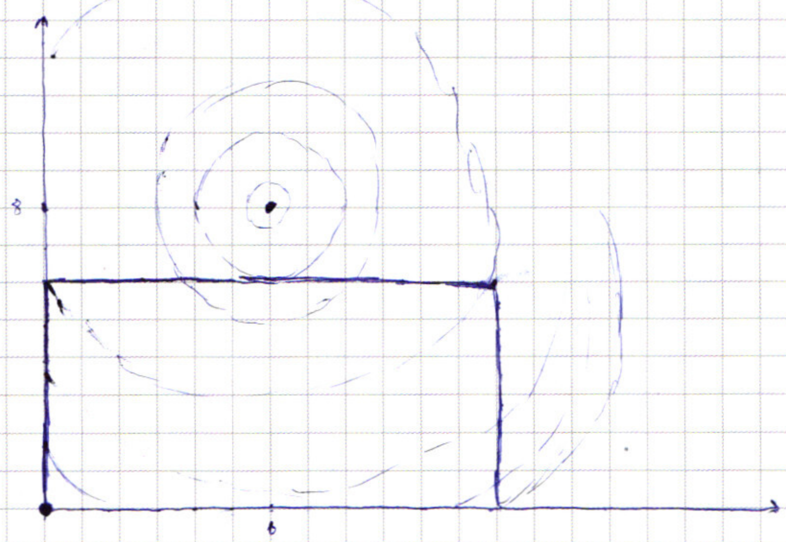


$R \in [0; 2)$ – 0 реш.

$R = 2$ – 1 реш.

$R = (2; 10]$ – 2 реш.

$R \in (10; +\infty)$ – 0 реш.

$R = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$R = 10 \Rightarrow \boxed{a = 100}$

$\boxed{\text{Отв: } 4; 100}$

$625 \cdot 27 = 16875$

$16875 : 25 = 675$, $675 : 25 = 27$

$16875 : 625 = 27$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times\ 27 \\ \hline 4375 \\ 1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

$\boxed{\begin{array}{l} 5555\ 333\ 1 \\ 5555\ 93\ 11 \end{array}}$

1 3 3 3

$\frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4.$

$4! = 24$

$160 \cdot 7 = 1120$

1 2 3

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

6 $3! = 6.$

1 1 2

1 1 2
1 2 1
2 1 1

3 $\frac{3!}{2}$

~~1 1 1~~ 1 2 3 4

1 2 33

$$N = \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 5 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 =$$
$$= 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 7 \cdot 8 = 160 \cdot 7 =$$
$$= \boxed{1120}$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР ____ 2 0 0 0 8 6 4 4

Запо

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + \left(3^{81} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Заметим, что $16875 = 5^4 \cdot 3^3$. Есть только 2 набора из 8 цифр, произведение которых даст 16875:

$\{5; 5; 5; 5; 3; 3; 3; 1\}$ (1) и $\{5; 5; 5; 5; 9; 3; 1; 1\}$ (2)

Рассмотрим набор (1): из данного набора можно получить $8!$ комбинаций. Но т.к. в данном наборе цифра 5 повторяется 4 раза, а цифра 3 – 3 раза, то каждое искомое восьмизначное число встретится $4! \cdot 3!$ раз. Тогда получим, что из данного набора можно получить $\frac{8!}{4! \cdot 3!}$ ~~раз~~ искомых чисел.

Аналогичные рассуждения показывают, что из набора (2) можно получить $\frac{8!}{4! \cdot 2!}$ искомых чисел.

Значит итоговое количество будет равно $\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} =$

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 5 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 20 \cdot 7 \cdot 8 = 160 \cdot 7 = 1120.$$

Ответ: 1120.

