

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МЛ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{5.} \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ при } \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$$

$$x = 12$$

$$\text{при } \begin{cases} y < x-6 \\ y < 6-x \end{cases}$$

$$y = -6$$

(1) - графиком явл. квадрат сторона=12

$$(2) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$\text{при } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \text{ окружность}$$

радиусами

центр $O_1(-6; -8)$

$$\text{при } \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ окр. с центром}$$

$O_3(-6; 8)$

радиусами

$$\text{при } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ окр.}$$

радиусами

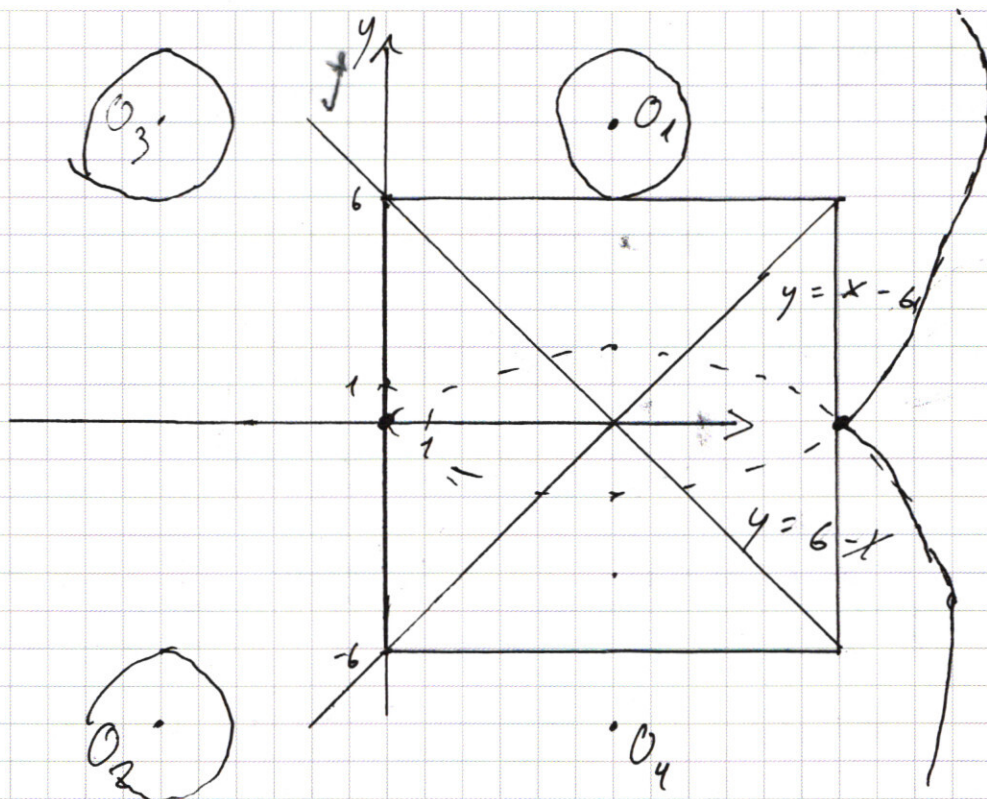
центр $O_2(6; 8)$

$$\text{при } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \text{ окр.}$$

радиусами

с центром

$O_4(6; -8)$



для окр. с ц. $O_2; O_3$ $y < 0$
 при $a = 4$ окр. с ц. O_1 и O_4 касаются
 квадрата окр. с ц. O_1 и O_4 и
 при $a > 4$ окр. имеет 2
 точки пересечения при $a = 6^2 + 6^2 = 100$
 эти точки совпадут ($\rho(O_1; (0; 0)) = \rho(O_4; (12; 0)) =$
 $= \rho(O_4; (0; 0)) = \rho(O_4; (12; 0)) = 10$) (ρ - расстояние)
 Ответ: $\{4; 100\}$.

