

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

- 3
1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

3

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

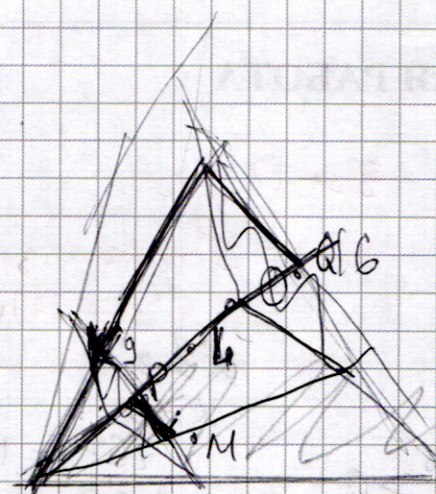
- 6
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

- 5
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



$\angle KSO - ?$

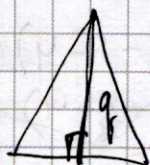
$S_{KLM} - ?$

$$K = \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$$

$$L = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{SP}{SQ} = \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$$

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{3}{4}$$



$$\sin 7x + \cos 7x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) \right) =$$

=

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x \cos 3x - \sin 3x =$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 3x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 3x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \cos 4x = 0$$

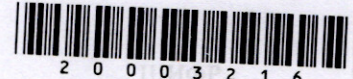
$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos 7x + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin 2x + \cos 2x) (\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \cos 4x \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x \sin x \cos 2x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} 93 + 3(3^{27} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} > 0$$

$$3^{28}(x - 4) - 3x - 3^x + 93 > 0$$

$$f(x) = 3^{28}(x - 4) - 3x - 3^x$$

$$f'(x) = 3^{28} - 3 - 3^x \ln 3$$

$$93 \cdot x = 28! \quad 93 + 3^{28} \cdot 28 - 3 \cdot 28 - 3^{28} - 4 \cdot 3^{28} \geq 0$$

$$= 3^{28}(28 - 1 - 4) + 93 - 3 \cdot 28 \cdot 4365$$

$$3^{28}(28 - 1 - 4) + 93 - 3 \cdot 28 \cdot 4365$$

$$x =$$

$$x = 56:$$

$$93 + 3^{28} \cdot 56 - 3 \cdot 56 - 3^{56} + 93 > 0$$

$$x = 29: \quad 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{30} =$$

$$x = 32: \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$3^{28} \cdot 32 - 3 \cdot 32 - 3^{32} + 93 > 0$$

$$(81 + 32)3^{28} - 3 \cdot 32 + 93$$

$$x = 31: \quad 3^{28} \cdot 31 - 3 \cdot 31 - 3^{31} + 93 > 0$$

$$3^{28}(31 - 3) - 3 \cdot 31 + 93 > 0$$

$$4 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 31 + 93$$

$$x = 4:$$

$$93 + 12 - 3^4 =$$

$$93 - 81 - 12 = 0$$

$$\sum_{\substack{x \in [1, 31] \\ x \in \mathbb{Z}}} 93 + 3^{28}(x - 4) - 3x - 3^x =$$

$$= 93 \cdot 32 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} 3^{28}(x - 4) - 3x - 3^x =$$

$$= 93 \cdot 32 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} 3^{28}x - 4 \cdot 3^{28} - 3x - 3^x$$

$$= 93 \cdot 32 - 3 \cdot 16 \cdot 31 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} 3^{28}x - 4 \cdot 3^{28} - 3x - 3^x$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + 31 =$$

$$= \frac{32 \cdot 31}{2} = 16 \cdot 31$$

$$93 \cdot 32 - 3 \cdot 16 \cdot 31 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} 3^{28}x - 4 \cdot 3^{28} - 3x - 3^x$$