№2. 1) $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \Leftrightarrow$

$\cancel{\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos^2 5x - \sin^2 5x\right) - 2\cdot\sin\left(\frac{7x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x}{}\right.}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\cos^2 5x - \sin^2 5x\right) - 2\sin\left(\frac{7x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) - 2\sin 5x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos 5x - \sin 5x)\left(2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

2) Рассмотрим уравнение (1): $\cos 5x - \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \cos 5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 5x = 1 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z.$

3) Заметим, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

Рассмотрим уравнение (2):

$2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \\ 2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k,\ k \in Z \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3},\ m \in Z \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in Z \end{array}\right.$$

4) Решением совокупности уравнений (1) и (2) является совокупность решений, полученных в пунктах 2) и 3)

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z;\ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3},\ m \in Z;\ \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in Z.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$

1) Рассмотрим ОДЗ системы:

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^2} > 0 \\ y > 0 \\ -x > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

2) Рассмотрим уравнение (2): $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y^2 + xy - 2xy - x^2 - 8y - 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(2y+x) - x(2y+x) - 4(2y+x) = 0 \Leftrightarrow (y-x-4)(2y+x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y + x = 0 \\ y - x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2y \\ x = y - 4 \end{array}\right.$$

Тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ \left[\begin{array}{l} x = -2y \\ x = y - 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ x = -2y \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ x = y - 4 \end{cases} & (4) \end{array}\right.$$

3) Рассмотрим систему (3) на ОДЗ:

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)} \Leftrightarrow \lg y \cdot \lg(16y^2) = \lg(2y^2)\cdot \lg(2y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg y(\lg 16 + 2\lg y) = (\lg 2 + 2\lg y)(\lg 2 + \lg y)$$

Пусть $\lg 2 = a$; $\lg y = t$, тогда

$$t(4a+2t) = (a+t)(a+2t) \Leftrightarrow 4at + 2t^2 - a^2 - at - 2at - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow at - a^2 = 0 \Leftrightarrow t = a \Rightarrow \lg y = \lg 2 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4. \end{cases}$$

Решение $(-4; 2)$ ~~подходит по ОДЗ~~. ~~удо~~ удовлетворяет ОДЗ.

4) Рассмотрим систему (4) на ОДЗ:

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ x = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg y \cdot \lg\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right) = \lg((4-y)y)\cdot \lg(4-y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg y(4\lg(4-y) - 2\lg y) = (\lg(4-y) + \lg y)\lg(4-y)$$

Пусть $\lg(4-y) = k$, $\lg y = l$, тогда

$$l(4k - 2l) = (k+l)k \Leftrightarrow 4kl - 2l^2 - k^2 - kl \overset{=0}{\Leftrightarrow} k^2 - 3kl + 2l^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k-2l)(k-l) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2l \\ k = l \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lg(4-y) = 2\lg y \\ \lg(4-y) = \lg y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - y = y^2 \\ 4 - y = y \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{17}-1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{17}-9}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение $(-2;2)$ удовлетворяет ОДЗ.

Решение $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2};\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$ удовлетворяет ОДЗ

Решение $\left(\frac{-\sqrt{17}-9}{2};\ \frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right)$ не удовлетворяет ОДЗ.

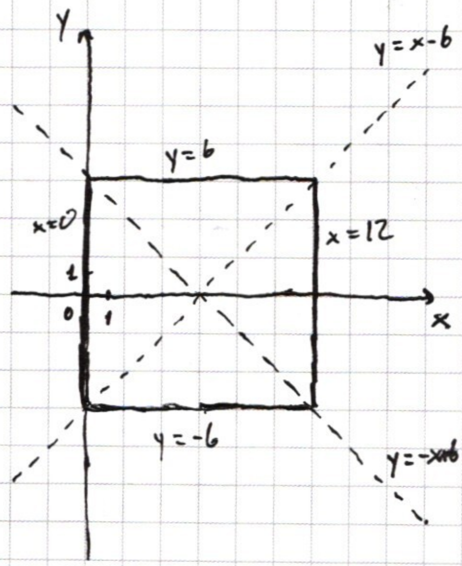
Ответ: $(-4;2)$; $(-2;2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2};\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

№5. $\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 & (1) \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a & (2) \end{cases}$ ровно 2 решения

1) Рассмотрим уравнение (1):

$|x-6-y|+|x-6+y|=12 \Leftrightarrow |y-(x-6)|+|y-(-x+6)|=12 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \\ y-x+6+y+x-6=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq x-6 \\ y < -x+6 \\ y-x+6-y-x+6=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x-6 \\ y < -x+6 \\ -y+x-6-y-x+6=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x-6 \\ y \geq -x+6 \\ -y+x-6+y+x-6=12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq x-6 \\ y < -x+6 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x-6 \\ y < -x+6 \\ y=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x-6 \\ y \geq -x+6 \\ x=12 \end{cases} \end{array}\right.$$



Графиком уравнения (1) является квадрат с вершинами в точках $(0;6)$; $(12;6)$; $(12;-6)$; $(0;-6)$.

