

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

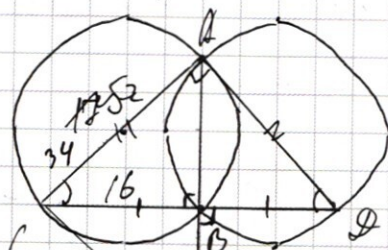
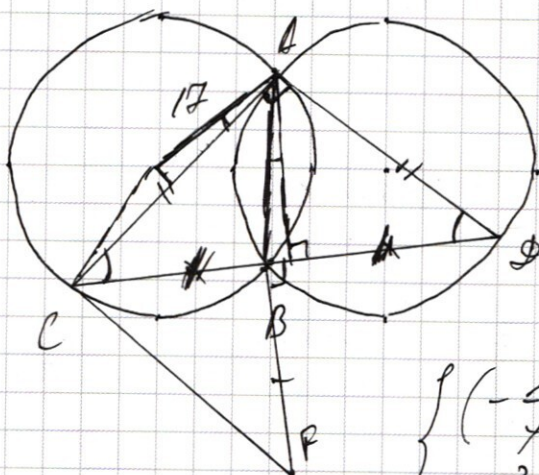
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & \left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) \cdot 34 \\ & 2 \ln(xy)^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$x \cdot 3 \ln(-y) = -x \cdot 2 \ln x \cdot y \ln(-y)$$

$$x \cdot 3 \ln(-y) + x \cdot 2 \ln x \cdot y \ln(-y) = 0$$

$$x \cdot 2 \ln x \cdot \ln(-y) - 2 \ln x^2 + y \ln(-y) = 0$$

$$x \cdot \ln(-y^3) \cdot \ln(-\frac{x}{y^2}) + y \ln(-y) = 0$$

$$\ln(-y) \ln(-\frac{x}{y}) = \ln(x) \cdot 2 \ln(xy^2)$$

$$\ln(-y) (\ln x^2 - \ln(-y)) = \ln(x) \cdot (2 \ln x + 4 \ln(-y))$$

$$4(7v - 4) = v(2v + 4u)$$

$$7uv - 4^2 = 2v^2 + 4uv$$

$$2v^2 - 34v + 4^2 = 0$$

$$2v^2 - 4v + 4^2 - 24v = 0$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x \left\{ \begin{aligned} & y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 20 \\ & 2 \ln x + 4 \ln(-y) \end{aligned} \right.$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$a + \sqrt{2} \cos 4x = b \quad a^2 = 1 + \sin 14x$$

$$a^2 + 2\sqrt{2} \cos 4x + 2 \cos^2 4x = b^2 \quad b^2 = 1 - \sin 6x$$

$$2\sqrt{2} \cos 4x + 2 \cos^2 4x = -(\sin 6x) - (\sin 6x + \sin 14x) =$$

$$2\sqrt{2} \cos 4x + 2 \cos^2 4x = -\sin 10x \cos x = -\sin 10x \cos 4x$$

$$2\sqrt{2} + 2 \cos 4x = -\sin 10x$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)$$

$$2\sqrt{2} \cos 7x + 2 \cos 4x = -\sin 10x - 2\sqrt{2} \sin 8x$$

$$\sqrt{2} \cos 7x + 2 \left(2 \cos \frac{11x}{2} \cos \frac{7x}{2} \right)$$

$$\cos 7x + \cos 3x \quad \cos 3x - \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \left(\cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \right)$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \left(\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x \right) \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos^2 \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} - \sin^2 \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} + 2 \cos \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \left(\cos \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} + 2 \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \quad \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} +$$

$$2 \cos^2 \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} + 2 \cos \dots - 1 = 0$$

$$\left(\cos \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 = 1 + 2 \cos^2 \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} \cos 4x = \frac{1}{2} (1 +$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(4x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(4x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \left(1 + \cos \left(4x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \cos 4x \left(1 + \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $-x^2x \quad x^22$
 $y^2=2$

2) $x^2 = -y$
 $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$
 $2x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$