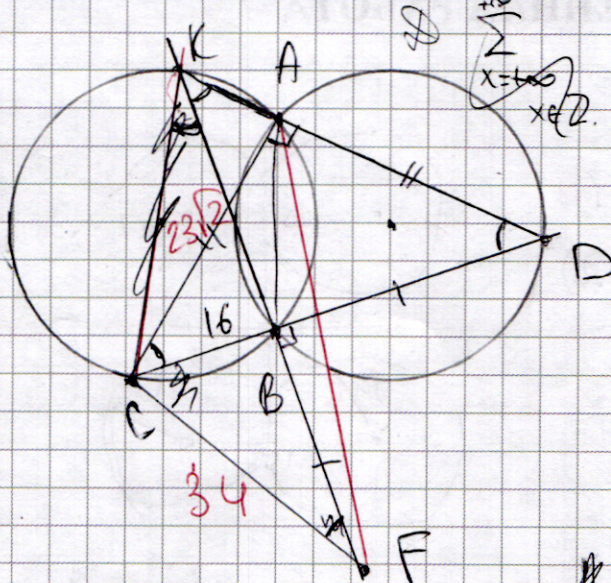
$$93 + 3^{28} \cdot 27 - 3 \cdot 31 - 3^{31} =$$

$$= 3^{28}(27 - 27) + 93 - 3 \cdot 31 = 0$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$6 + 5 + 3 = 14$$

$$93 + 3(3^{27} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$



$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} (93 + 3(3^{27} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{28} - 1)$$

$$93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} - 1 > 0$$

$$93 + 3^{28}(x - 4) - 3^x - 3x - 1 > 0$$

$$16 + 34 = 50$$

$$BF = BD, \quad BD = BK = BF = 30$$

$$\angle CAD = 90^\circ, \quad CD = 46$$

$$R = 17$$

$$CF = ?$$

$$AC = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

$$\angle ACB = \angle ADB$$

$$\Downarrow \\ AC = AD$$

$$CF = 2R = 34$$

$$BK = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{(34-16)(34+16)} = \sqrt{18 \cdot 50} = 5\sqrt{36} = 30$$

$$\text{Итого, } \angle APB = \alpha$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 34 \Rightarrow AB^2 = (34 \sin \alpha)^2$$

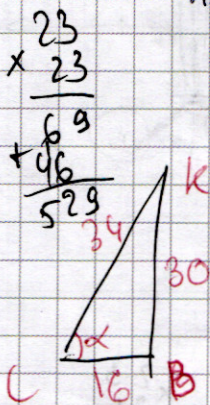
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \alpha$$

$$AB^2 = AC^2 + BD^2 - 2AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$$

$$BD^2 - 2AC \cdot BD \cos \alpha = BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \alpha$$

$$\angle CAB = \angle BAD = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \angle ACB - \angle CBA) = \angle ACB + \angle CBA - 90^\circ$$

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle CBA$$



$$\sin \alpha = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

$$\angle ACF = 45^\circ + \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{8}{17} + \frac{15}{17}\right) = \frac{23 \cdot \sqrt{2}}{17 \cdot 2}$$

$$= \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2} = \frac{23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{34}}{2} = 23^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$x \geq 0 \text{ и } y \geq 0.$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a.$$

$$x \geq 0 \text{ и } y \leq 0$$

$$(x-8)^2 + (y+15)^2 = a.$$

$$x < 0 \text{ и } y \geq 0$$

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$$

(1):

$$x+y+8 \geq 0 \Rightarrow y \geq -x-8 \quad \text{и} \quad x-y+8 \geq 0 \Rightarrow y \leq x+8$$

$$x+y+8 + x-y+8 - 16 = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$x+y+8 \geq 0 \Rightarrow y \geq -x-8 \quad x-y+8 < 0 \Rightarrow y > x+8$$

