

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \Rightarrow$ число может состоять из единиц, троек, семерок и девяток ($3 \cdot 3$)
Т.к. число восьмизначное, а произв. цифр равно 9261, то 3 цифры должны быть равны 7, одна должна быть равна 3, одна - 9 (или еще 2 цифры равные 3, т.к. $3 \cdot 3 = 9$)

Оставшиеся цифры должны быть равны 1, чтобы произведение было равно 9261

I. Если в числе 3 тройки, 3 семерки и 2 единицы, то кол-во различных чисел, кот. можно получить:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 35 \cdot 16 = 560$$

II. Если в числе 1 тройка, 1 девятка, 3 семерки и 3 единицы, то кол-во различных чисел, кот. можно получить:

$$\frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \cdot 56 = 1080$$

Всего чисел: $1080 + 560 = 1640$

Ответ: 1640

~2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0 \quad | : 2$$

$$\sin 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 7x (\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin 2x \cos \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$2\sin 7x \sin (\frac{\pi}{4} - 2x) = \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x + \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$-\sin(9x + \frac{\pi}{4}) = 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\text{Замени: } a = \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}; \quad \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = a - 4x$$

$$-\sin 2a = 2 \cos a \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$-2 \sin a \cos a = 2 \cos a \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\cos a (\sin a + \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

$$\cos a (\sin a + \sin(\frac{\pi}{2} - a + 4x)) = 0$$

$$\cos a \cdot 2 \sin \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{2a - 4x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos a = 0 \\ \sin \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \\ \sin \frac{2a - 4x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = \pi n \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{2a - 4x - \frac{\pi}{2}}{2} = \pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

Обрати. замена:

$$\begin{cases} \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = 2\pi n \\ 9x + \frac{\pi}{4} - 4x - \frac{\pi}{2} = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n \\ 4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \frac{9x + \frac{\pi}{4} - 4x}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{9}; \quad -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \quad \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

~ 3

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$(1) (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\text{Если } y=1, \text{ то: } 1) x = \frac{1}{2}$$

$$(\frac{1}{4})^{-\ln \frac{1}{2}} = 1 - \phi$$

$$2) x = 3 \Rightarrow 9^{-\ln 3} = 1 - \phi \Rightarrow y \neq 1 \Rightarrow \text{можно прологарифми.}$$

$$\text{ур-ие по } y \text{ (т.к. } y \neq 1 \text{ и } y > 0)$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$(2) -y(2x - y) - x(2x - y) + 4(2x - y) = 0$$

$$(2x - y)(y + x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_y (x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln \left(\frac{y}{x^2} \right)$$

$$-\ln x \log_y (x^2 y^4) = \ln y - 2 \ln x \quad | : \ln y$$

$$(-\log_y (x^2 y^4) + 2) \ln x = \ln y \quad | : \ln y$$

$$(2 - 2 \log_y x - 4) \log_y x = 1$$

$$2 \log_y^2 x - 3 \log_y x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_y x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

"

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^{\frac{1}{2}} \\ y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \\ y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 4 - x \\ y = x^2 \\ y = 2x \\ y = x^2 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ — не вх. в ОДЗ} \\ x = 2 \\ y = 2 \\ x = 0 \text{ — не вх. в ОДЗ} \\ x = 2 \\ y = 4 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ — не вх. в ОДЗ} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$

