

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

всего 6 простых множителей $\Rightarrow$ остальные как минимум 2 цифры это единицы.

Возможные удовлетворяющие произведение цифр:

$$\begin{matrix} + & 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \\ + & 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{matrix}$$

Остатки числа не дают в произведении цифр (кроме 1, но $1 \cdot 8! \geq h$, цифр мы добавим еще 3 единицы в последовательность $\Rightarrow$ не изменим набор).

т.е. набора множителей для наименьшего набора количество чисел по крайней мере:

$$h = h_1 + h_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8! + 2 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} = \frac{3 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2}$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 12 \cdot 40 = 1680$$

Ответ: $h = 1680$ шт.



Задача №2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty; +\infty)$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} - 2 \sin \frac{11x-3x}{2} \cos \frac{11x+3x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 (\sin 7x \sin 4x + \sin 4x \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$2 (\sin 7x + \cos 7x) \left(\sin 4x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) \right) = 0$$

$$2 (\sin 7x + \cos 7x) \cdot \left(\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{\cos 7x}{\sqrt{2}} \right) \left(\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right) = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \frac{4x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2} \cos \frac{4x - \frac{\pi}{4} + 7x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin \left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases}$$

Продолжение на
обложке

$$\begin{cases} 7x + \frac{1}{y} = \frac{1}{k} \\ -\frac{3}{2}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{h} \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{28} + \frac{1}{7}k \\ x = \frac{1}{12} - \frac{2+11h}{3} \\ x = \frac{51}{44} + \frac{2+11l}{11} \end{cases} \quad , \text{где } h, k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Откуда } -\frac{1}{28} + \frac{1}{7}k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{2+11h}{3}, \text{ где } h \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{51}{44} + \frac{2+11l}{11}, \text{ где } l \in \mathbb{Z}$$



Задача 3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x} \quad (1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

Рассмотрим (1): $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x}$ на ОДЗ верно:

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} + 2 \lg y \quad \text{на ОДЗ: } y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\Rightarrow \text{Нормализуем: } \lg(y^{3 \lg x}) = \lg(y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x})$$

$$3 \lg x \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x \quad \text{если } \lg x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{найдём все возможные } y:$$

$$(y^5)^0 = y^{2 \lg y}$$

$$1 = y^{2 \lg y} \Rightarrow \lg y^2 = 0$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \text{ но по ОДЗ } y > 0 \Rightarrow y = 1$$

Получим 1 найденных решений $(1; 1)$

Для $x \neq 1$ можем выполнить следующие:

$$\frac{2 \lg^2 y}{\lg^2 x} - 3 \frac{\lg x \lg y}{\lg^2 x} + \frac{\lg^2 x}{\lg^2 x} = 0 \quad - \text{квadraticное относительно } \frac{\lg y}{\lg x}$$

Вспомогательное квадратное (т.к. $a + b + c = 0$, то $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{a} \end{cases}$)

$$\begin{cases} \frac{\lg y}{\lg x} = 1 \\ \frac{\lg y}{\lg x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg y = \lg x \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.е. $\begin{cases} y=x \\ x=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=y^2 \end{cases} +$

Полученную совокупность подставим в (2):

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$: $1-2-4-3+12=0$
 $4 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ не является решением системы

$y=x$:

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$-4x^2 + 8x = 0$

$\begin{cases} x=0 \text{ — нет по ОДЗ} \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} +$

$x=y^2$:

$y^4 - 2y^5 - 7y^2 + 12y = 0$

$y=0$ — нет по ОДЗ.

$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$ по схеме Горнера

	1	-2	-7	12
3	1	1	-4	0

$y=3$

$y^2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{17}$

$\begin{cases} y=3 \\ y^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$, или $y > 0 \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$x=y^2$
 $x > 0$

$x=3$

$y=3$

$x = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}$
 $y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

Ответ: $(2; 2)$; $(\sqrt{3}; 3)$; $(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2})$

Задача 5

$|y-x-3| + |y-3+x| = 6$ (1)

$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 0$ (2)

будем решать систему графически:

(3)

4 случая:

$\begin{cases} y-x-3 \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases}$

$-y+x+3-y+3-x=6$

$\begin{cases} y-x-3 \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$-y+x+3+y-3+x=6$