2) Рассмотрим уравнение (2): $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a$.

~~При~~ Рассмотрим его график в I четверти координатной плоскости:

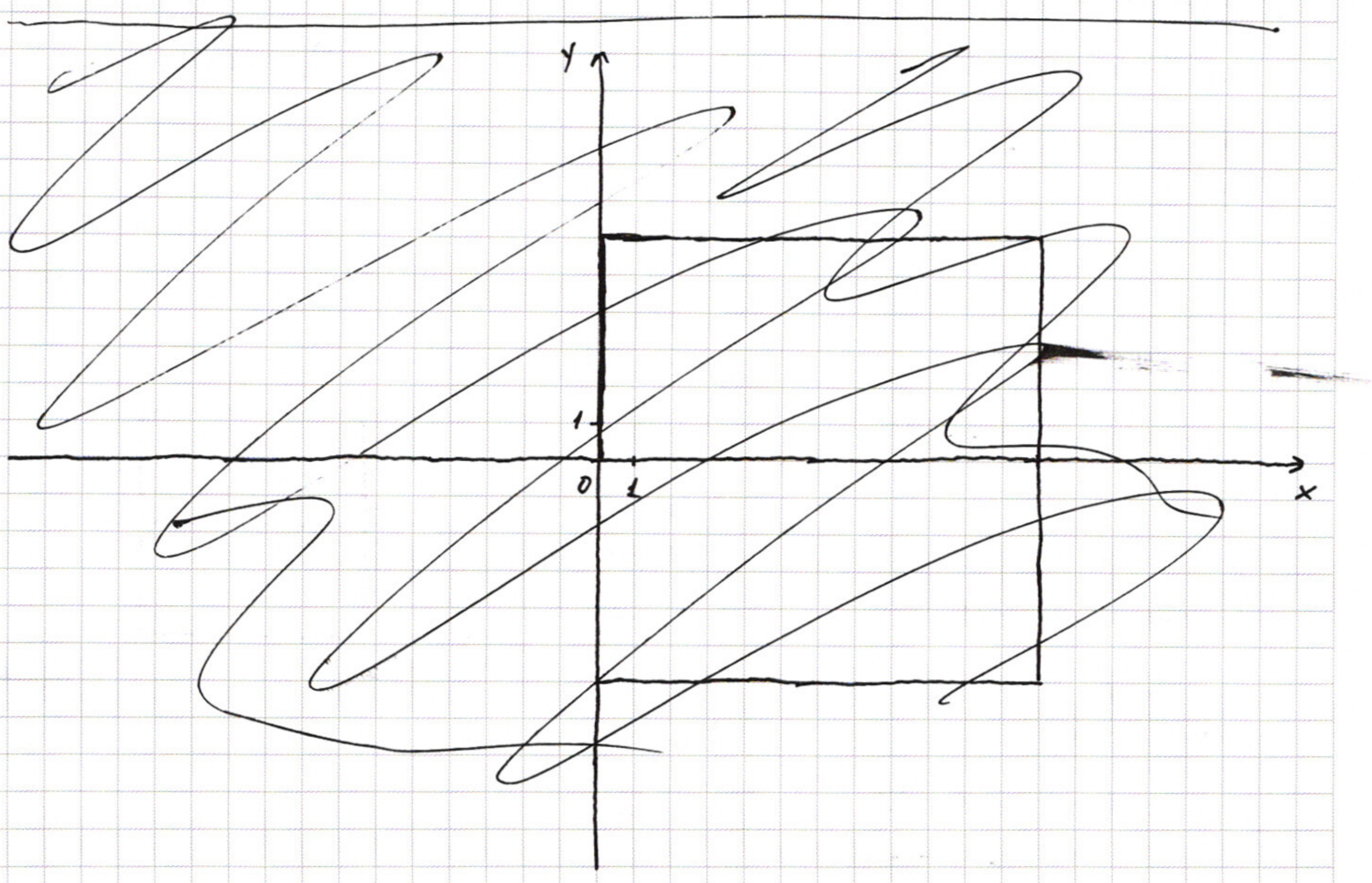
При $a<0$ уравнение (2) не имеет решений