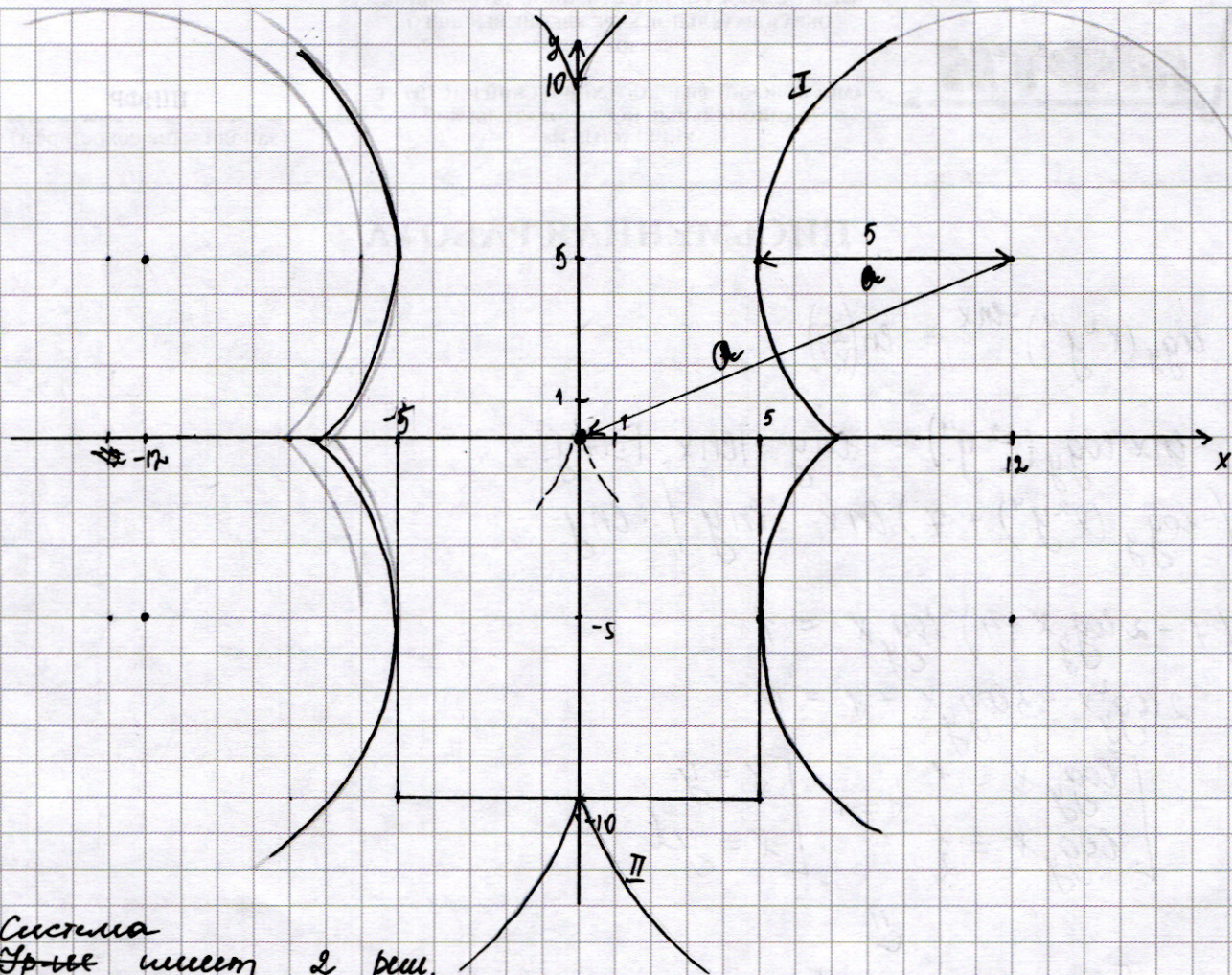
~5

$$|x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 \quad (1)$$

$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 2 \quad (2) \quad \text{ровно 2 решения}$$

(1) график ур-ия — квадрат со стороной 10, с центром в т. $(0; -5)$

✗



Система
уравнений имеет 2 реш.