или

$\begin{cases} y-x-3 \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$y-x-3+y-3+x=6$

$\begin{cases} y-x-3 \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases}$

$y-x-3-y+3-x=6$

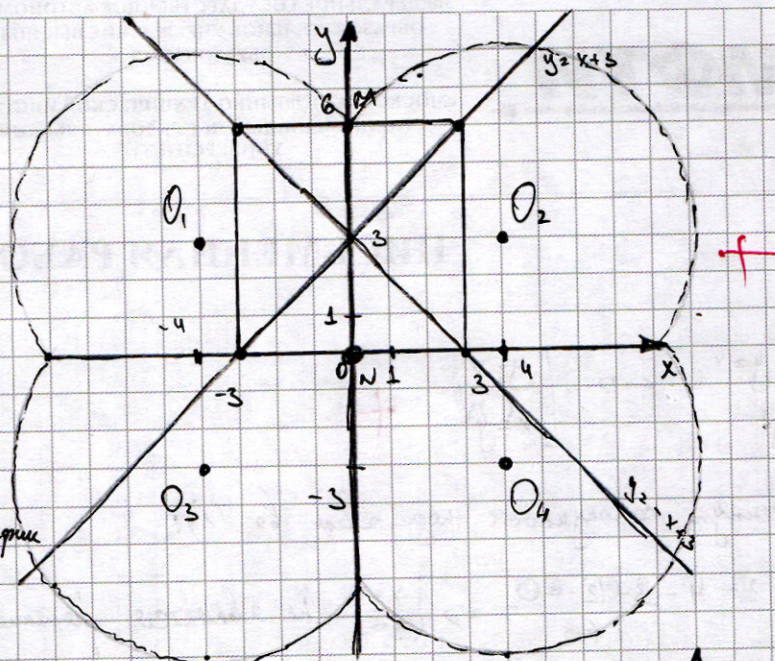
или

$\begin{cases} y-x-3 \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases}$

$y-x-3-y+3-x=6$

проверим на обороте.

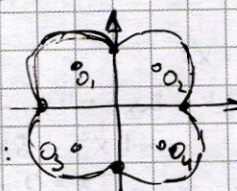
$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x = 3 \end{cases}$$



Полученный квадрат и все уравнения (1)

Уравнение (2) задает несколько окружностей с центрами в точках $(4; 3); (-4; -3); (4; -3); (-4; 3)$

и радиусами $R = \sqrt{a^2}$. Видно из графика функции при $R > 0$ (осей):



Если $R < 1$ не будет пересечений, что видно из графика, т.к. $\rho(O_1; \text{квадрат}) = 1$
 $\rho(O_2; \text{квадрат}) = 1$

$$\begin{aligned} \rho(O_3; \text{квадрат}) &= \sqrt{10} \\ \rho(O_4; \text{квадрат}) &= \sqrt{10} \\ a &= R^2 \\ a &\leq 1 \end{aligned}$$

Если $R = 1$ будет равно 2 корня (стороны квадрата - касательные) $\Rightarrow a = R^2$
 $(4^2 + 3^2 = 5 \text{ (по М и N)})$

Если $R > 1$, но $R < 5$ будет у окружностей O_1 и O_2 будет по 2 решения $\Rightarrow$ 4 корня. Если $R = 5$ окружности O_1 и O_2 - 2 решения: М и N, но тогда еще 2 корня необходимо рассмотреть нижние окружности. Они дают решение

Точку N $\Rightarrow$ только 2 корня у системы $\Rightarrow a = R^2 = 25$ подходит. При дальнейшем увеличении радиусов нижние окружности никогда не пересекутся с квадратом, также как и верхние, т.к. точки М и N будут удалены вверх и вниз соответственно от оси Oy. $\Rightarrow$ если $\begin{cases} a \leq 1 \\ a \leq 25 \end{cases}$

Ответ: $a \in [1; 25]$

Задача №6.