З1. $16845 = 5^5 \cdot 3^3$
 Набор ^{возможных} цифр. N - число чисел

1) 5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3

2) 5, 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1.

$$N = N_1 + N_2 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} + \frac{8!}{5!} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 8}{3 \cdot 2} + 6 \cdot 4 \cdot 8 =$$

$= 382$. Ответ: 382

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cdot \cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$(\cos 4x - \sin 4x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 4x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 4x \right) + \left(\cos \sin \frac{\pi}{4} \cos 3x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) = \cos 10x$$

$$2 \cos \frac{10x - 4x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{14x - \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 3x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 3x}{2}$$

$$\sin \left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \left(\sin \frac{14x - \frac{\pi}{4}}{2} - \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 3x}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \left(\sin \frac{14x - \frac{\pi}{4}}{2} - \cos \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{14x}{2} \right) \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \left(\sin \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{14x}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{3x}{2} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{14x}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \left(\sin \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{14x}{4} \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{3\pi}{8} - \frac{14x}{4} = \pi k, \quad n, k, z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{4} - 5x = \pi z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{28\pi k}{43} + \frac{3\pi}{28}, \quad k, z \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi z}{5} + \frac{\pi}{20} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi k}{43} + \frac{3\pi}{28}, \frac{\pi z}{5} + \frac{\pi}{20} \right\}$
 $n, k, z \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 4}} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4y - 8y = 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 4} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad \text{① ② ③} \quad \begin{cases} -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 4} = \lg(-x)^{\lg(-xy)} \Rightarrow \begin{matrix} y > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$\lg 4 (4 \lg x - 2 \lg y) = (\lg(y) + \lg(-x)) \lg(-x)$$

$$4 \lg(x) \cdot \lg y - 2 (\lg^2 y) = (\lg(-x))^2 + \lg(y) \lg(-x)$$

$$(\lg(-x))^2 - 3 \lg(-x) \lg y + 2 (\lg y)^2 = 0$$

$$D = 9 (\lg y)^2 - 4 (\lg y)^2 = (\lg y)^2$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = 2 \lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 & (1) \\ 2y^2 - y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{① ②}$$

$$(1) \quad y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y(y-2)(y^2 + y - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) -4y = 0$$

$$y = 0$$

$\hookrightarrow$

$y = 0$
 $y = 2$
 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{14}}{2}$

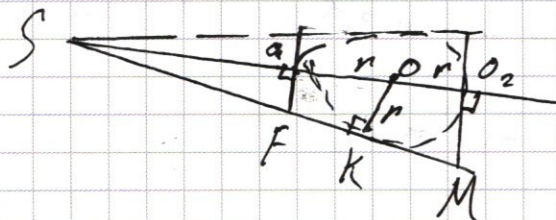
с учётом ОДЗ

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{\sqrt{14}-1}{2} \end{cases} & \quad \text{u} \quad x = -4 \\ & \quad \text{u} \quad x = -\left(\frac{\sqrt{14}-1}{2}\right)^2 - \frac{14-1-2\sqrt{14}}{4} \\ & \quad \quad = -4 + \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

Orbem: $(-9; 2)$

$$\left(-4 \pm \frac{\sqrt{14}}{2} ; \frac{\sqrt{14}-1}{2} \right)$$

WY.



Гаснотрим

maximum 450

$$\Delta SO_2 M \sim SO_1 F$$

(O_1, O_2) касания плоскостей

1 50 (с шаром)

$$k = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

~~ASO, Fm~~

$$\frac{3}{2} = \frac{SO_1 + 2n}{SO_1} = \frac{SO_2}{SO_1}$$

$$SO_1 = 4r$$

т.к. $\angle OSK$ - прямой (х - точка касания),
то $\sin \angle OSK = \frac{OK}{SO} = \frac{r}{4r+r} = \frac{1}{5}$