При $a=0$ графиком является точка $(6;8)$

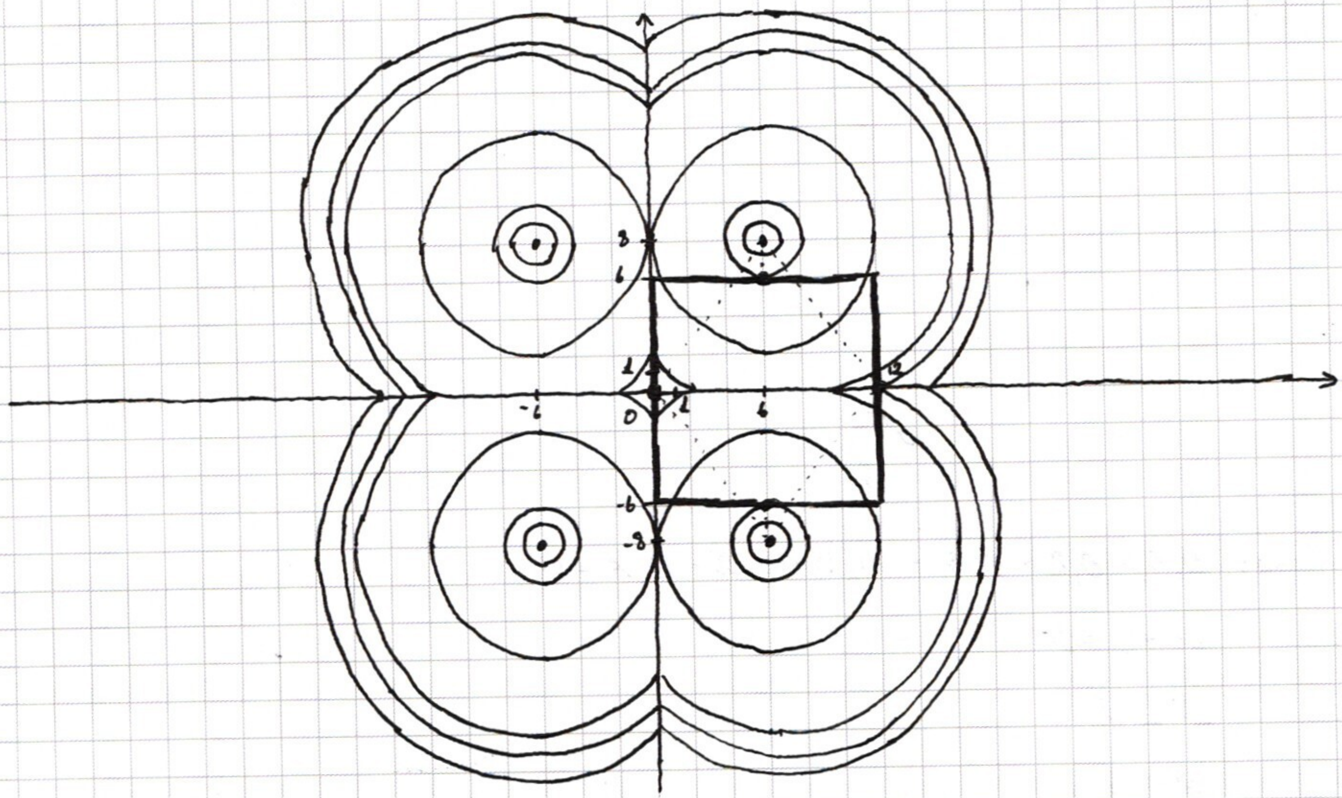
При $a>0$ графиком является часть окружности с центром в точке $(6;8)$ и радиусом $\sqrt{a}$, принадлежащая I четверти.

График уравнения в других четвертях симметричен графику в I четверти.

3) Найдём графически количество решений системы в зависимости от параметра a:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



При $a \in [0;4)$ – нет решений.