а) $\angle AC \cap \text{ч. BF} = \angle E$

Заметим, что $\angle KBD = 30^\circ$
и $\angle KAD$ (т.к. $K \in AC$) $= 30^\circ$

$\Rightarrow$ четырехугольник KADB -

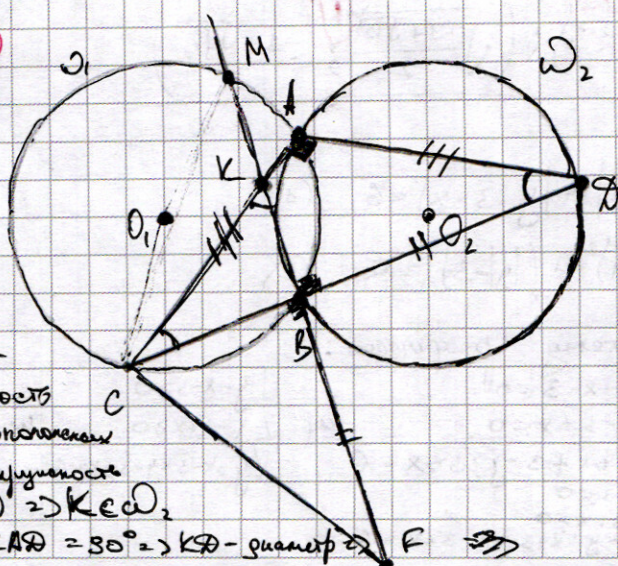
вписанный в окружность C

то $\angle KAD$ и $\angle KBD$ - противолежащие

углы $\angle KAD = 30^\circ$, то $\angle KBD = 30^\circ$ - окружность

описанная около $\triangle ABD \Rightarrow K \in \omega_2$

Т.к. в окружности $\omega_2 \angle KAD = 30^\circ \Rightarrow KD$ - диаметр $\Rightarrow F$



Продолжение на след. листе

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow O_2 \in KQ$$

выс. $\angle CBM \in \omega_1 = 90^\circ \Rightarrow O_1 \in CM$

$\angle ACB = \angle ADB$, т.к. опираются на дугу AB равные окружности $\Rightarrow AC = AD$, т.к.
 $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow \triangle CKB$ т.к. $\angle KBC = 30^\circ$, то $\angle CKB = 90^\circ - 15^\circ - 45^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow BK = BC$

по теореме Пифагора: $KQ^2 = BK^2 + BQ^2$
 $CF^2 = CB^2 + BF^2$, а т.к. $BK = CB$, $QB = BF$, то $CF = KQ$, а KQ — диаметр

$$\Rightarrow CF = 2 \cdot R = 2 \cdot 5 = 10$$

Ответ: а) $CF = 10$ +

$$\text{б) } KB = BC = 6 \Rightarrow \text{по теор. Пифагора } BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$CM = 10 \mid \Rightarrow BM = 8 \Rightarrow MK = BM - BK = 8 - 6 = 2.$$

$$AC = 2\sqrt{2}$$

 $CF = 10$

$$BD = 8 \mid$$

 $BC = 6 \mid \Rightarrow \angle C = 14^\circ \Rightarrow$ т.к. $\angle ACD = 45^\circ$ $AC = 2\sqrt{2} = AD$

$$\angle ACF = \angle ACD + \angle BCF = 45^\circ + \angle BCF$$

$$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cdot \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \cdot \sin \angle BCF$$

$$\text{в } \triangle BCF: \sin \angle BCF = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \angle BCF = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \angle ACF =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 10 = 49$$
 +

Ответ: б) $S_{ACF} = 49$ +

Задача №4

Т.н.:
 $\angle KSO = ?$
 $S_{KLM} = ?$

Решение:

