

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{(N_1)} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{(N_2)} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$N = N_1 + N_2$$

$$N_1 = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} \cdot 4 = 280$$

$$N_2 = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot 2 = 12 \cdot 70 = 840$$

$$N = 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120 вариантов

5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (A) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-3)^2 = a & (B) \end{cases}$$

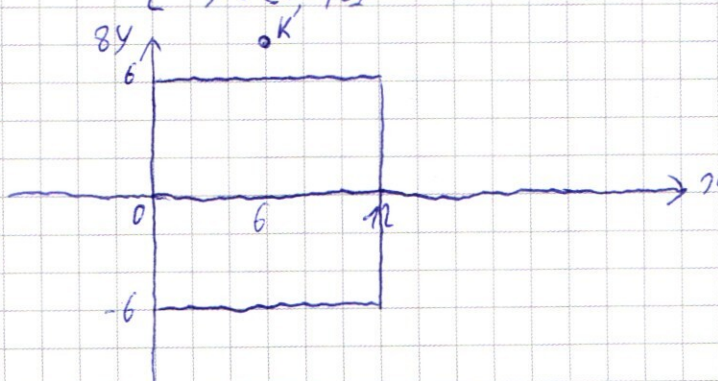
$$(B)$$

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} : (A) \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ -6 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} : (A) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -6 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x-6-y > 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} : (A) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-6 \\ x \in (0, 12) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} : (A) \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x \in (0, 12) \end{cases}$$



5) Уравнение (5) - уравнение окружности где x и y входят под модулем. ~~8~~ Значит верхняя и нижняя части графика симметричны относительно Ox . График уравнения (4) тоже симметричен относительно Ox . Значит если есть пересечение в первой четверти, то точно будет в 4.

6) П.к. т. К лежит на оси симметрии графика А, перпендикулярной Ox , то в первой четверти всегда будет 2 пересечения ^{или 0} кроме касания окружности с ц. в. т. к (5) и верхней стороны квадрата (А).

7) ~~Уравнение~~ ~~Уравнение~~ ~~Уравнение~~ $x_{кас} = x_k$
 $y_{кас} = \sqrt{6} - 6$
 $a = 8 + (y_{кас} - 6)^2 = 4$

8) Удобнее рассмотреть пересечение на Ox . К равноудалены от точек $(0;0)$, $(12;0)$, они являются точками пересечения.

$$a = x_k^2 + y_k^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

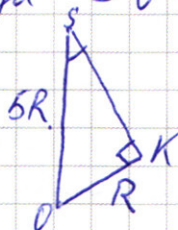
Ответ: $a = 4; 100$.

и

1) Сечения трехгранного угла и сами этот угол образуют 2 подобных тетраэдра с площадями оснований 2 и 3.

т. М ∈ верхней основанию, т. N - нижней. тогда $SM = 2x$
 $SN = 3x$, $R = 0,5x$. тогда $SO = 5R$.

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓1.

$$\begin{array}{r|l}
 16875 & 5 \\
 3375 & 5 \\
 675 & 5 \\
 135 & 5 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 =$$

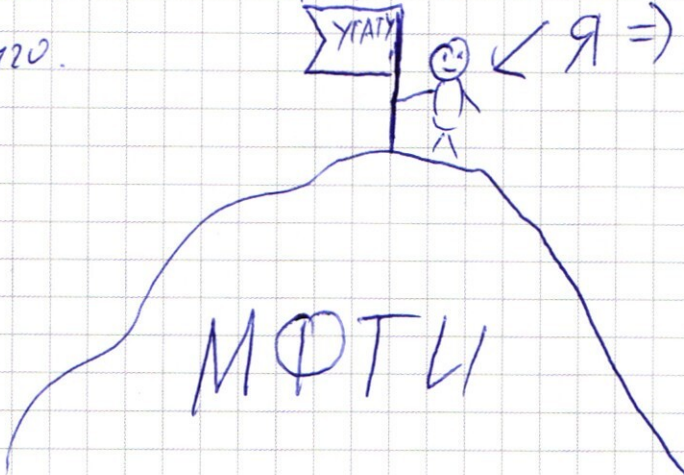
$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

$$N = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 4 + \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 4 \cdot 3 = 70 \cdot 4 + 70 \cdot 4 \cdot 3 = 70 \cdot 16 = 1120$$