При $a=4$ – 2 решения в точках $(6;-6)$ и $(6;6)$

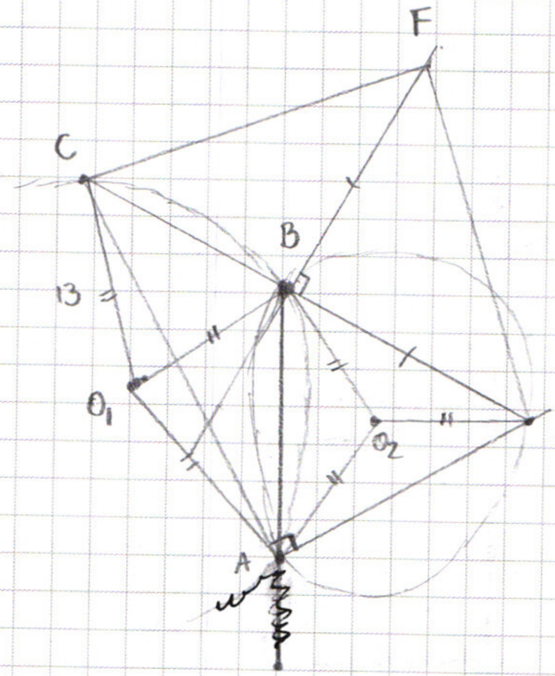
При $a \in (4;100)$ – 4 решения

При $a=100$ – 2 решения в точках $(0;0)$ и $(12;0)$

При $a \in (100;+\infty)$ – нет решений.

Ответ: 4; 100.

№6.



Дано: $O_1C = O_1B = O_1A = O_2D = O_2B = O_2A = 13$

$\angle CAD = 90°$

$BF \perp CD$

$BF = BD$

Найти: а) CF

б) $S_{\triangle ACF}$, если $BC = 10$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$-1=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi=2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\pi}{2}\right)=\cancel{2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\quad 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt2}{2}=-1$$

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\cos10x=\cos^2 5x-\sin^2 5x=$$
$$=(\cos5x-\sin5x)(\cos5x+\sin5x)$$

$$\cos7x+\cos3x-\sqrt2\cos10x=\sin7x-\sin3x$$

$$2\cos5x\cdot\cos2x-\sqrt2\cos10x=2\sin5x\cos2x$$

$$2\cos2x(\cos5x-\sin5x)-\sqrt2\cos10x=0.$$

$$2\cos2x(\cos5x-\sin5x)-\sqrt2(\cos5x-\sin5x)(\cos5x+\sin5x)=0$$

$$(\cos5x-\sin5x)(2\cos2x-\sqrt2\cos5x-\sqrt2\sin5x)=0.$$

1) $\cos5x-\sin5x=0$

$\operatorname{tg}5x=1$

$5x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z}$

2) $2\cos2x-\sqrt2\cos5x-\sqrt2\sin5x=0.$

$2\cos2x-\sqrt2(\cos5x+\sin5x)=0$

$2\cos2x-2\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\cos2x=\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

$2x=\pm\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k,\ k\in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z;$ $\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in Z;$ $\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi m}{3},\ m\in Z.$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\right)=2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=5x-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z\\ 2x=-5x+\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

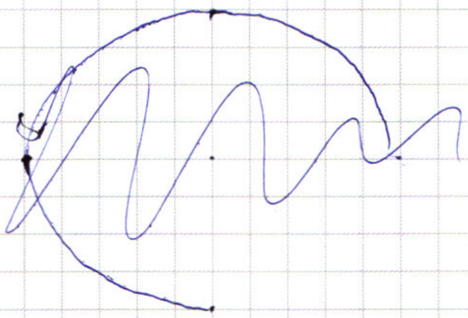
$$\left[\begin{array}{l}-3x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z\\ 7x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in Z\end{array}\right.$$

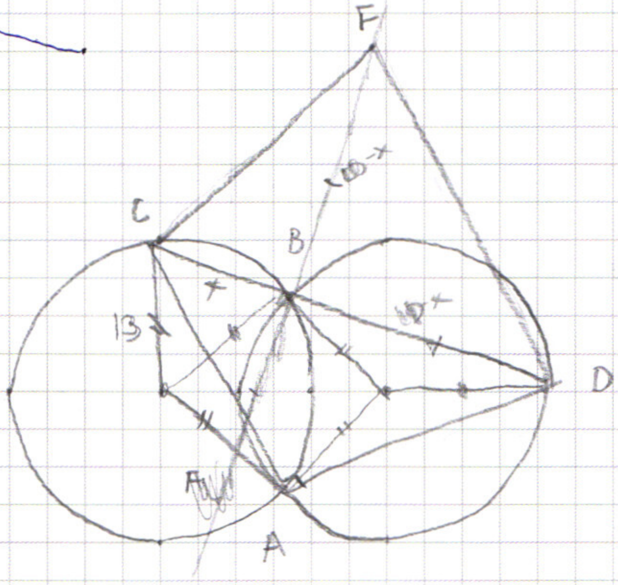
$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi m}{3},\ m\in Z\\ x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in Z\end{array}\right.$$