$$S_1 = 1$$

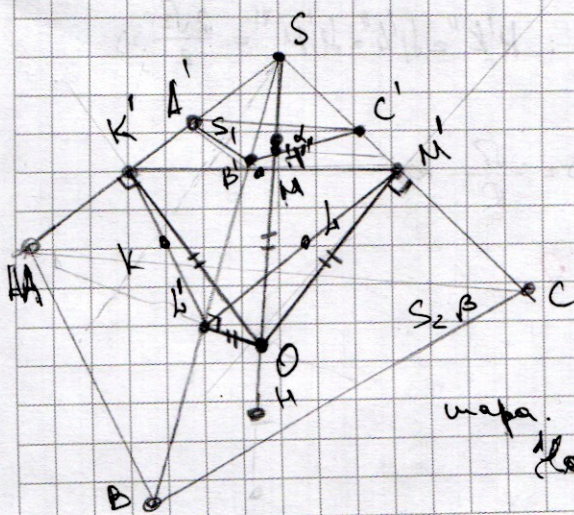
 $S_2 = 4$

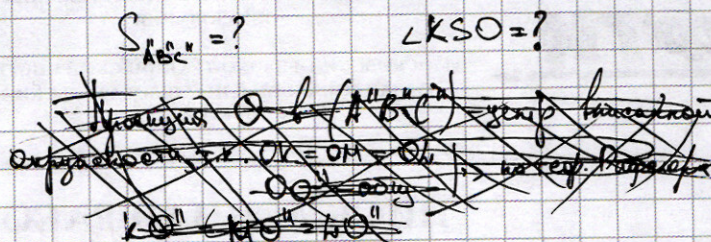
$\alpha \parallel \beta$ т.к. $\alpha \perp SO$
 $\beta \perp SO$ $\Rightarrow ABC A'B'C'$ — усеченная пирамида, в которую вписан шар.

функция HH' — высота в пирамиде. $= 2R$, т.к. касается шара.

Рисуем нормальный рисунок.

Продолжение на обороте




$$OM = OL = OK = R_{\text{урапа}}$$
~~1. $\angle S K O = 90^\circ$~~

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow k=2 \Rightarrow$$

[illegible]

Заметим, что $OH'K''K$ и $HO'KK'$ -
вписанные четырехугольники (по
фигуре) $\Rightarrow$ как равные углы у верш
O (т.к. $\angle OH'K''K = \angle OH'K' = \angle HO'KK'$)
 $\angle K''H'K = \angle K''KH' \Rightarrow KK'' = x$
Аналогично $KK' = HK' = 2x$

$$SO = R + 2R \text{ (by nagagane } \Delta S H' K'' \sim \Delta S H' K' \text{ ho ghyu julan)} = 3R \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3} \quad \text{f} \quad \text{BZ}$$

$$4R^2 = 8x^2 \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Аналогично для других граничных получаем: $H'K'' = H'L'' = H'M'' = \frac{Q\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$S = p \cdot t$$

$$C \quad r_2 \quad \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$1 = p \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{R}$$

Über $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

$$S = ?$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{5\pi}{8}$
 $\frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3}$
 $\frac{\pi}{12}$
 $-4(x^2 - 2x) = 0$
 $\sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$
 $2 \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cos(4x) = \cos 4x$
 $\cos 4x = -2 \sin 7x \sin 4x = -2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$
 $-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$
 $-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$
 $+ 2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0$
 $2 \sin 4x + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x\right) = 0$
 $\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0 \Rightarrow \theta \text{ cc}$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y \quad (2)$$

(2):

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y$$

$$(x-y)^2 - 4(x+y^2+3y)$$

$$(x-y)^2 - (2y-3)^2 - 4x-9=0$$

$$(x-y-2y+3)(x-y+2y-3) - 4x-9=0$$

$$(x-3y+3)(x+y-3) - 4x-9=0$$

ка 003:

$$\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{\lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg xy}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{y^{2 \lg xy}} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg x} = x^{\lg x}$$

$$\Rightarrow 3 \lg x \lg y = \lg x \cdot \lg x + 2 \lg y \lg y$$

$$\lg x \lg y (3 - \lg x - \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} \lg x = 0 \\ \lg y = 0 \\ 3 - \lg x - \lg y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lg x + \lg y = 3 \end{cases}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 0 \quad (1)$$

$$(|x-4|)^2 + (|y-3|)^2 = 0 \quad (2)$$

равно 2 равенств:

(2) - решение

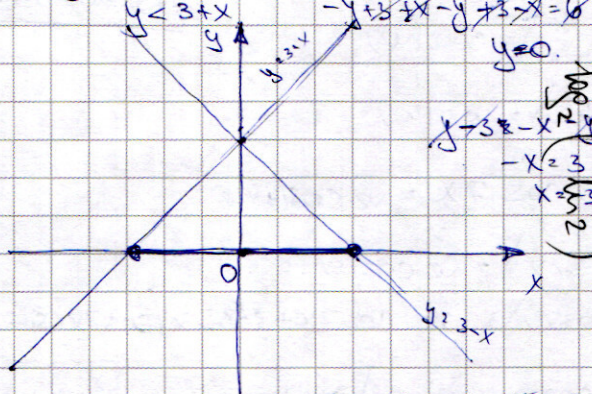
уравнение непрерывности

$$y-3+x < 0$$

$$y-3-x < 0$$

$$y < 3+x$$

$$y < 3-x$$



$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y-6 = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} - 3 \frac{a}{b} + 2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 1$$

$$t = 2$$

$$\frac{a^{64} - 1}{a^{64} - 1} = 22x$$

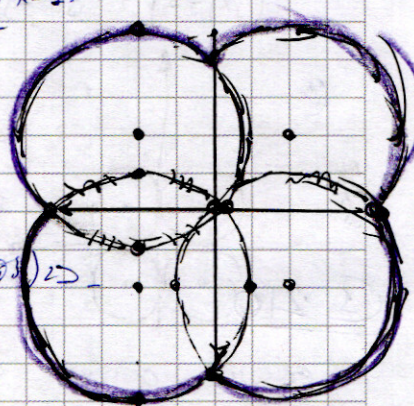
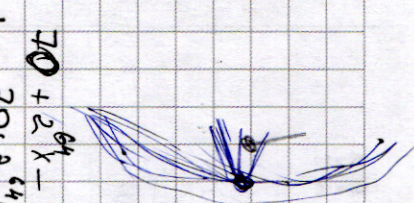
$$\frac{a^{64} - 1}{a^{64} - 1} = 22x$$

$$\frac{a^{64} - 1}{a^{64} - 1} = 22x$$

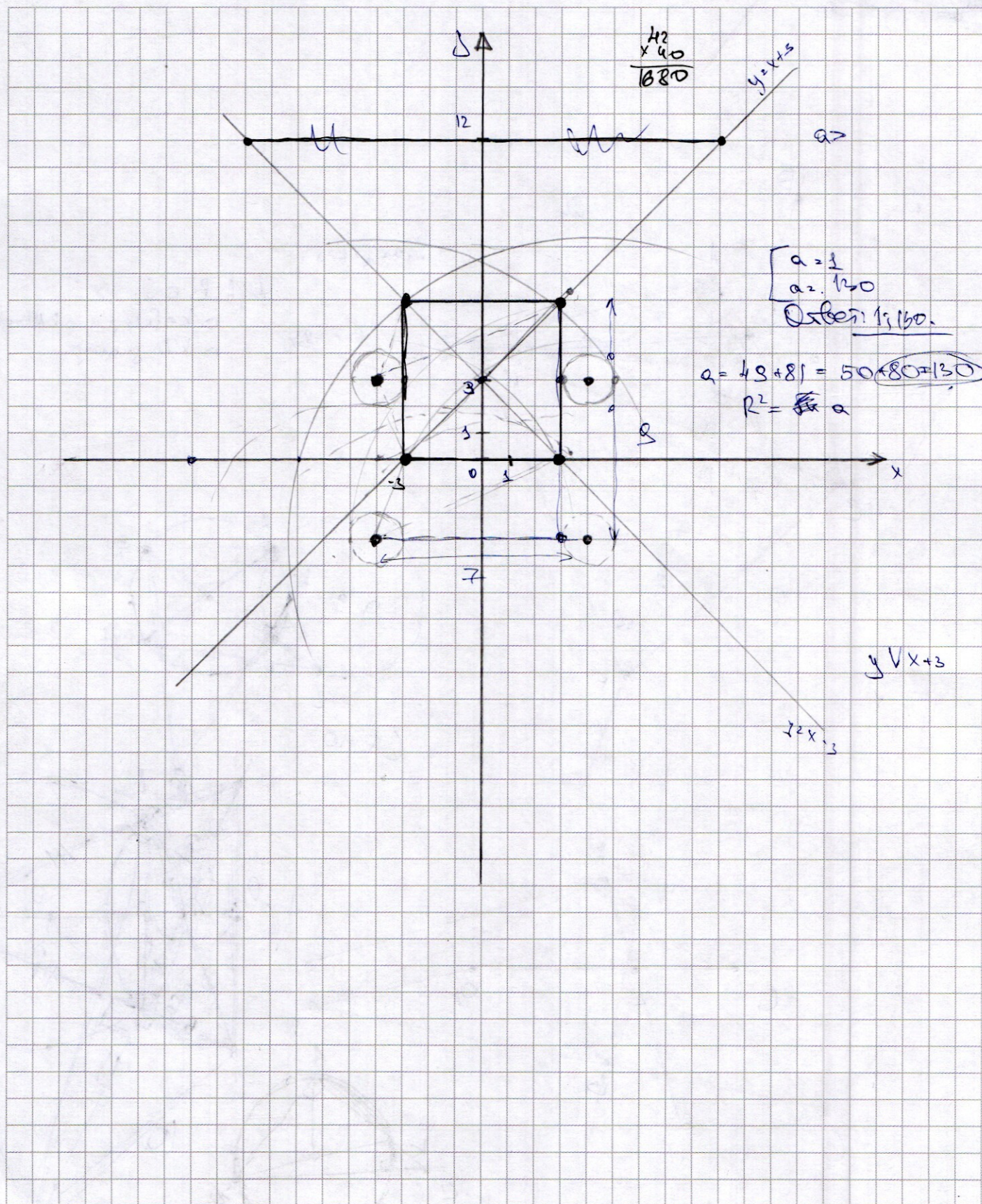
$$70 + 2^{64}x - x + 6 \cdot 2^{64}x + 2^{64}x$$