Ответ: 1120

✓5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$$


$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2y = 12 \quad y = 6 \\
 & \quad \quad \quad x < 12 \quad x > 0 \quad x \in (0, 12) \quad y = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) & \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} + y = -6 \\
 & \quad \quad \quad x \geq 0 \quad x < 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) & \begin{cases} x-6-y > 0 \\ x-6+y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 24 \quad y < 6 \\
 & \quad \quad \quad x = 12 \quad y > -6 \quad x = 6; y \in (-6, 6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) & \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 12 - 2x = 12 \\
 & \quad \quad \quad x = 0 \quad y \leq 6 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad y > -6
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a+b-\sqrt{2ab} = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} - \sqrt{2} \sqrt{ab}$$

$$a+b-\sqrt{2ab} = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} - \sqrt{2} \sqrt{ab} \sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}$$

$$x^4 = (-x)^{4 - \lg(-x)} \cdot y^2$$

$$(-x)^{4 - \lg(-x)} = y^2$$

$$(-x)^{2 - \lg \sqrt{-x}} = y$$

$$y = \frac{x^2}{(-x)^{2 - \lg \sqrt{-x}}}$$

$$(-x)^{4 - \lg(-x)} = y^2$$

$$x=4$$

$$(3^x)$$

$$85 + 3^{81}$$

$$85 + 3^{81} x - x \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 - x - 3^x + 3^{81} (x - 4) \geq 0$$

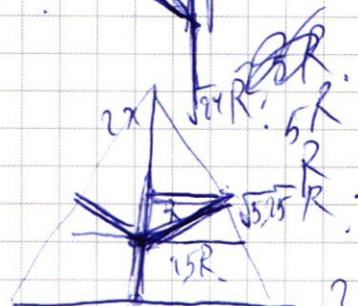
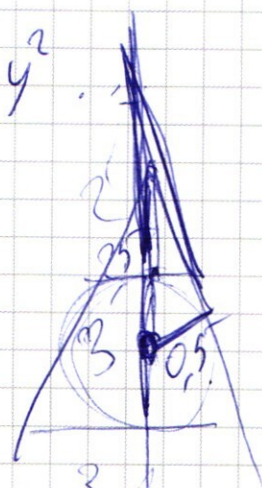
$$x=81$$

$$85 - 81 - 3^{81} + 3^{81} \cdot 81 - 3^{81} \cdot 4$$

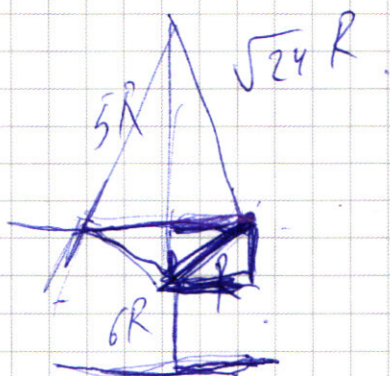
$$4 + 3^{81} (81 - 4)$$

$$85 - (81 + k) - 3^k \cdot 3^{81} + 3^{81}$$

$$(4 - k) + 3^{81} (81 + k - 4 - 3^k) = 0$$



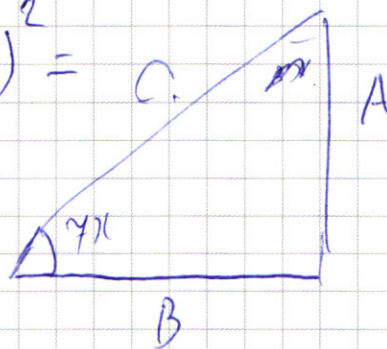
$$\frac{S_{KLM}}{S_B} = \frac{\left(\frac{4R}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{4R}{\sqrt{5}}\right)^2}$$



$$\left(\frac{\sqrt{24}}{5}R\right)^2 + ch^2 = R^2$$

$$\frac{24}{25}R^2 \quad \angle h = \frac{1}{5}R$$

$$S = (2,3) = C$$



$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 522 \end{array}$$

2cos

$$\cos 71^\circ + \cos 31^\circ = \sqrt{2}$$

81.