$$x+y+8 - x + y - 8 - 16 = 0$$

$$2y = 16$$

$$y = 8.$$

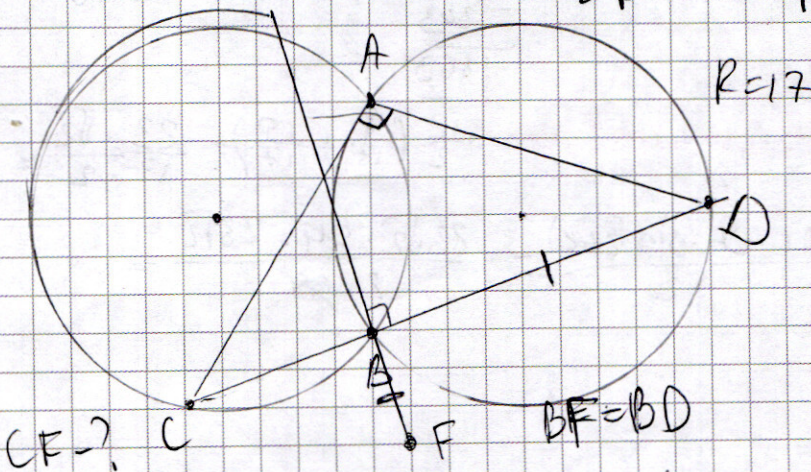
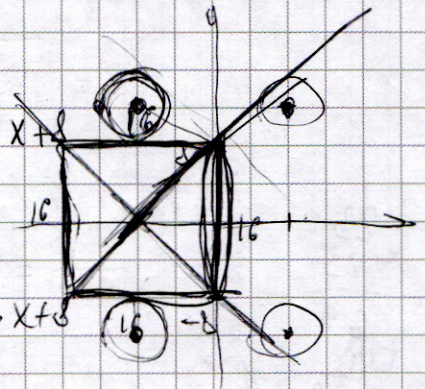
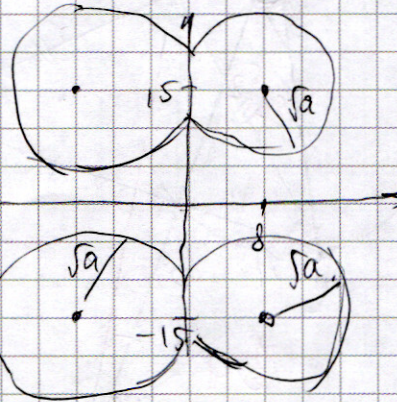
$$x+y+8 < 0 \Rightarrow y < -x-8 \quad x-y+8 \geq 0 \Rightarrow y \leq x+8.$$

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

$$3R^2 = 4^2 + 23^2 = \sqrt{1105}$$



$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ + 48 \\ \hline 576 \\ + 576 \\ \hline 1152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ + 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)^2 - 2 \sin^2 x$$

$$\frac{1 + \cos 4x}{2} = \cos^2 2x \rightarrow \cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$-\cos 4x + \cos 4x = 2 \cos 4x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} (\cos 4x + \cos 6x) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= \cos 2x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) = \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \end{aligned}$$

№

$$\sin 2x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \sqrt{2} \left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x \right) =$$

$$\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

$$2 \cos 5x$$

$$2 \sqrt{2} \cos 5x \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos(5x) = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x =$$

$$f(x) =$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} \sin^2 2x = 0$$

№3.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

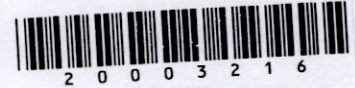
$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 4(x^2 - 3x + y) = 0$$

$$(y+2)^2 - 4 - \left(\sqrt{3}x - \frac{6}{\sqrt{3}} \right)^2 + 12 = 0$$

$$(y+2)^2 + \left(\sqrt{3}x - \frac{6}{\sqrt{3}} \right)^2 =$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$64827 = 9 \cdot 7203 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7 \cdot 343 =$$

$$8 \text{ цифр.} = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ 21 \overline{) 343} \\ 36 \overline{) 28} \\ 21 \overline{) 21} \end{array}$$

Ост. - 2; 4; 5; 6; 8

Ост. - 1; 3; 7; 9.