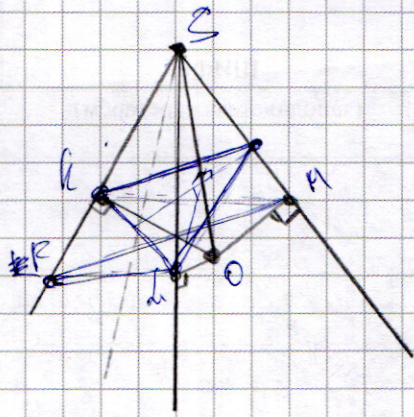
$$70 + 2^{64}x - x + 6 \cdot 2^{64}x + 2^{64}x$$

$$70 + 2^{64}x - x + 6 \cdot 2^{64}x + 2^{64}x$$

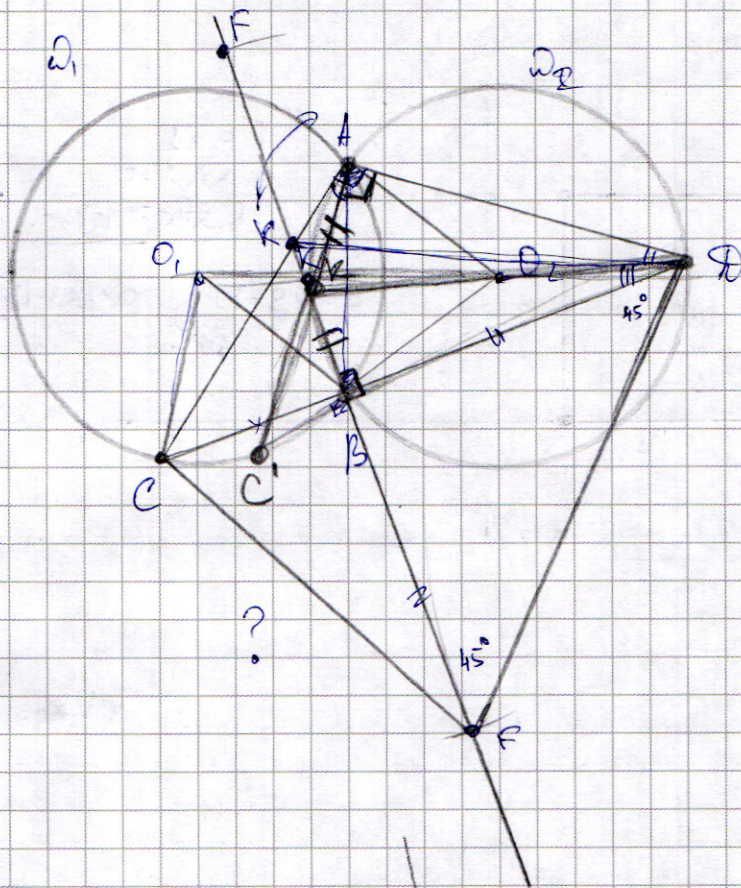


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





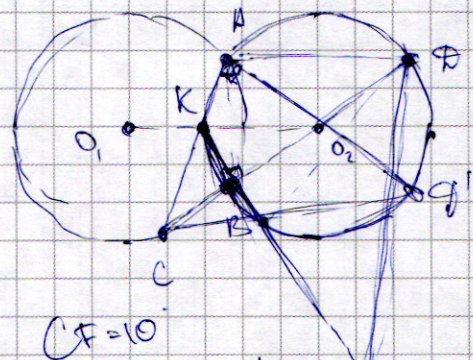
1:02
2:40



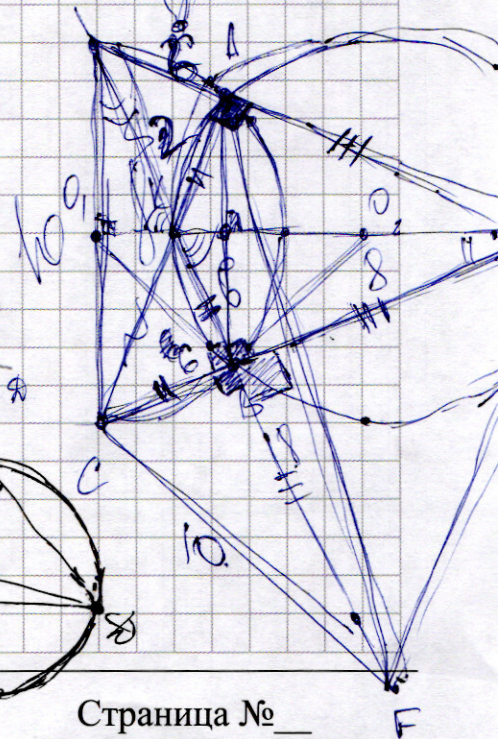