1	-2	-7	12	
1	1	-1	-8	4
-1	1	-3	-4	16
2	1	0	-7	-2
-2	1	-4	+1	
3	1	1	-4	0

$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \mid x-3$
 $x^3 - 3x^2$
 $x^2 - 7x$
 $-x^2 - 3x$
 $-4x + 12$

$x^3 + x^2 - 4x$
 $-3x^2 - 3x + 12$
 $-4x + 12$

$(x-3)(x^2+x-4) = 0$
 $D = 17$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

3) $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $\sqrt{2}(\cos 5x)(\cos 2x + \sin 2x) + \cos 4x = 0$
 $y = 93 + 4 \cdot 3^{28}$
 $y \leq 93 + (3^{28} - 3)/x$
 $3x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + (3^{28} - 3)/x$
 $3x - 1 + 4 \cdot 3^{28} = 31 + (3^{28} - 1)/x$
 $3x - 1 + 4 \cdot 3^{28} - 31 + (3^{28} - 1)/x = 0$
 $3x - 32 + 4 \cdot 3^{28} + (3^{28} - 1)/x = 0$
 $3x - 31 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28} + 31 - 3/20 = 0$
 $93 + (3^{28} - 3)x - 3x - 4 \cdot 3^{28} = 0$
 $93 + 3^{28}(x - 4) - 3x - 3x = 0$
 $x = 5 \quad 93 + 3^{28} - 15 - 243 \cdot 3^5$
 $x = 20 \quad 93 + 2(93 + 3^{28} \cdot 26 - 3 \cdot 1728)$
 $x = 93 \quad 2418 + 26 \cdot 3^{28} - 1365 =$
 $x = 26 \quad 1053 + 26 \cdot 3^{28} - 243(3^{26} - 1)$
 $x = 13 \quad 1051365$
 $x = 35 \quad 35$
 $x = 455$

$\cos(5x-x) = \cos 6x \cos x - \cos 2x + \sin 2x =$
 $= \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x -$
 $= (\cos x + \sin x)^2 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x$
 $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$
 $x = 31 \quad 3^{x-1} - x(3^{28} - 1) + 4 \cdot 3^{28} - 31 = 0$
 $x = 4 \quad 28 - 4 \cdot 3^{28} + 4 + 4 \cdot 3^{28} - 31 = 0$
 $93 + (3^{28} - 3) \quad 26 \text{ кар на } y = 93 + (3^{28} - 3)x$

Сумма геом. прогр.
 $b + qb + \dots$
 $\frac{b(q^k - 1)}{q - 1}$
 $2 \cdot (2^4 - 1) = 30$
 $\frac{3 \cdot (81 - 1)}{2} = 240$
 $\frac{9(27 - 1)}{2} = 9 \cdot 13 \cdot 2^{1/2}$
 $17 - 2\sqrt{17} + 1 = 18 - 2\sqrt{17}$
 $(\sqrt{17} - 1)^2 = 17 - 2\sqrt{17} + 1$

Для каждого x разность равна

$$93 - 3 \cdot 3^{28}$$

$93 - 3 \cdot 3^{28} - 3x - 3^x$. Всего есть 26 различных

значений x (от 5 до 30).

$$\begin{aligned} & \text{Сумма всех разностей: } 26(93 - 3 \cdot 3^{28}) - 3 \cdot \frac{5+30}{2} \cdot 26 - \\ & - \frac{3^5(3^{26}-1)}{2} = 1053 - 78 \cdot 3^{28} - \frac{27 \cdot 3^{28} - 243}{2} \end{aligned}$$

$\approx 1174,5 - 91,5 \cdot 3^{28}$, следовательно, всего есть $91,5 \cdot 3^{28} - 1174,5$ целых решений.

Ответ: $91,5 \cdot 3^{28} - 1174,5$.