4-семёрки будет.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

2 цифр: 1 3 3 3 7 7 7 7

2 цифр: 1 1 3 9 7 7 7 7

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \rightarrow 4 \text{ вар.}$$

$$3^3 = 3 \cdot 9 \rightarrow 5 \text{ вар.}$$

$$3^3 = 9 \cdot 3 \rightarrow 6 \text{ вар.}$$

4 числа есть, поставить 4 семёрки.

$$\begin{array}{c} \text{X} \text{---} \text{X} \text{---} \text{X} \text{---} \text{X} \text{---} \\ \text{X} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \\ \text{O} \end{array}$$

$$C_4^2 + C_4^1 = 6 + 4 = 10$$

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$16 \cdot C_8^4 = 16 \cdot 35$$

(560)

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ 63 \overline{) 7203} \\ 18 \overline{) 18} \\ 27 \overline{) 27} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 13} \\ 12 \overline{) 12} \\ 03 \overline{) 3} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 27} \\ 27 \overline{) 27} \\ 0 \end{array}$$

$$16804 + 4802 = 21606$$

0 0 0 0

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 16 \\ \hline 210 \\ + 35 \\ \hline 560 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cancel{2 \cos 5x \cos 2x} + \cancel{2 \cos 5x \sin 2x} + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

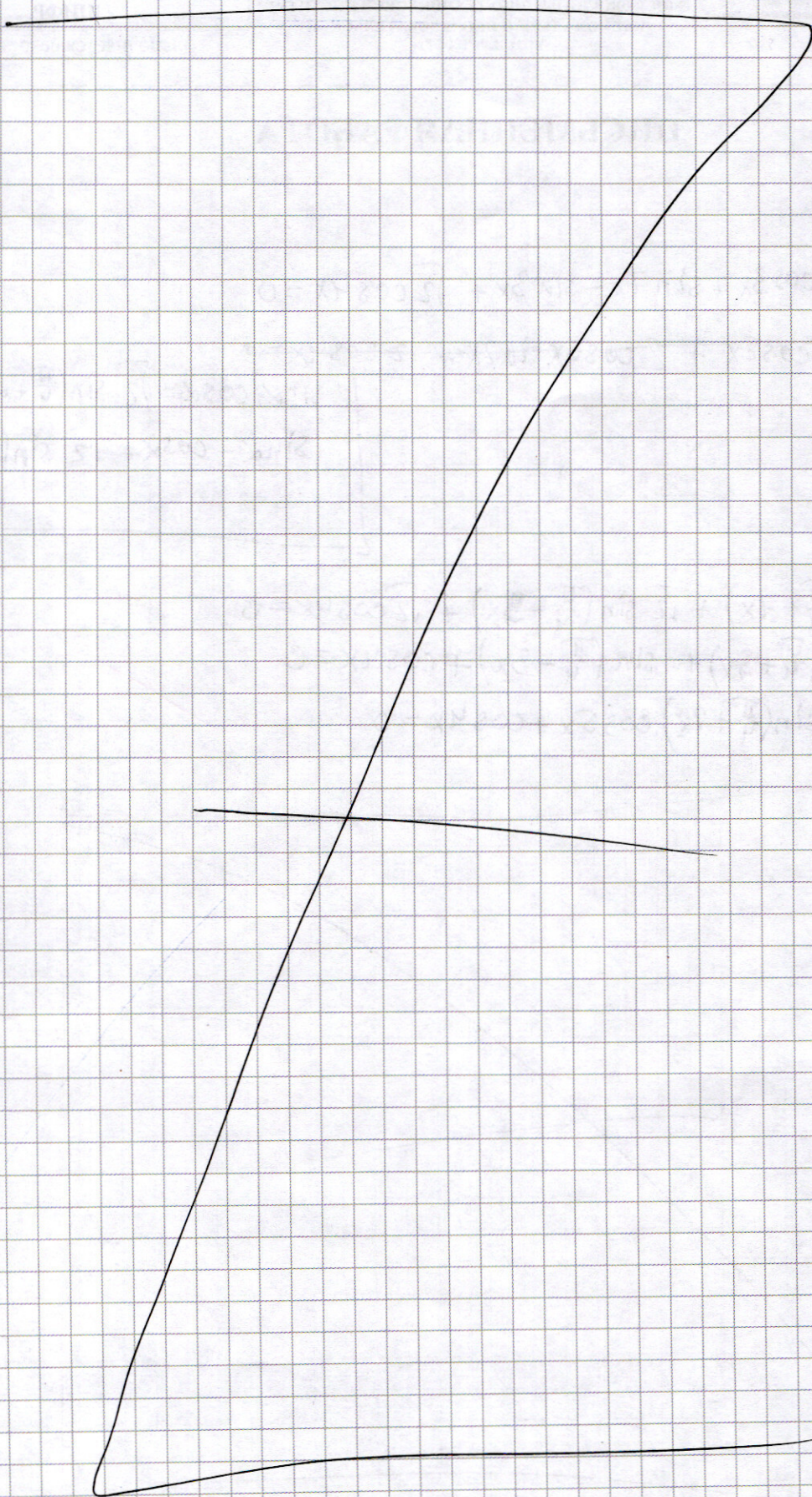
$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cos 5x + \cos 4x = 0$$