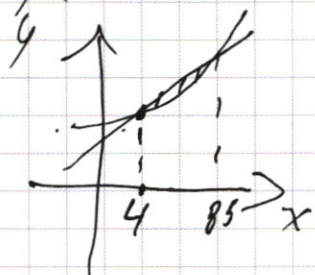
$$\angle OSK = \arcsin \frac{1}{5}$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}$

$$N. 4. \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$g(x) = 85 + (3^{81} - 1)x$$



$$f(4) = g(4)$$

$$f(85) = 3^{81} \cdot 85$$

$$g(85) = 85 \cdot 3^{81} \Rightarrow$$

$$f'(x) < g'(x) \text{ при } x \in [4; 85]$$

$$x \in [4; 85]$$

N - число пар.

$$N = \int_4^{85} (g(x) - f(x)) dx = \sum_{i=4}^{85} (g(i) - f(i)) =$$

$$= \sum_{i=4}^{85} (3^i + 4 \cdot 3^{81} - 85 - 3^{81}i + 1) =$$

$$= \sum_{i=4}^{85} (3^i + 3^{81} - 84 - 3^{81}i + 1) =$$

=

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4y - 8y = 0 \\ -x(4y+x) + 2y(y-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow -x > 0$$

~~$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)} \cdot \lg(-xy)$$~~

~~$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$~~

~~$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = (\lg(-x) + \lg(y)) \cdot \lg(-x)$$~~

~~$$\lg y (\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) - \lg(-x)) = \lg(-x)^2$$~~

~~$$\lg y (\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)) = \lg x^2$$~~

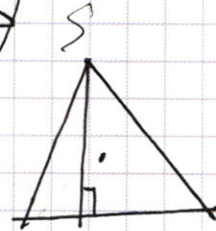
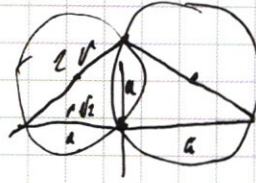
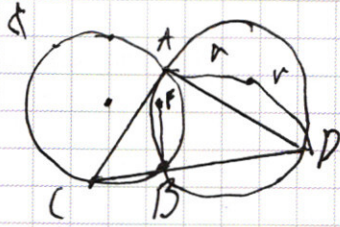
~~$$(\lg(-x^3) - \lg(y^2)) \lg y = \lg x^2$$~~

~~$$3(\lg(-x)) \lg y - 2(\lg y)^2 = 2 \lg(-x)$$~~

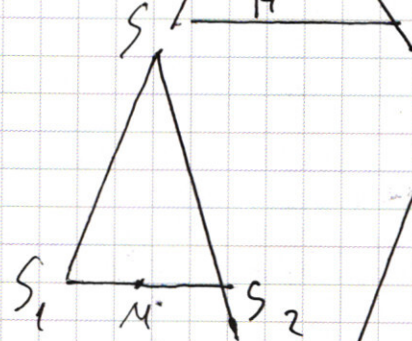
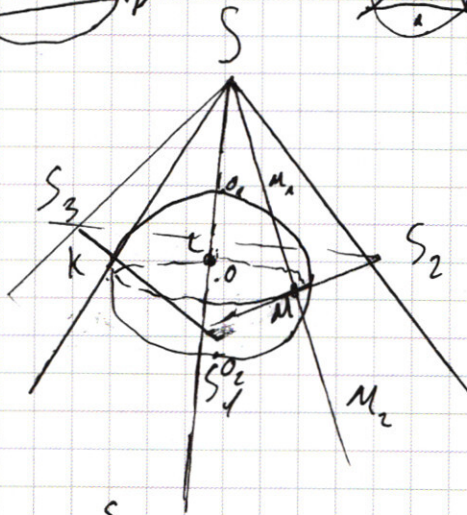
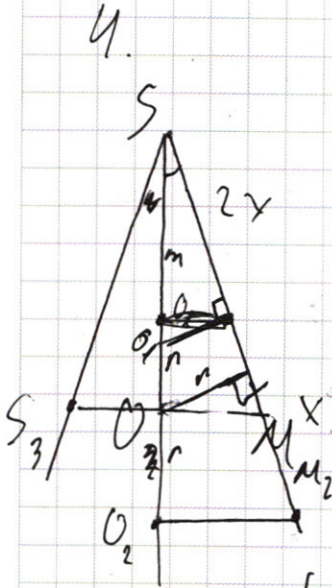
~~$$\lg(-x) = \frac{2(\lg(y))^2}{3 \lg y - 2} = \frac{2(\lg(y))^2}{3 \lg y - 2 \lg 100}$$~~