№1

Разложим 64827 на множители.

$$64827 = 7^4 \cdot 3^3$$

~~Итого~~ Выблизчатое число, произведение цифр которого равно 64827, может состоять из следующих наборов цифр:

- 1) 4 семёрки, 3 тройки, 1 единица
- 2) 4 семёрки, 1 девятка, 1 тройка, 2 единицы

В первом случае число вариантов равно

$$C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 4 = \frac{4}{7 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 = 280$$

Во втором случае

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot 2 = 70 \cdot 12 = 840$$

Всего 1120 вариантов

Ответ: 1120.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$0 \leq x+y \leq -8 \quad x-y \leq -8$$

$$\cancel{x} \leq \cancel{x} + 8 \quad y \leq x + 8$$

$$-x \leq x + 8$$

$$y > -x - 8$$

2) $x + y \leq -8$ $x - y \leq -8$

$$x < -p - x \quad x > x + p$$

$$X_2 - 16$$

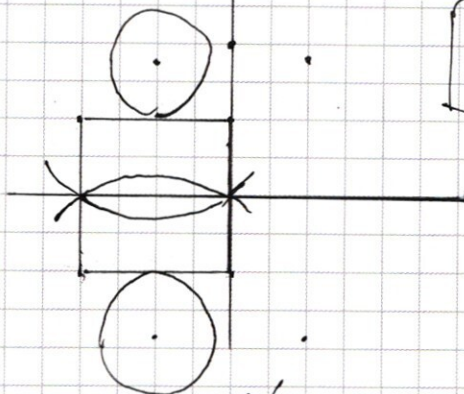
3) $x+y < -8$ $x-y > -8$

$$x' = -\delta - x \quad y' = x + \delta$$

$$x - y - z + x - y + z = 16$$

$$-2yz \quad 16$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100



$$\begin{array}{l} a = 7 \\ a = 17 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x =$$

$$= 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

5m a - 5m b 2

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 6x + \sqrt{2} \cos 4x \cos 20$$

$$\frac{4!}{2!2!} 2^2 3 \cdot 2^2 \cdot 6 \sqrt{2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x)} + \frac{8}{2} \cos 4x = 0$$

$$p_c = 245^2 x - 1 + 2877x \cos x$$

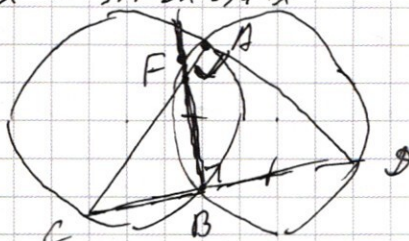
$$\cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$\cos 5x = \cos(2x+3x)$$

$$= \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x$$

$$\cos^2 2x \cos 3x - \sin^2 2x \sin 3x$$

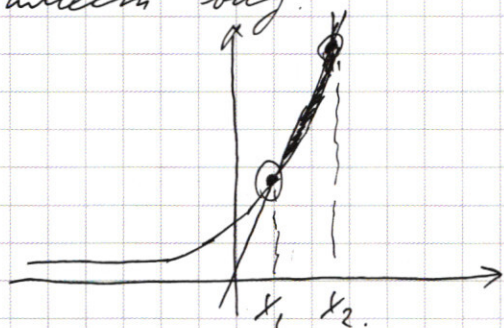
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ x \leq 93 + 3(3^{28} - 0)x \\ 93 + (3^{28} - 3)x \end{cases}$$



~ 7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1)x \end{cases}$$

На координатной плоскости множество решений имеет вид:



Найдём значение x_1 и x_2 .

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 93 + 3(3^{2x} - 1)x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{2x} = 31 + (3^{2x} - 1)x$$

Подставим $x_1 = 4$:

$$3^3 + 4 \cdot 3^{2 \cdot 4} = 31 + 4 \cdot 3^{2 \cdot 4} - 4$$

$$25 = 25.$$

Подставим $x_2 = 31$:

$$3^{30} + 4 \cdot 3^{2 \cdot 31} = 31 + (3^{2 \cdot 31} - 31) \cdot 31$$

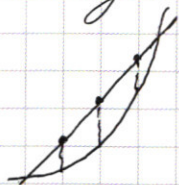
$$3^{30} = 27 \cdot 3^{27}$$

$$3^{32} = 3^{30}$$

Числа $x_1 = 4$ и $x_2 = 31$ являются единственными 2 решениями.

Очевидно, что при любом целом x значение y для обеих функций - целое.

Найдём количество целых точек.



