{4}\right)$$

$$\cos\left(7x + \frac{11}{4}\right) - \cos\left(\frac{11}{2} - 3x + \frac{11}{4}\right) - \cos 10x = 0$$

$$\cos \sin\left(3x - \frac{11}{4}\right) - \sin\left(\frac{11}{2} - 7x - \frac{11}{4}\right) = -\cos 10x.$$

$$\sin\left(3x - \frac{11}{4}\right) - \sin\left(\frac{11}{4} - 7x\right) = -\cos 10x.$$

$$2 \sin \frac{3x - \frac{11}{4} - \frac{11}{4} + 7x}{2} \cos \frac{3x - \frac{11}{4} + \frac{11}{4} - 7x}{2} = -\cos 10x.$$

$$2 \sin \frac{11}{4} \cos 2x = -\cos 10x.$$

$$\cos\left(7x + \frac{11}{4}\right) - \cos 10x = \sin\left(3x - \frac{11}{4}\right)$$

$$\cos\left(7x + \frac{11}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{11}{4}\right) = \cos 10x.$$

$$\cos \sin\left(\frac{11}{2} - 7x - \frac{11}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{11}{4}\right) = \cos 10x$$

$$2 \sin \frac{\frac{11}{4} - 7x - 3x + \frac{11}{4}}{2} = \cos 10x$$

$$2 \sin\left(\frac{11}{4} - 10x\right) \cos\left(\frac{11}{2} - 4x\right) = \cos 10x.$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4 + 4 - 8 = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4 - xy = 0$$

$$2y(y-4) - x($$

$$y(2y-x) - x^2 +$$

$$-xy = 2y^2 - x^2 - 4x - 8y$$

$$-xy = x^2 + 4x + 8y - 2y^2$$

$$\frac{(xy)^{\lg y}}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2} \lg y}}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2} \lg y}}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$xy < 0$
$x < 0$
$y > 0$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$