$$r_1 = r_2$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = h$$



$$k = \frac{2}{3}$$



$$\frac{m+2r}{3x} = \frac{m}{2x}$$

$$2xm + 4r = 3m$$

$$m = 4r$$

$$x = 9$$

$$5.381 \cdot 3 + 4.381$$

$$85 - 81 + 3^{81} \cdot 81$$

$$4 + 3^{85}$$

$$3^{85} \cdot 4.381 = 3^{81} (4 + 2^r) \frac{2r + SN}{SN} = \frac{3}{2}$$

$$y \geq 3^x + 4.81 \cdot 3^{91}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

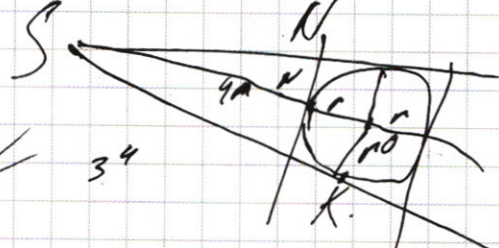
$$x = 4$$

$$4 + 25 \cdot 3^{81}$$

$$81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$h = \arccos \frac{6r}{3x}$$



$$80 + 5.3^{91}$$

$$-3^5$$

$$-4.3^{91}$$

$$3^{46} \cdot 4.3$$

$$40 + 3^{81} + 3^{81} \cdot 26$$

$$45 + 3.45 - 45$$

$$y_1 = 3^x \ln 3^x$$

$$y_0' = 3^{91} - 1$$

$$2^x \ln 3 \sqrt{3^{81} - 1}$$

$$2^x \ln 3 x < 3^{81} - 1$$

$$3^{81} / n$$

$$85 + 2 \cdot 3^{81} - 2 - 9 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$44 - 25 \cdot 3^{81}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$\cos 2 + \cos 3 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} \cos 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} \sin 3$$

$$\cos 2 - \sin 3 = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2 - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3 \right) = -\sqrt{2} \sin$$

$$\cos(2 \pm 3) = \cos 2 \cos 3 \mp \sin 2 \sin 3$$

$$\sin(2 \pm 3) = \sin 2 \cos 3 \pm \cos 2 \sin 3$$

$$\cos(2 \pm 3) \sin(2 \pm 3) = \cos^2 2 \cos^2 3 - \sin^2 2 \sin^2 3$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 4x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 4x \right) + \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right)$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \cos \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right)$$

$$2 \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{14x + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right)$$

$$2 \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{14x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \left(\sin 20x + \frac{\pi}{4} \right)$$

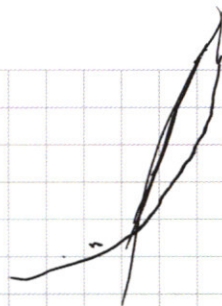
$$\cos x - \sin y = \cos x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - y \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{x - y + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{x + y - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{14x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \frac{5\pi}{8} - \frac{14x}{2}$$

$$4 \cdot 4^{23^x} + 4 \cdot 3^{21}$$

$$y < 85 + (3^{21} - 1) \cdot x$$



$$\lg y \cdot (4 \lg x - 2 \lg y) = (\lg(y) + \lg(-x)) \lg(-x)$$

$$4 \lg(-x) \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg(y)$$

$$3 \lg(-x) \lg y = \lg^2(-x) + 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \lg(y) + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg y > 0$$

$$17 = 9 \lg^2(y) - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg(-x) = \frac{+3 \lg(y) \pm \lg y}{2} = \begin{cases} 2 \lg y \\ \lg y \end{cases}$$

$$\lg(-x) = 2 \lg y$$

$$\lg(-x) = \lg y$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= -y \\ x &= -y^2 \end{aligned}$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y = 0$$

$$+ y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

	+1	-1	-6	8
2	1	-1	-8	0

$$(y^2 + y - 4)(y - 2) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17 \quad y = 2 \quad x = -4$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