$$\begin{aligned}
 \text{Ответ} - & \sum_{\substack{x \in [0; 31] \\ x \in \mathbb{Z}}} (93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x) = \\
 = & 93 \cdot 32 + \sum_{\substack{x \in [0; 31] \\ x \in \mathbb{Z}}} 3^{28}(3x - 3(3^{27}(x-4) - x) - 3^x) = \\
 = & 93 \cdot 32 - 32 \cdot 4 \cdot 3^{28} - 3(1+2+3+\dots+31) + \sum_{\substack{x \in [0; 31] \\ x \in \mathbb{Z}}} (3^{28}x - 3^x) = \\
 = & 93 \cdot 32 - 32 \cdot 4 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 16 \cdot 31 + \sum_{\substack{x \in [0; 31] \\ x \in \mathbb{Z}}} (3^{28}x - 3^x) = \\
 = & 93 \cdot 32 - 32 \cdot 4 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 16 \cdot 31(1+3^{28}) - \sum_{\substack{x \in [0; 31] \\ x \in \mathbb{Z}}} 3^x
 \end{aligned}$$

Заметим,

Пусть, $f(x) = 93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x$

Заметим, что $f(4) = 0$ и при $x < 4$ $f(x) < 0$.

Также, $f(31) = 0$ и при $x > 31$ $f(x) < 0$.

При $x \in [5; 30]$ $f(x) > 0$.

$$\text{Ответ} - \sum_{\substack{x \in [5; 30] \\ x \in \mathbb{Z}}} 93 + 3^{28}x - 4 \cdot 3^{28} - 3x - 3^x = 26 \cdot 93 - 26 \cdot 4 \cdot 3^{28} +$$

$$+ (5+6+7+\dots+30)(3^{28}-3) - \sum_{\substack{x \in [5; 30] \\ x \in \mathbb{Z}}} 3^x = 26(93 - 4 \cdot 3^{28}) +$$

$$+ 35 \cdot 13(3^{24}-3) - \sum_{\substack{x \in [5; 30] \\ x \in \mathbb{Z}}} 3^x = 351 \cdot 3^{28} + 1053 - \sum_{\substack{x \in [5; 30] \\ x \in \mathbb{Z}}} 3^x =$$

$$= 351 \cdot 3^{28} + 1053 - (3^5 + 3^6 + 3^7 + \dots + 3^{30}) = 351 \cdot 3^{28} + 1053 - \frac{3^5 \cdot (3^{26} - 1)}{3 - 1} =$$

$$= 351 \cdot 3^{28} + 1053 - \frac{3^{31} - 3^5}{2} = \frac{702 \cdot 3^{28} + 2106 - 3^{31} + 3^5}{2} =$$

$$= \frac{3^{28}(702 - 27) + 2106 - 243}{2} = \frac{3^{28} \cdot 675 + 1863}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3^{28} \cdot 675 + 1863}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle ACD$ — равнобедр. прямоугол.

Пусть, $AD \cap BF = K$

$\triangle BKD \sim \triangle ACD$. $\triangle BKD \sim \triangle ACD$.