Для каждого целого x количество целых значений y будет равно разности значений двух функций

системы при этом x (разность - целое число, найдём верхнюю точку отрезка является решением, а нижняя - нет. Например:  Длина отрезка - 6, и на нём 6 решений).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 = 7203 \cdot 9 = 2401 \cdot 27 = 7^4 \cdot 3^3$

$\begin{array}{r} 64827 | 9 \\ 53 \quad 7203 \\ \hline 18 \end{array}$

$\begin{array}{r} 8 \\ 49 \\ \times 49 \\ \hline 1441 \\ 796 \\ \hline 2401 \\ 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 \\ \hline 35 \end{array}$

Восемизначное число

7 - 4 см.

$\begin{array}{r} 3331 \\ 9311 \\ \hline 3331 \end{array}$

1) 4 смёры
3 тройки
1 ед.

2) 4 смёры
1 дев.
1 тр.
2 ед.

OC $\frac{4}{7} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{4!}{3!} = 4$

$\frac{4!}{3!} = 4$

140 смел

2) $35 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ (275)

3) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2/\ln(xy^3)}$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$(y+x)^2 + 4(3x+y-x^2)$

$y^2 + 4y + 4 - 4 - (3x^2 - 12x + 12) + 12 + 2xy = 0$

$(y+2)^2 - 3(x-2)^2 = -6 - 2xy$

$(y+2+x\sqrt{3}-2\sqrt{3})/(y+2-x\sqrt{3}+2\sqrt{3})$

б) $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$

1) $x > 0, y > 0$

$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$

2) $x < 0, y > 0$

$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$

3) $x < 0, y < 0$

4) $x > 0, y < 0$

$(x+8)^2 + (x+15)^2 = a$ $(x-8)(y+16)$

1) $x+y > -8, x-y > -8$

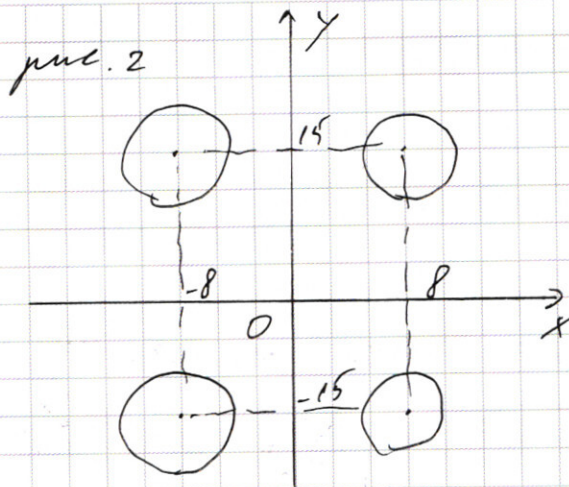
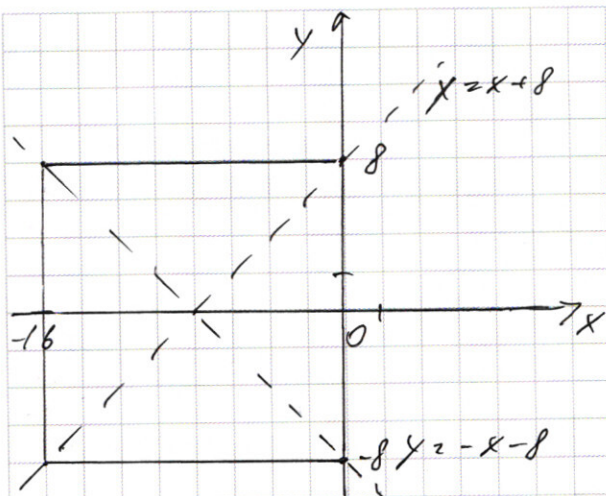
$2x+16 = a$