8 - 4 - 12 + 8	
$y^3 - y^2 - 6y + 8$	$y - 2$
$y^3 - 2y^2$	$y^2 + y - 4$
$-y^2 - 6y$	
$-y^2 - 2y$	
$-4y + 8$	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l}
 1. & 16845 \\
 & 3345 \\
 & 645 \\
 & 135 \\
 & 24 \\
 \hline
 & 5 \\
 & 5 \\
 & 5 \\
 & 5 \\
 & 5 \\
 & 3 \\
 & 3 \\
 & 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (333)55555 \\
 8! \\
 \hline
 \cancel{3! \cdot 5! \cdot 2!} \\
 \cancel{3! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 2!} \\
 \hline
 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1
 \end{array}$$

$$\cos 4x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$2 \sin \frac{4x+3x}{2} \cos \frac{4x-3x}{2} = 2 \cos 5x \cdot \cos 10x - \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \sin 5x \cos 2x = 2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x) = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 5x - 2 \cos 2x + \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\cos (2 \pm 10) = \cos 2 \cos 10 \mp \sin 2 \sin 10$$

$$\cos 6x - \sqrt{2} \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos 5x - \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{array}{r}
 56 \\
 \times 56 \\
 \hline
 336 \\
 + 336 \\
 \hline
 3136
 \end{array}$$

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4 \end{cases}$$

$$(1) x-6-y > 0$$

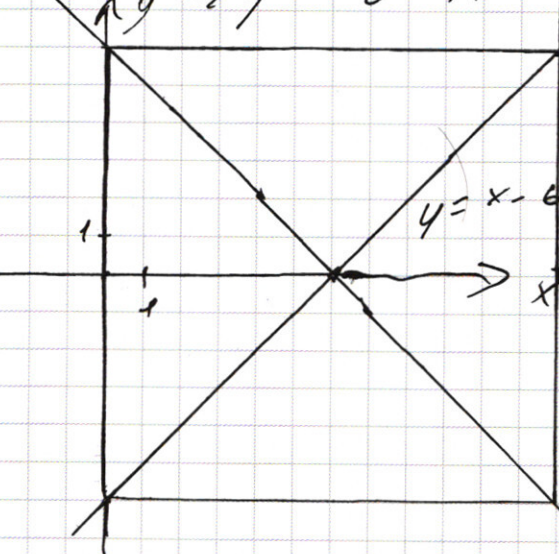
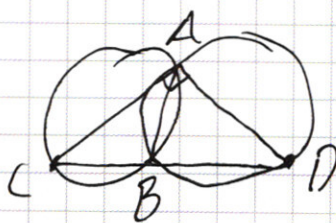
$$x \rightarrow y < x-6$$

$$x-6-y$$

$$(2) x-6+y > 0$$

$$y < 6-x$$

$$y > 6-x$$



$$\begin{cases} y < x-6 & (1) \\ y > 6-x & (2) \end{cases}$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$\begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \end{cases}$$

$$-x+6+y - y + 6-y = 12$$

$$x = 0$$

$$\begin{cases} y < x-6 & (1) + \\ y < 6-x & (2) - \end{cases}$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$y = -12$$

$$\begin{cases} y > x-6 & (1) - \\ y > 6-x & (2) + \end{cases}$$

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 64 \\ \times 4 \\ \hline 256 \\ 256 \\ \hline 292 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 292 \overline{) 4} \\ 28 \overline{) 4} \\ 12 \overline{) 3} \end{array}$$

$$\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\sqrt{18^2 + 14^2}$$

$$y = 6$$

$$\sqrt{36 + 4 \cdot 64} = \sqrt{292}$$

$$a = \left(\frac{\sqrt{292}}{2} \right)^2$$