$\angle BKA = \angle ACB$ и они опираются на $\cup AB \Rightarrow K$ лежит на скр.

$\triangle BSK = \triangle BCF$ (прямой угол, общая сторона и $BK = BD = BF$).

Значит, $CF = CK$.

CK — диаметр, т.к. $\angle CBK = 90^\circ \Rightarrow CK = 2R = 34$.

Ответ: $CF = 34$.

8.)

$$BK = \sqrt{CK^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{18 \cdot 50} = 30$$

$$BD = BK = BF = 30.$$

$$CD = BC + BD = 46$$

$$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}.$$

Итак, $AC = 23\sqrt{2}$, $CF = 34$

$$\angle ACF = \angle ACD + \angle DCF = 45^\circ + \angle KCB \quad (\angle KCB = \angle DCF \text{ из } \triangle BSK = \triangle BCF)$$

$$\begin{aligned} \sin(\angle ACF) &= \sin(45^\circ + \angle KCB) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \angle KCB + \cos \angle KCB) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{KB}{KC} + \frac{BC}{KC} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{30}{34} + \frac{16}{34} \right) = \frac{23\sqrt{2}}{34} \end{aligned}$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACF)}{2} = \frac{23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{34}}{2} = 23^2 = 529$$

Ответ: $S_{ACF} = 529$

12.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Заметим, что при фикс. x кол-во
искомых пар = $93 + 3(3^{27} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$

Т.е. ответ — $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \max(93 + 3(3^{27} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}, 0)$

Заметим, что $f(x) = 93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$ при $x < 9$ и $x \in \mathbb{Z}$
меньше 0. $(f(31) = 0)$
Заметим, что при $x \geq 32$ и $x \in \mathbb{Z}$. $f(x) < 0$ ($93 + 3^{28}(28 - 81) - 3 \cdot 32 < 0$ (при увеличении x $f(x)$ убывает))

(2):

$$x \geq 0 \text{ и } y \geq 0:$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a \quad - \text{окр. радиуса } \sqrt{a} \text{ и с центром в } (8; 15)$$

$$x \geq 0 \text{ и } y < 0$$

$$(x-8)^2 + (y+15)^2 = a \quad - \text{окр. радиуса } \sqrt{a} \text{ и с центром в } (8; -15)$$

$$x < 0 \text{ и } y \geq 0$$

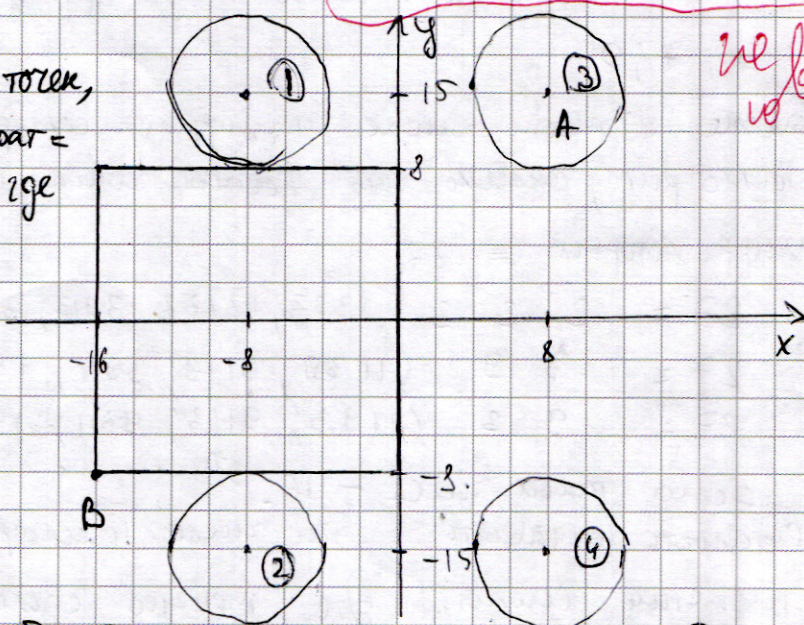
$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a \quad - \text{окр. радиуса } \sqrt{a} \text{ и с центром в } (-8; 15)$$

$$x < 0 \text{ и } y < 0$$

$$(x+8)^2 + (y+15)^2 = a \quad - \text{окр. радиуса } \sqrt{a} \text{ и с центром в } (-8; -15)$$

Заметим, что ка-во точек, в которых ① пересекает квадрат = кол-ву таких же точек, где ② пересек. квадрат.