~~81~~

~~85R~~

~~81~~

81. 41.

x81

81.

$\frac{B}{C} +$

~~81~~

K.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) SK = \sqrt{SO^2 - OK^2} = \sqrt{24} R.$$

КН - высота к SO.

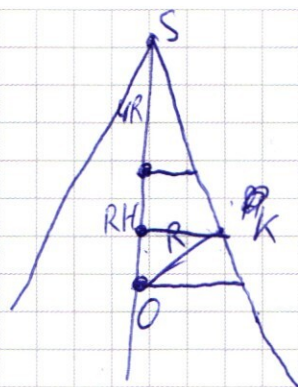
$$KN = \sin \angle KSO \cdot \sqrt{24} R = \frac{\sqrt{24}}{5} R.$$

$$OH = \sqrt{OK^2 - KN^2} = \frac{R}{5}.$$

$$SH = SO - OH = 5R - \frac{R}{5} = 4,8R.$$

$$3) S_{KLM} = \left(\frac{SH}{ST} \right) \cdot S_{бок.} = 5,76$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}$; $S_{KLM} = 5,76$.



7.

$$1) 3^{x_0} + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x_0.$$

$$(85 - x_0 - 3^{x_0}) + 3^{81}(x_0 - 4) = 0.$$

$$x_0 = 4.$$

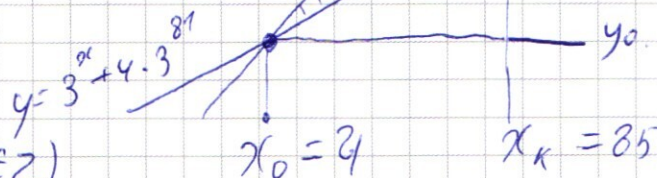
$$2) x_k = 81 + k \text{ где } (k \in \mathbb{Z})$$

$$3^{81} \cdot 3^k + 4 \cdot 3^{81} = 85 - 81 - k + (81 + k) \cdot 3^{81}.$$

$$3^{81}(3^k + 4 - 81 - k) = 4 - k$$

$$k = 4.$$

$$x_k = 85.$$



3) Назовем N_1 - кол-во точек удовл. $y < 85 + (3^{81} - 1)x$.
с которыми увеличением x на единицу кол-во точек
увеличивается на $(3^{81} - 1)$. $N_1 = (3^{81} - 1) \cdot \frac{0 + (85 - 4)}{2} (85 - 4 + 1) =$
 $41 \cdot 81 (3^{81} - 1)$

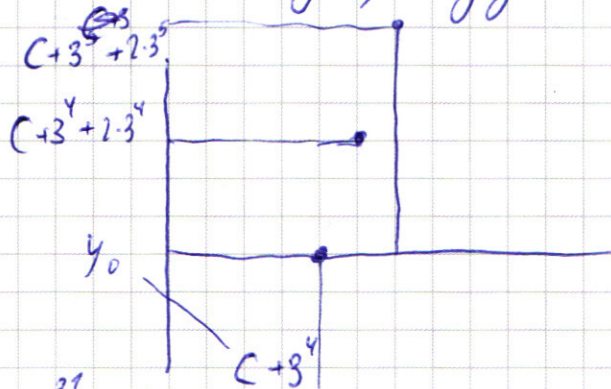
2) N_2 - как - то точка над y_0 удовн. $y \geq 3^x - 4 \cdot 3^{81}$.

$y_0 = 81 + 3^{81} \cdot 4$
разница между $x=4$ и $x=5$.