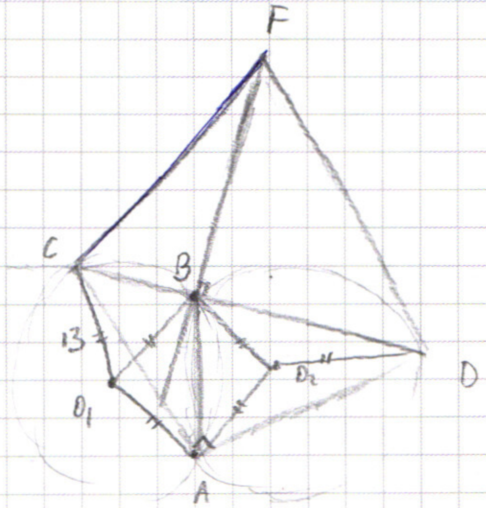
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



R=13





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16875 : 25 = 675$, $675 : 25 = 27$

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

5555	333	1
5555	9 3	11

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$

$D = (x+8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-x^2 - 4x) =$

$= x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$

$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$

$y = \dfrac{x+8 \pm (3x+8)}{4}$

$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x+8+3x+8}{4} \\ y = \dfrac{x+8-3x-8}{4} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{4x+16}{4} \\ y = \dfrac{-2x}{4} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y = x+4 \\ y = -\dfrac{x}{2} \end{array}\right.$

$(y - x - 4)(2y + x) = 0.$

$\cancel{2y^2 - 2xy - 4y + xy - x^2 - 2x}$

$2y^2 - 2xy - 8y + xy - x^2 - 4x = 0$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{y(2y} \; 2y^2 + xy - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(2y+x) - x(2y+x) - 4(2y+x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y - x - 4)(2y + x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y - 4 & (1) \\ x = -2y & (2) \end{array}\right.$

2) $\left(\dfrac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$

ОДЗ:

$\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2} > 0 \\ y > 0 \\ -x > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}} \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

2) $x = -2y$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$\lg(16y^2)\cdot \lg y = \lg 2y \cdot \lg(2y^2)$$

$$\cancel{(\lg 16 + 2\lg y)\lg y = (2+\lg y)(2+2\lg y)}$$

$$(\lg 16 + 2\lg y)\cdot\lg y = (\lg 2 + \lg y)(\lg 2 + 2\lg y)$$

Пусть $\lg 2 = a$; $\lg y = t$

$$(4a+2t)t = (a+t)(a+2t)$$

$$4at + 2t^2 - a^2 - at - 2at - 2t^2 = 0$$

$$at - a^2 = 0$$

$$t = a$$

$$\lg y = \lg 2$$

$y = 2 \Rightarrow x = -4$ – подходит по ОДЗ.

Ответ: $(-1;1)$; $(-4;2)$

$D = 1 - 4\cdot(-4) = 17$

$y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $\quad y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

$y^2 + y - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \to x = \frac{\sqrt{17}-7}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ — не в ОДЗ} \end{array}\right.$$

1) $x = y - 4$. ОДЗ: $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y < 4$.

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)y)}$$

$$\lg\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)\cdot \lg y = \lg(4-y)\cdot \lg((4-y)y)$$

$$(4\lg(4-y) - 2\lg y)\cdot \lg y = \lg(4-y)\cdot(\lg(4-y) + \lg y)$$

~~4lg~~ Пусть $\lg(4-y) = k$, $\lg y = l$, тогда

$$(4k - 2l)l = k(k+l)$$

$$4kl - 2l^2 - k^2 - kl = 0$$

$$k^2 - 3kl + 2l^2 = 0$$

$$(k-2l)(k-l) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} k = 2l \\ k = l \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \lg(4-y) = 2\lg y \\ \lg(4-y) = \lg y \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 4 - y = y^2 \\ 4 - y = y \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y^2 + y - 4 = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

$\to (-2;2)$ ✓

не подходит по ОДЗ.

$$\left[\begin{array}{l} y = -2 \ \text{~~не по~~} \\ y = 1 \end{array}\right.$$

$\to \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ ✓

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)