есть 2 т. перес. у графиков

Такое возможно при 2х значениях a :

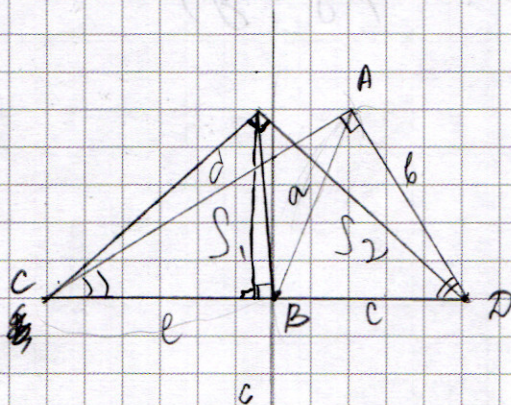
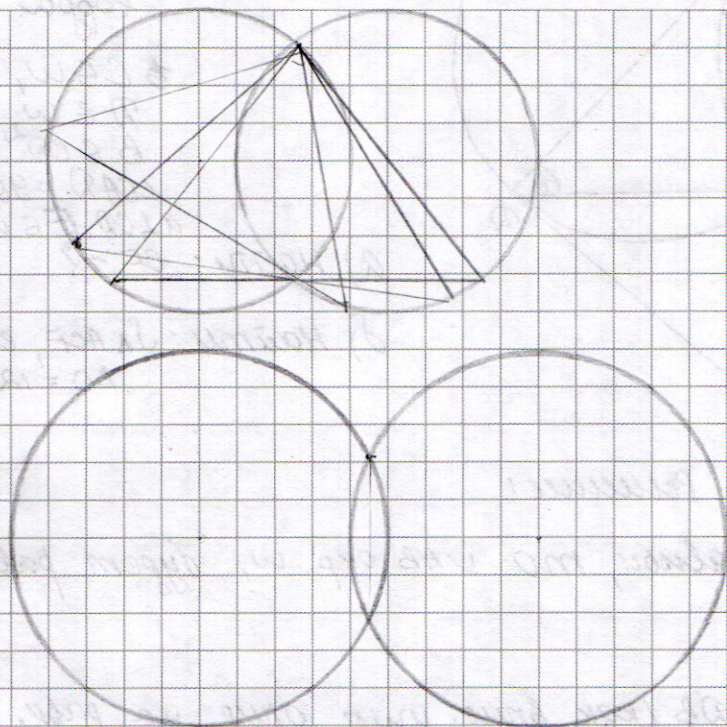
$$I \quad a = 5^2; \quad a = 25$$

$$II \quad a = 12^2 + 5^2; \quad a = 144 + 25; \quad a = 169$$

Ответ: при $a = 25$ и $a = 169$ система уравнений имеет
ровно 2 решения.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{4S_1}{ade} = \frac{4S_2}{abc}$$

$$\frac{1}{x} \dots \frac{1}{35} \frac{1}{34} \dots \frac{1}{x}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^{64}$$

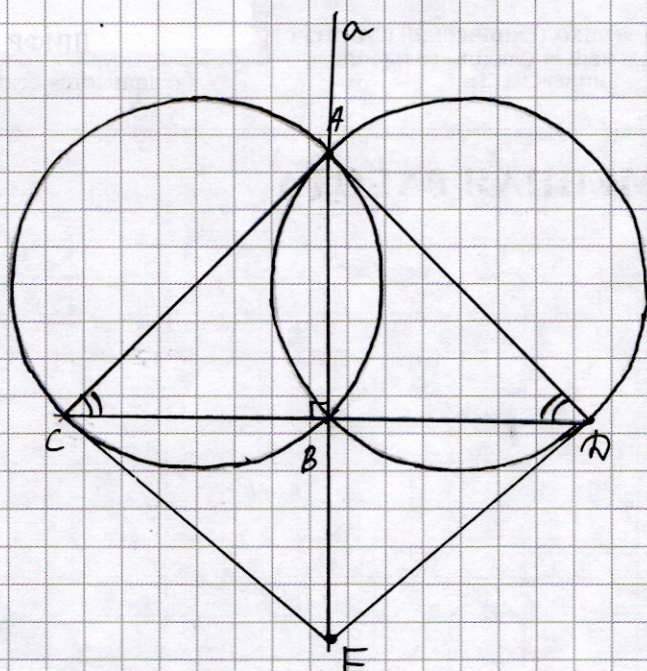
$$y \geq 2^{\frac{1}{35}} + 2^{\frac{1}{34}} + 2^x$$

$$y \leq 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$6 + 32 = 38$$

$$2^6 = 64$$

№6



Дано: окружн. W_1 и W_2

$$R_1 = R_2 = 10$$

AB - общая хорда

$C \in W_1$

$D \in W_2$

$B \in CD$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$a \perp CD$, $E \in a$, $FB \perp CD$

а) Найти: CF - ?