Аналогично с ③ и ④.



Т.е. либо Т.е., чтобы было 2 рис, нужно, чтобы ① и ② касались квадрата, а ③ и ④ не пересекали его, либо наоборот.

$$\text{Т.е. } \sqrt{a} = 7 \text{ (① и ② кас.) или } \sqrt{a} = AB \text{ (③ и ④ кас.)}$$

$$a = 49$$

$$a = 24^2 + 23^2 = 1105.$$

Ответ: ~~49~~, 1105

№6.

$$R = 17.$$

$$\angle CAD = 90^\circ.$$

$$BF = BD$$

а) CF - ?

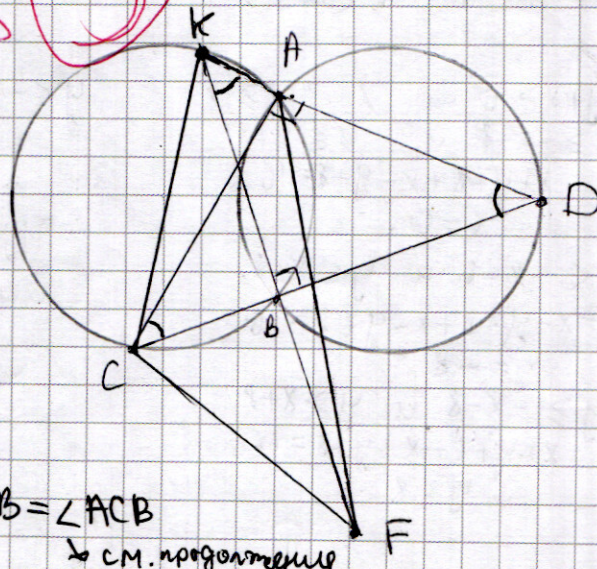
б) BC = 16 S_{ACF} - ?

Решение:

а) По т. синусов $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$

и $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R \Rightarrow \angle ADB = \angle ACB$

↳ см. продолжение



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

В таком восьмизнач. числе могут присутствовать только цифры 1; 3; 7; 9.

Также в таком числе 4 цифры - семерки.

Посмотрим, сколько есть ~~способов~~ чисел из 4 цифр, произведение цифр которых = 27.

$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (1333; 3133; 3313; 3331).$$

$$27 = 3 \cdot 9 \cdot (1139; 3119; 3911; 1391; 1319; 3191)$$

$$27 = 9 \cdot 3 \cdot (1193; 9113; 9311; 1931; 1913; 9131).$$

Всего таких чисел - 16.

Остается поставить в эти числа 4 семерки, чтобы образовались нумерные числа. Это можно сделать C_8^4 способами.

$$\text{Ответ: } C_8^4 \cdot 16 = \overset{70}{280} \cdot 16 = \underline{\underline{4480}}$$

№5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 & (2) \end{cases} \text{ имеет ровно 2 р-и. } \alpha - ?$$

(1):

$$x+y+8 \geq 0 \text{ и } x-y+8 \geq 0$$

$$y \geq -x-8 \text{ и } y \leq x+8$$

$$x+y+8+x-y+8=16$$

$$x=0.$$

$$y < -x-8 \text{ и } y \leq x+8.$$

$$-x-y-8+x-y+8=16$$

$$y=-8$$

$$y \geq -x-8 \text{ и } y > x+8$$

$$x+y+8-x+y-8=16$$

$$y=8.$$

$$y < -x-8 \text{ и } y > x+8.$$

$$-x-y-8+x+y-8=16$$

$$x=-16$$

Ур-ие (1) задает квадрат с центром в $(-8; 0)$ и стороной 16.