$N_2 = 2y_0 \cdot \frac{2y_0 \cdot (3^{80} - 1)}{2} = y_0 \cdot (3^{80} - 1)$ (геом. прогрессия)

$N = N_1 - N_2 =$

2. N_2 - как - то точка над y_0 удовн. $y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$



$$N_2 = \frac{2 \cdot 3^4 \cdot (3^{81} - 1)}{2} = 3^4 \cdot (3^{81} - 1)$$

$$N = N_1 - N_2 = (3^{81} - 1) (41 \cdot 81 - 3^4) = 3240 \cdot (3^{81} - 1)$$

Ответ: $3240 \cdot (3^{81} - 1)$



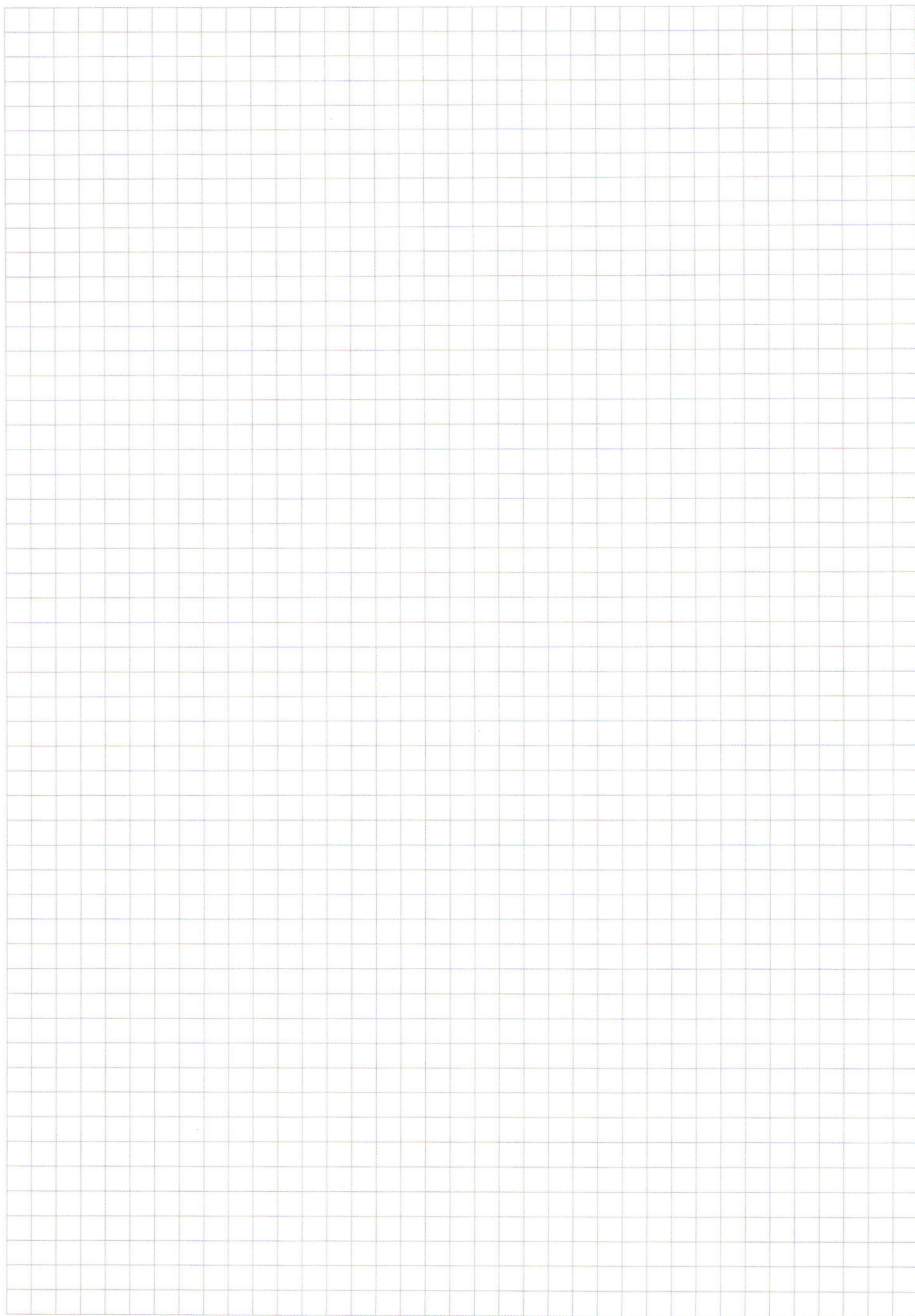
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)