б) Найти: $S_{\triangle ACF}$, если $BC = 12$

а)

Решение:

I. Так как окружности равны, то $\angle CAB$ окр. W_1 будет равен $\angle ABD$ окр. W_2

$\angle ACB = \angle ADB$ (как впис. углы, опир. на равн. дуги)

$\triangle CAD$ - пр (по признаку)

II. ~~$\triangle CAB$~~
 $\triangle CAD$ - пр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$\begin{array}{r} 3 \times 3 \\ 7 \times 3 \\ 1 \times 2 \end{array} : \begin{array}{r} 3 \\ 35 \\ 16 \\ + 210 \\ 35 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 25 \cdot 16 = 560$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 1 \\ 9 \times 1 \\ 7 \times 3 \\ 1 \times 3 \end{array} \quad \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \cdot 56 = 1080$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 2 \\ 343 \\ \times 27 \\ \hline 9401 \\ + 9401 \\ \hline 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ + 560 \\ \hline 1640 \end{array}$$

$$\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cdot 9 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} + \sin \frac{\frac{3\pi}{4} - x}{2} = 2 \sin \frac{8x + \pi}{4} \cos \frac{10x - \frac{\pi}{2}}{4}$$

~2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\sin 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = \cos 4x$$

$$\left(\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos 4x$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x + \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$-\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$-2 \sin t \cos t = 2 \cos t \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\cos \left(\sin t + \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} + 4x \right) + \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin a \cos 4x + \sin 4x \cos a + \cos a = 0$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = a - 4x$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - 4x \frac{\pi - x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 4(2x - y) = 0$$

$$-y(2x - y) + x(2x - y) + 4(2x - y) = 0$$

$$-(y + x)(2x - y) + 4(2x + y) = 0$$

$$(2x - y)(4 - y - x) = 0$$

$$(x + y - 4)(2x - y) = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 2x \text{ или } y = 4 - x$$

$$y = 2x \Rightarrow (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$\frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{6 \ln x}} = \frac{1}{(16x^6)^{\ln x}}$$

$$\frac{(2x)^{\ln 2}}{64^{\ln x} \cdot x^{6 \ln x}} = \frac{1}{16^{\ln x} \cdot x^{6 \ln x}}$$

$$(2x)^{\ln 2} = \frac{64^{\ln x}}{16^{\ln x}}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2} = 4^{\ln x}$$

$$x^{\ln 2} = 2^{2 \ln x - \ln 2}$$

$$y = 4 - x$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$\log_y(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$-\ln x \log_y(x^2 y^4) = \ln y - 2 \ln x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} 4 - x &= x \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\log_2(x^{\ln 2}) = 2 \ln x - \ln 2$$

$$\ln 2 \log_2 x = 2 \ln x - \ln 2$$

$$\ln 2 (\log_2 x + 1) = 2 \ln x$$

$$\log_2 x + 1 = \frac{2 \ln x}{\ln 2}$$

$$\log_2 x + 1 = 2 \log_2 x$$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x^2 = 4 - x$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$-\ln 2 = \ln \frac{1}{128}$$

$$2 \cdot 10 \ln 2 = 4 \ln \frac{1}{32}$$

$$2 \cdot 10 \ln 2 = 2 \ln 2$$

$$2x = x^2$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = (2x)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$1 = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{9}$$

$$(4 - \log_y(x^2 y^4)) \ln x = \ln y$$

$$(4 - 2 \log_y(x y^2)) \log_y x = 1$$

$$(4 - 2 \log_y x - 2 \log_y y^2) \log_y x = 1$$

$$(3 - 2 \log_y x) \log_y x = 1$$

$$\log_y x = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = y^{\frac{3}{2}} \\ y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$x = y^{\frac{3}{2}}$$

$$y = 2 \cdot y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}$$

$$1 = 2 \cdot y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$-2 \log_y x + 3 \log_y x - 1 = 0$$

$$2 + 2 = 3 + 1 = 0$$

$$9 - 8 = 1$$

$$t = 1$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^{\frac{3}{2}} \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^{\frac{3}{2}} \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$x^2 - \ln x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \approx 4$$

$$-1 + \sqrt{17} \approx 8$$

$$\sqrt{17} \approx 9$$

$$4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y \geq 2^x + 2^{34} + 2^{35}$$

$$y < 2(2^{32} - 1)x + 64 + 8 + 4$$

$$y \geq 2^x + 2^{35} + 2^{34}$$

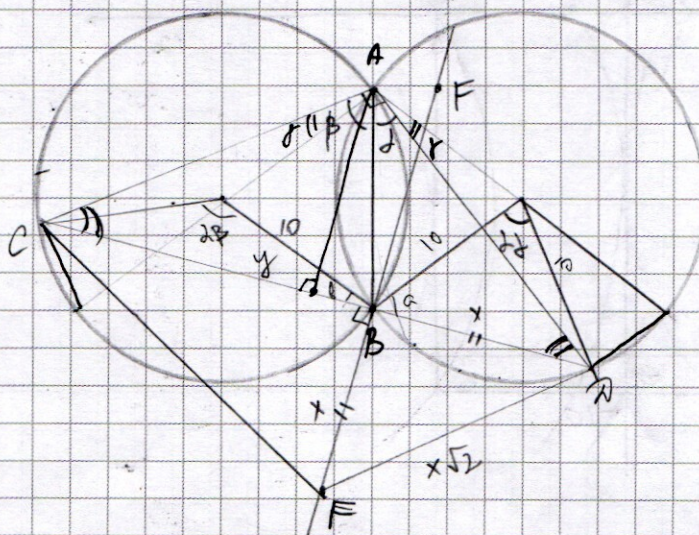
$$y < 2^{33} - 2x + 2^6 + 2^3 + 2^2 > 2^x + 2^{34} + 2^{35}$$

$$x < \frac{2^{33} + 2^6 + 2^3 + 2^2 - 2^{34} - 2^{35}}{2}$$

$$x < 2^{32} + 2^5 + 2^2 + 2 - 2^{33} - 2^{34}$$

$$\frac{76}{64} \frac{76}{12}$$

$$\frac{76}{32} = \frac{64 + 8 + 4}{44}$$



$$180 - a = a + 2a$$

$$180 - b = b + 2b$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$|x| \geq |y+5|$$

$$(x+y+5)^2 + (y-x+5)^2 + 2|(x+y+5)(y-x+5)| = 100$$

$$x^2 + y^2 + 25 + 2xy + 10x + 10y + x^2 + y^2 + 25 + 10y - 10x - 2xy + 2|(y+5)^2 - x^2| = 100$$

$$2x^2 + 2y^2 + 20y + 50 + 2|(y+5)^2 - x^2| = 100$$

$$x^2 + y^2 + 10y + |(y+5)^2 - x^2| = 25$$

$$\begin{aligned} |y+5| &\geq |x| \\ (y+5)^2 &\geq x^2 \end{aligned}$$

⇓

$$x^2 + y^2 + 10y + y^2 + 10y + 25 - x^2 = 25$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= -10 \end{aligned}$$

$$y^2 + 10y = 0$$

$$|y+5| < |x| \Rightarrow x^2 + y^2 + 10y + x^2 - y^2 - 10y - 25 = 25$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