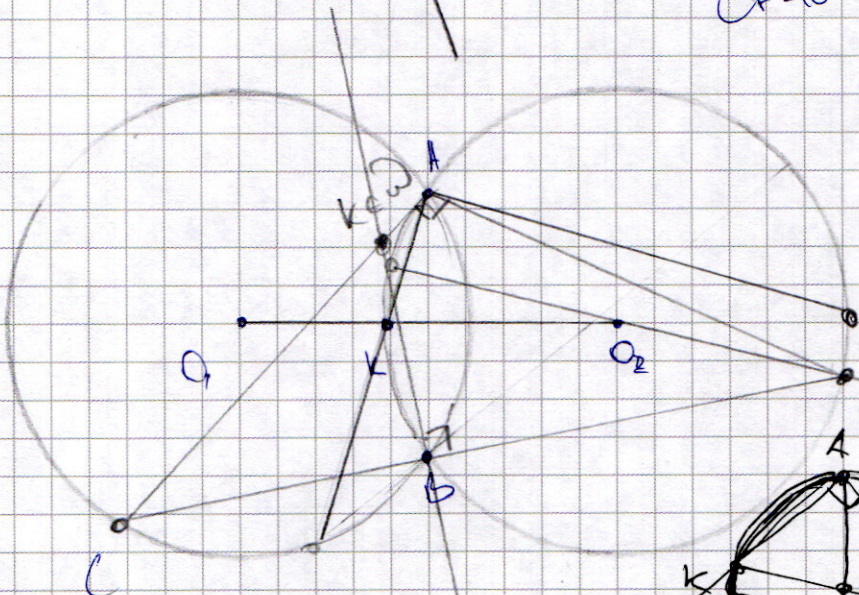
$$l_1 \neq l_2 = l_{2.5}$$

$\Phi; A; B \in \omega_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K \in \omega_2$, т.е. $\angle KAO_2 = 90^\circ$
 $\Rightarrow KQ$ - диаметр.

$$BF = BQ$$



$$\angle C = 10^\circ$$



☒ черновик ☐ чистовик
 (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
 (Нумеровать только чистовики)