$x > 0, y \in (-8; 8)$

2) $x+y < -8, x-y < -8$

$-2x-16 = a$

$x = -16$



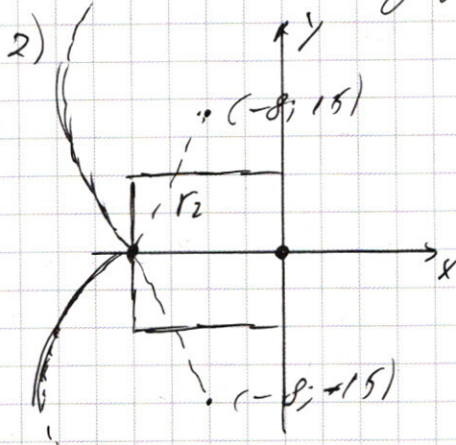
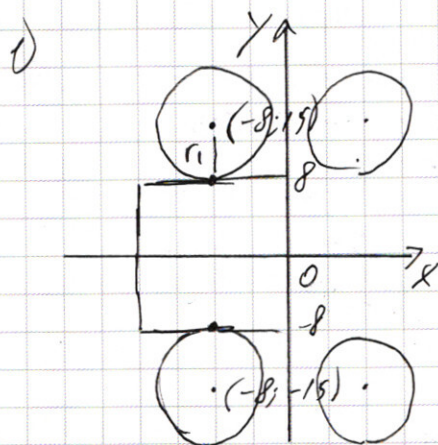
Теперь рассмотрим $(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a$.

Это уравнение окружности с центром в O и:

- 1) при $x > 0, y > 0$: $O_1(8; 15)$
- 2) при $x > 0, y < 0$: $O_2(8; -15)$
- 3) при $x < 0, y > 0$: $O_3(-8; 15)$
- 4) при $x < 0, y < 0$: $O_4(-8; -15)$, и радиусом $\sqrt{a}$.

(рис. 2)

Система имеет 2 решения в двух случаях:



В первом случае $r_1 \geq \sqrt{a} \geq 7$, $a \geq 49$

Во втором случае $r_2 \geq \sqrt{a} \geq \sqrt{15^2 + 64^2}$, $a \geq 289$.

Ответ: 49; 289.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$ №3

$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x + 4\ln(-y)}$

$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(-y)}$

$\frac{x^{3\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x}$

$x^{3\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot (-y)^{\ln(-y)}$

$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$
 $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

Находим ограничения:

$y < 0; x > 0$

Рассмотрим 1 уравнение.

Возьмём натуральные логарифмы от обеих частей.

$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = \ln(x) \cdot 2\ln(xy^2)$

$\ln(-y) (7\ln(x) - \ln(-y)) = \ln(x) (2\ln x + 4\ln(-y))$

Пусть $\ln(-y) = u$, $\ln(x) = v$

$u(7v - u) = v(2v + 4u)$

$2v^2 - 3uv + u^2 = 0$

$(v - u)(2v - u) = 0$

$\begin{cases} v = u \\ 2v = u \end{cases}$ Обр. замена: $\begin{cases} \ln(x) = \ln(-y) \\ 2\ln(x) = \ln(-y) \end{cases} \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$

Переходим ко второму уравнению. Подставим $-y = x$:

$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$

$-4x^2 + 8x = 0$

$x(2 - x) = 0$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad x > 0 \text{ не угод-ен } x > 0, \text{ поэтому } x = 2.$$

Тогда $x = 2$; $y = -2$.

Подставим $x^2 = -y$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0, \text{ так как } x \neq 0:$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x^2+x+4) = 0$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ не угод. } x > 0.$$

Система имеет ещё 2 решения: $x = 3$; $y = -9$ и

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}; y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $(2; -2)$; $(3; -9)$; $(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2})$.

и 5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 2 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

1) При $x+y \geq -8$, $x-y \geq -8$: 2) При $x+y \leq -8$, $x-y \leq -8$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16$$

$$-x-y-8 - x+y-8 = 16$$

$$x \geq 0, y \geq -8-x, y \leq x+8$$

$$x = -16, y \geq x+8, y \leq x-8$$

3) При $x+y > -8$, $x-y < -8$:

4) При $x+y < -8$, $x-y > -8$

$$x+y+8 - x+y-8 = 16$$

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$y = 8, y > -8-x, y > x+8$$

$$y = -8; y < -8-x; y < x+8.$$

На координатной плоскости это имеет вид: