

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ**

**11 класс**

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.







## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Разложим 9261 на простые множители по ост. теор. цифр.  
 $9261 = 3 \cdot 3087 = 3 \cdot 3 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$

Для того, чтобы произведение всех цифр 8-значного числа равнялось 9261, необходимо, чтобы в этом числе присутствовали достаточное количество нулевых цифр (~~иначе произведение не было бы равно 9261~~), а мы имеем: 3, 7, 9. 9, т.к.  $3^2 = 9$ . 9-цифра.

Очевидно, что кроме этого необходимо, чтобы все остальные цифры являлись единицами, т.к. если это будет какая-либо другая цифра - произведение цифр, равное 9261, не получится. Итак, наши варианты получения произведения 9261 (запишем все цифры, которые могут составить 8-значное число):

- 1) 3; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1
  - 2) 9; 3; 7; 7; 7; 1; 1; 1
- Других вариантов нет, т.к. иначе произведение из цифр не получится.

1) Кол-во всех вариантов числа равно  $P_{(3; 3; 2)} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 560$ .

↑ перестановки с повторениями элементов по 3, 3 и 2

2) Кол-во всех вариантов, аналогично, равно  $P_{(1; 1; 3; 3)} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} \cdot 2 = 560 \cdot 2 = 1120$ .



Прог. Вурманов:  $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680.

N3.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Предположим:  $x > 0$  (по усл. логарифма)

следовательно,  $\begin{cases} \frac{y}{x^7} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow y > 0.$

(1): Прологарифмируем обе части уравнения (возведем натур. логарифм).

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(y/x^7)}$$

$$-\ln x \cdot \ln x^2 y^4 = \ln \frac{y}{x^7} \ln y.$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x y^2 = \ln \frac{y}{x^7} \ln y.$$

$$-2 \ln x \cdot (\ln x + 2 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 7 \ln x \ln y.$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0.$$

Пусть  $\ln y = a$ ;  $\ln x = b$

Тогда:  $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \quad | : b^2$$

Если  $b = 0$ , то  $a = 0$

$$\begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Подставим в ур. (2):

$$1 - 1 - 2 + 8 - 1 \neq 0.$$

$b = 0$  не содержит решений.

Значит,  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$  - не решение.

$$\frac{a^2}{b^2} - 3 \frac{a}{b} + 2 = 0.$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Перепишем  $\frac{a}{b} = t$   $b=0$  - не содержит решений.

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_* = 2 \\ t = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{a}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{\ln y}{\ln x} = 2 \\ \frac{\ln y}{\ln x} = 1 \end{cases} \begin{cases} \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 & (x > 0) \\ y = x & (x > 0) \end{cases}$$

$$(2): y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

Решим кв. уравнение ант.  $y$ :

$$y^2 - y(x+4) + 8x - 2x^2 = 0$$

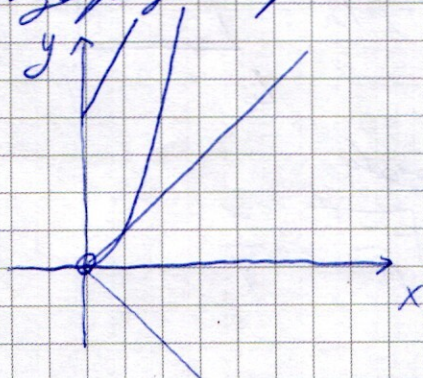
$$D = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm |3x-4|}{2}, \text{ но } 3x-4 > 0, \text{ т.к. } x > 0.$$

$$y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x \quad \begin{cases} y = 2x+4 \\ y = -x \end{cases}$$

$$y = \frac{x+4-3x+4}{2} = -x$$

Изобразим решения каждого ур-я на кл-ти  $(x; y)$ .



Прямая  $y = 2x + 4$  и парабола  $y = x^2$

Пересекаются.

$$x^2 = 2x + 4.$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0.$$

$$D = 4 + 16 = 20.$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad y_1 = 2 + \sqrt{5} + 4 = 6 + \sqrt{5}$$

$$x_2 < 0 - \text{не угад.}$$

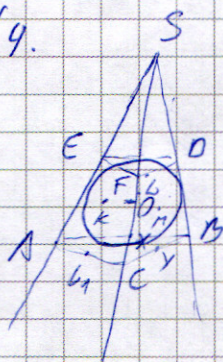


В итоге имеем ~~разность~~ 1 параметр системы:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y = 6 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ:  $(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}; 6 + \sqrt{5})$

№4.



~~Пусть сечение 3-гранного угла не есть, ~~ABC~~~~

из центра

Обозначим сечение 3-гранного угла не-плоск. перп-том SD и касающемся сфер кон

ABC и EDF.  $(ABC) \perp (SO)$   
 $(EDF) \perp (SO)$  по ул.  $\Rightarrow (ABC) \parallel (EDF)$

Образуется тетраэдр SABC с не-плоск. перп-том основанию ~~EDF~~ Известно из условия, что  $S_{ABC} = 16$  (пусть

ABC - гипотеза ~~с~~ сечением).  $S_{EDF} = 1$ ,  $(SO) \perp (ABC)$

Значит, SO - высота. (~~S-высота~~, O середина стороны, содержащей высоту.  $SO \perp (ABC) = H$ .)

Построим сечение не-плоск. (KSL):  $SK \perp (AC) = L$

$$LO \perp (SL)$$

Также известно, что

$$(EDF) \parallel (ABC)$$

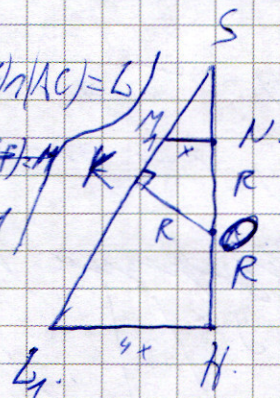
SABC - тетраэдр

$$\Rightarrow \Delta EDF \sim \Delta ABC.$$

Значит, по в-ву подобия,

$$\frac{MN}{L_1 H} = \sqrt{\frac{S_{EDF}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}.$$

Пусть  $MN = x \Rightarrow L_1 H = 4x$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Известно, что  $NO = R = NO = OH = KO = R$ .

$\triangle SMO$  равно  $SN = y \Rightarrow SH = 4y$ .

$\triangle SMN \sim \triangle SKO$  (по 2-м углам).

$\frac{SM}{SK} = \frac{SN}{KO} \Rightarrow \triangle SMN \sim \triangle SLH$  (по 2-м углам).

$$\frac{SM}{SH} = \frac{1}{4}$$

$$SN = z$$

$$\frac{z}{z + 2R} = \frac{1}{4} \quad 4z = z + 2R$$

$$z = \frac{2R}{3}$$

$$SN = \frac{2R}{3}$$

$$SO = R, \frac{2R}{3} = \frac{SR}{3} \Rightarrow SK = \frac{4R}{3} \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{SR}{SK} = \frac{3}{5}, \quad \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5} \text{ (КСОСВ)}$$

Аналогично, проведём подобные действия в м-мат.

(SLH) и (SMH). Получим следующие соотношения:

$$\frac{SK}{SL_1} = \frac{4R}{3}, \quad \frac{SR}{SL_1} = \frac{3R}{5} = \frac{4}{5}$$

$$SL_1 = \frac{SH}{\cos \angle KSO} = \frac{2R + \frac{2R}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{8R \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10R}{3}$$

$$\frac{SK}{SL_1} = \frac{4R}{3} \cdot \frac{3}{10R} = \frac{2}{5}$$

Аналогично, проведём подобные действия в н-мат



$(SLH)$  и  $(SMH)$  и получим по те соотношения:

$$\frac{SL}{LX} = \frac{2}{5} \quad (SL) \cap (AB) = X$$

$$\frac{SM}{MY} = \frac{2}{5} \quad (SM) \cap (CB) = Y$$

Тогда, по ~~свой~~ признаку подобия:  $\triangle KLM \sim \triangle ABC$ .  
 $k = \frac{2}{5}$

$$(KLM) \cap (SAC) = (A_1C_1)$$

$$(KLM) \cap (SAB) = (A_1B_1)$$

$$(KLM) \cap (SBC) = (B_1C_1)$$

Также по ~~свой~~ признаку подобия (соответственные стороны - ~~параллельны~~ <sup>параллельны</sup> ~~параллельны~~ <sup>параллельны</sup>).

Очевидно, что  $\triangle SA_1C_1 \sim \triangle SAC$

$$\triangle SB_1C_1 \sim \triangle SBC \quad k = \frac{2}{5}$$

$$\triangle SA_1B_1 \sim \triangle SAB$$

$$\text{Значит } S_{A_1B_1C_1} = k^2 S_{ABC} = \frac{4}{25} \cdot 16 = \frac{64}{25}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{5}; \frac{64}{25}$$

Реш.

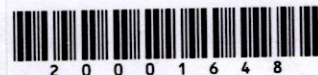
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-1)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{имеем} \\ a: \text{имеет равно значение} \end{matrix}$$

(1):  $y = -x - 5$  — граничные случаи знаков модуля.

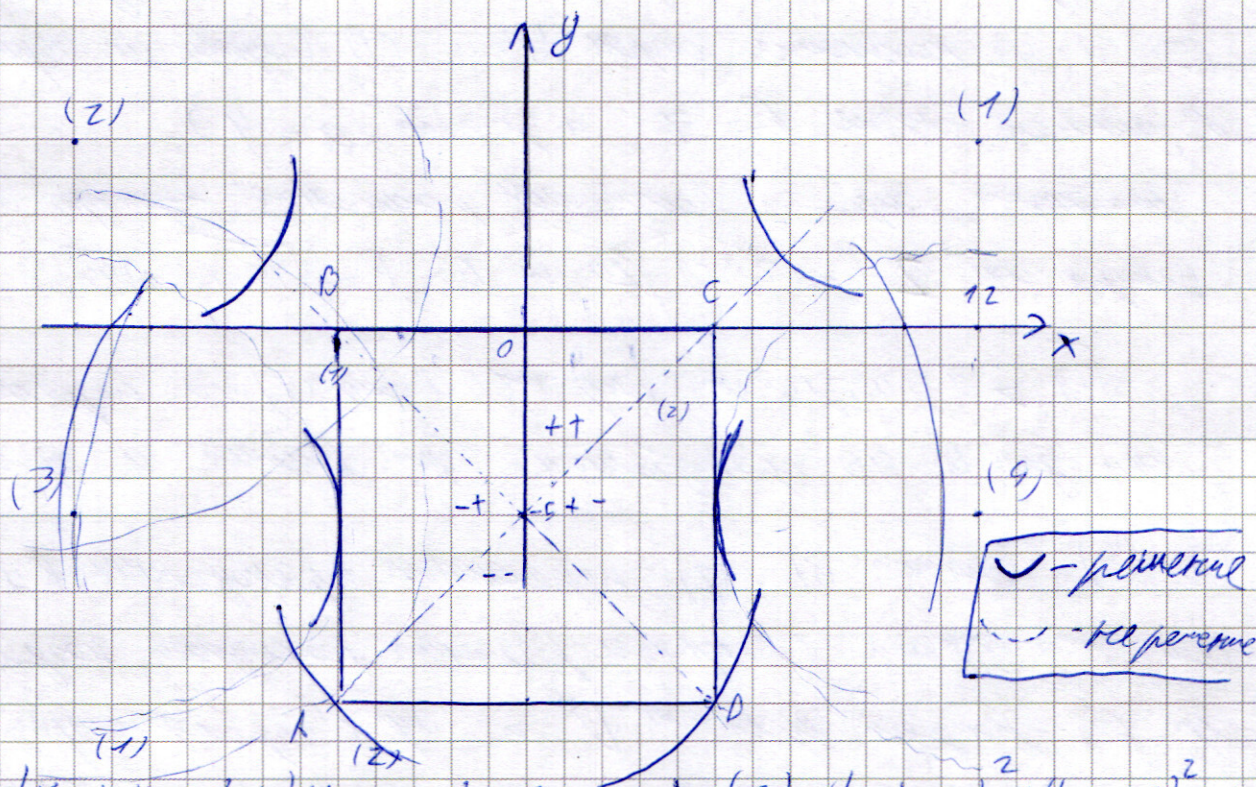
$$y = x - 5$$

Подставим в 2-е  $(x, y)$  график данного уравнения.





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(+ +): x+y+5+y-x+5=10 \\ y=0$$

$$- +: -x-y-5+y-x+5=10 \\ -2x=10 \\ x=-5$$

$$+ -: x+y+5-y+x-5=10 \\ 2x=10 \\ x=5$$

$$--: -x-y-5-y-x-5=10 \\ -2y=20 \\ y=-10$$

Фигура - прямоугольник

$$(2): (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

Выражение для 4-х  
окружностей с центрами  
в м.  $(12; 5); (-12; 5);$   
 $(12; -5); (-12; -5)$   
и  $R = \sqrt{a}$ ,  $a > 0$ .

Необходимое условие:  
ровно 2 решения. Очевидно,  
что 2 решения у данных  
уравн-ий будут только  
в том случае, когда  $y$   
звук из окружностей (1) и (2)  
или (3) и (4)



будет ровно одна точка пересечения с полученным  
 а прямоугольником из упр (1). (Из соображений симметрии)  
 "Брошенная" а от нуля до бесконечности замечаем, что  
 1-ое пересечение с прямоугольником happens, когда окр.  
 (3) и (4) касаются сторон  $AB$  и  $CD$  (будем их считать)  
 В данном случае  $R = 7$ , а значит  $a = 49$ .

При этом, окр (2) касаются расстояния  $R$  от  
 центра окр  $Z(-12; 5)$  до м.  $B$ :  $R = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$ .

$\sqrt{74} > 7$ , а значит окр (1) и окр (2) не пересекаются  
 при  $a = 49$  прямоугольнике. При больших  $a$  окр (1)  
 (3) и (4), а также (1) и (2) пересекаются прямоугольнике в более  
 чем 2-х точках. Следующее решение happens, когда  
 окр (2) пройдет через м.  $D$ , а окр (1) пройдет через м.  $A$ .  
 Рассчитаем расстояние от центра окр (1) до м.  $C$ :

$$R_{AC} = \sqrt{18^2 + 5^2} = \sqrt{289 + 25} = \sqrt{314}$$

$$\text{При этом } R = R(O_2; D) = \sqrt{12^2 + 15^2} = \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514}.$$

Очевидно, что  $R_{AC} < R$ , а значит окр (3) и окр (4)  
 не пересекаются. Итого. прямоугольнике, т.к. это единственные  
 точки.

Значит,  $R = \sqrt{514} \Rightarrow a = 514$  - решение.

При больших  $a$  решений нет.

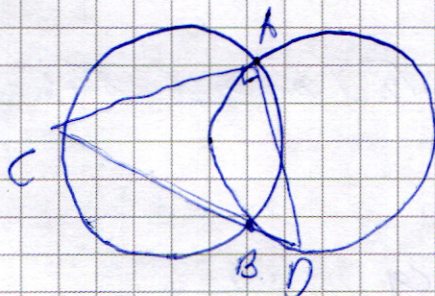
Ответ: 49; 514.





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

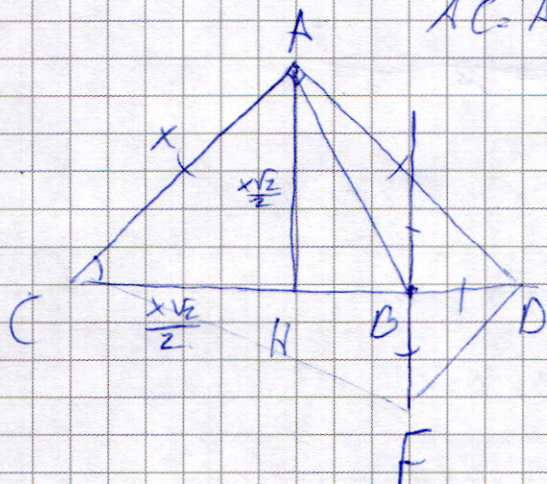


$\angle ADB \sim \angle AB(1)$   
 $\angle ACB \sim \angle AB(2)$   
То еб. будут  
пересекаться  
дуг,  $\angle AB(1) = \angle AB(2)$

Значит,  $\angle ADB = \angle ACB$ .

Значит,  $\triangle ACD$  - равнобедренный  
и равнобедренный.

$AC = AD$ .



Пусть  $AC = x$

Пусть  $CH = AH = AD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

$\triangle ABC$  - вписан в окружность  $R = 10$ .

То м. окружности,  $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$

$AB = 2R \sin \angle ACB =$

$= 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$ .

$AB = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 200}$

$AB = \sqrt{200 - \frac{x^2}{2}}$



N2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

~~$$2 \sin 7x \sin 2x$$~~

$$\sin 9x + \cos 9x = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x \right) = \sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{4} \sin 9x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 9x \right) \\ = \sqrt{2} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) = -\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos 5x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x \right) \\ = -\sqrt{2} \cos \left( 5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left( 5x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left( 5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0.$$

~~$$\cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) = \left( 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0.$$~~

~~$$\cos \left( \frac{9x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = \sin \frac{9x - \frac{\pi}{4}}{2}$$~~

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \cos 4x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (-2 \sin 7x \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \sin 7x \cos 2x - \cos 4x = 0.$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 2x - \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 4x = 0.$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right) \end{cases}$$

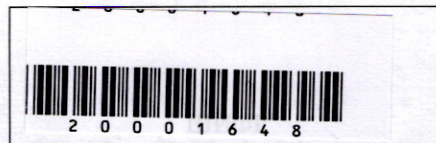
$$\begin{cases} 1 = \cos 2x \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} & x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \\ & \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}. \\ & \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$9261 = 3 \cdot 3087 = 3 \cdot 3 \cdot 1029 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

Разложение в произведение 8 цифр.

$$333777$$

$$93 \cdot 777$$

Кол-во перестановок цифр

$$1) 33377711$$

$$P(3;3;2) = \frac{8!}{3!3!2!} =$$

2) Кол-во перестановок

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$39777111$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 =$$

$$= 10 \cdot 56 = 560$$

$$P(4;1;3;3) = \frac{8!}{3!3!} =$$

$$P(3;3;2) \cdot 2 = 1120$$

$$\Sigma P = 1120 + 560 = 1680$$

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \frac{1}{2} 9x + \frac{1}{2} 5x = 0$$

$$\cos 9x + \frac{1}{2} 9x = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} 9x \right) = \sqrt{2} \left( \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\frac{1}{2} 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left( \cos \left( 9x + \frac{\pi}{4} \right) \right) / \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) = -\sqrt{2} \left( \cos \left( 9x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left( 9x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left( 2 \cos \frac{9x - \frac{\pi}{4} + 9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{9x - \frac{\pi}{4} - 9x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \cos 9x \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$



$$2\sqrt{2} \cos 9x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 9x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 5x \sin \frac{\pi}{4}) - \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} (\cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x) = 0$$

$$\sqrt{2} + 2 \sin \frac{9x - \frac{\pi}{4} + 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{9x - \frac{\pi}{4} - 5x - \frac{\pi}{4}}{2} - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$-2\sqrt{2} \sin(7x) \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2} \cos 4x)$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - (2 \cos \frac{9x + \pi}{2} \cos \frac{x + \pi}{2}) = 0$$

$$2 \sin 7x \sin(4x - \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \sin 7x \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2 2x + \sin^2 2x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos^2 2x + \sin^2 2x = 0$$

$$-2 \sin 7x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 2x - \cos^2 2x + \sin^2 2x = 0$$

$$\sin 2x (\sin 2x - \sqrt{2} \sin 7x) - \cos 2x (\cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$-2 \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\ln y - 7 \ln x}{\ln x + 2 \ln y}$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 9 \ln x \ln y$$

113.

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad x > 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy(4+x) + 8x - 2x^2 = 0$$

$$D = 16 + 8x + x^2 - 32x + 8x^2$$

$$= 9x^2 - 24x + 16$$

$$9x^2 - 24x + 16 =$$

$$= (3x + 4)^2$$

$$y = \frac{4+x \pm |3x+4|}{2}$$

$$y = \frac{4+x - |3x+4|}{2}$$

$$y = 4 + 2x$$

$$y = 4 - x$$

$$(xy^2)^{-2 \ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\ln(xy^2)^{-2 \ln x} = \ln y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$-2 \ln x \ln(xy^2) = \ln \frac{y}{x^2} \ln y$$

$$-2 \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\ln \frac{y}{x^2}}{\ln x \ln y}$$

$$-2 \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\ln y - \ln x^2}{\ln x \ln y}$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$+2\ln^2 x$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

$$\ln y = a$$

$$\ln x = b$$

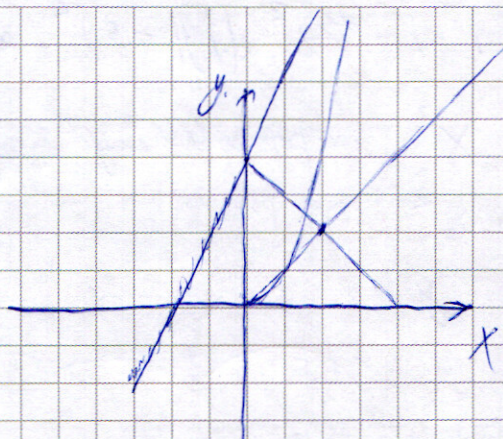
$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \quad | : b^2$$

$$\ln y = a \quad b = 0 \quad x = 1$$

$$\text{Тогда } \ln^2 y = 0$$

$$\ln y = 0 \quad y = 1$$

$$x \neq 1 \quad y = 1 - \text{не решение}$$



$$\frac{a^2}{b^2} - 3\frac{a}{b} + 2 = 0$$

$$\frac{a}{b} = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{2} = 2$$

$$t = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} = 2$$

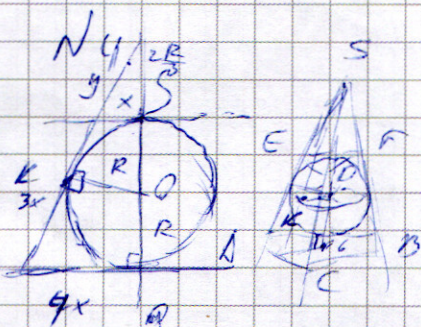
$$\ln y = 2 \ln x$$

$$y = \ln y = \ln x^2 \quad x > 0$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} = 1$$

$$\ln y = \ln x$$

$$\ln y = x$$



Продолж.  $\triangle ABC$

$$S_{\triangle EFD} = 1$$

$$\frac{SE}{EA} = \frac{1}{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = 16$$

$$SO = \frac{1}{3} \cdot 16 = \frac{16}{3}$$

$$\frac{3R}{5R}$$

$$\frac{2}{2+2R} = \frac{1}{4}$$

$$4R = 2 + 2R$$

$$3R = 2 \quad R = \frac{2}{3}$$

$$\angle KSO = \frac{2}{5} \quad \angle RSO = \frac{2}{5}$$



$$\frac{SK}{SA} =$$

$$\sqrt{\frac{2SR^2}{3}} - R^2 = \frac{4R}{3}$$

$$\sqrt{|x+y+5|} + \sqrt{|y-x+5|} = 10.$$

$$((|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a.$$

Решено 2 решения

$$x^2 - 24|x| + 144 + y^2 - 10|y| + 25 = a$$

$$y + x + 5. \quad y = -x - 5$$

$$y - x + 5. \quad y = x - 5$$

$$++: x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$2y + 10 = 10 \quad 2y = 0$$

$$y = 0$$

$$-+: -x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

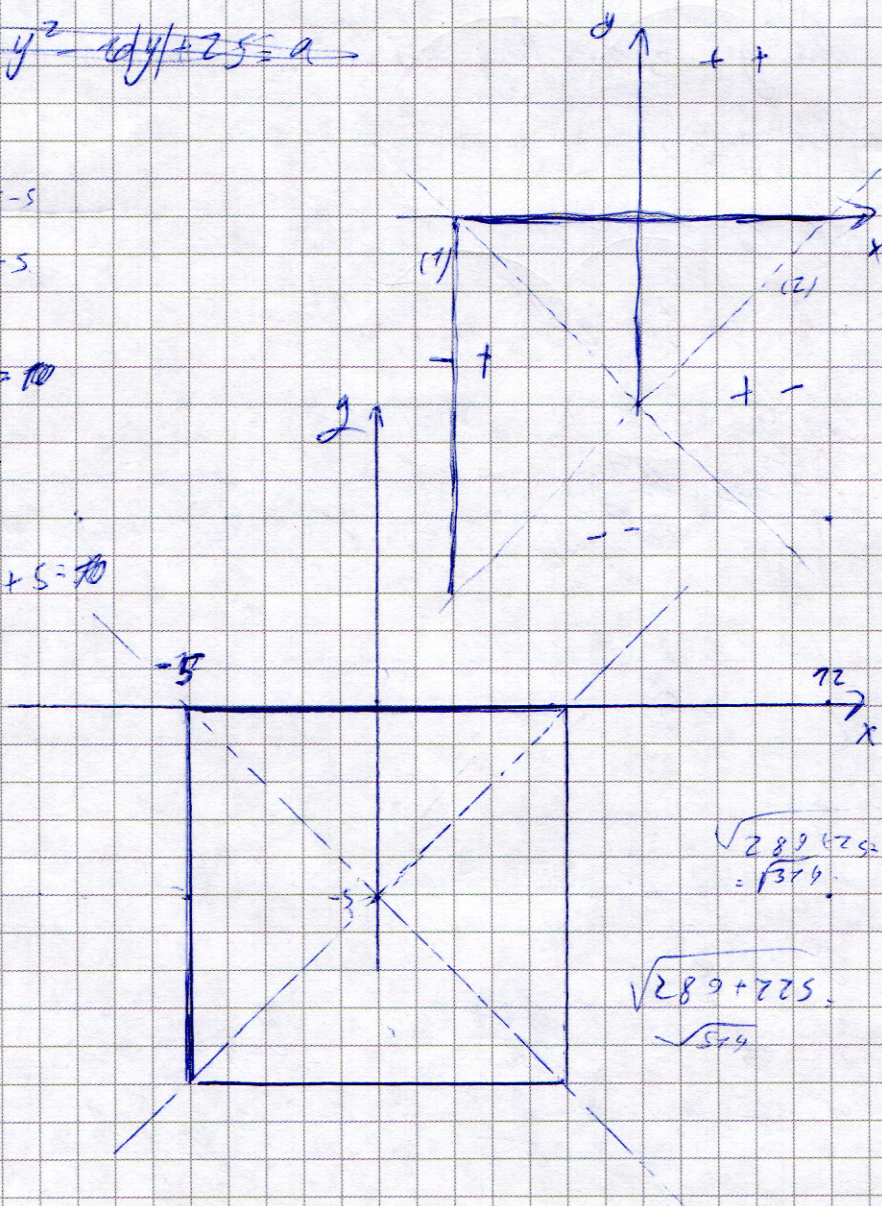
$$+-: x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$2x = 10 \quad x = 5$$

$$--: -x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

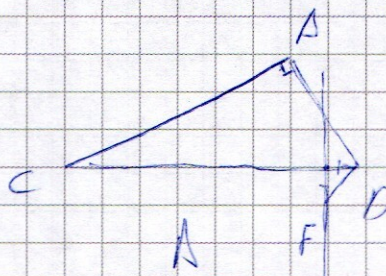
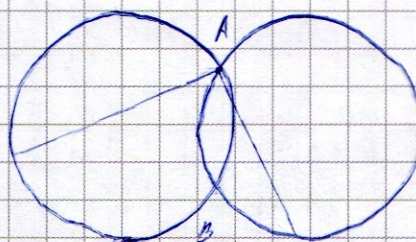
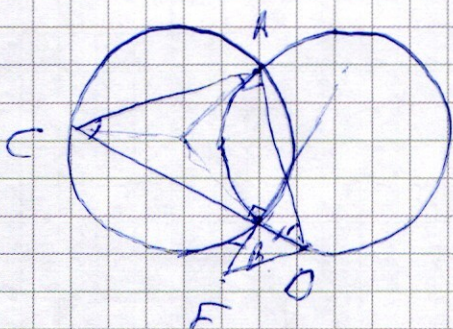
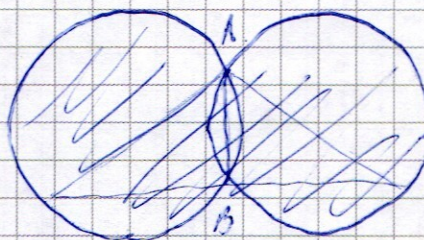
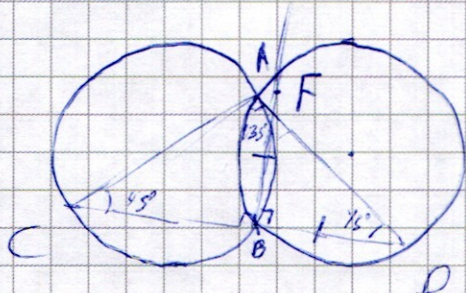
$$-2y = 20$$

$$y = -10$$



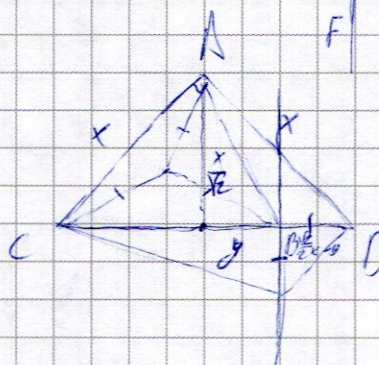


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2 \cdot 9x - 0.5x = 2 \cdot 9x - 0.5x$$

$$9.9x + 0.5x = 2 \cdot 9$$



$$S_{ACD} = \frac{x^2}{2}$$

$$S_{ACB} = \frac{AH \cdot CB}{2}$$

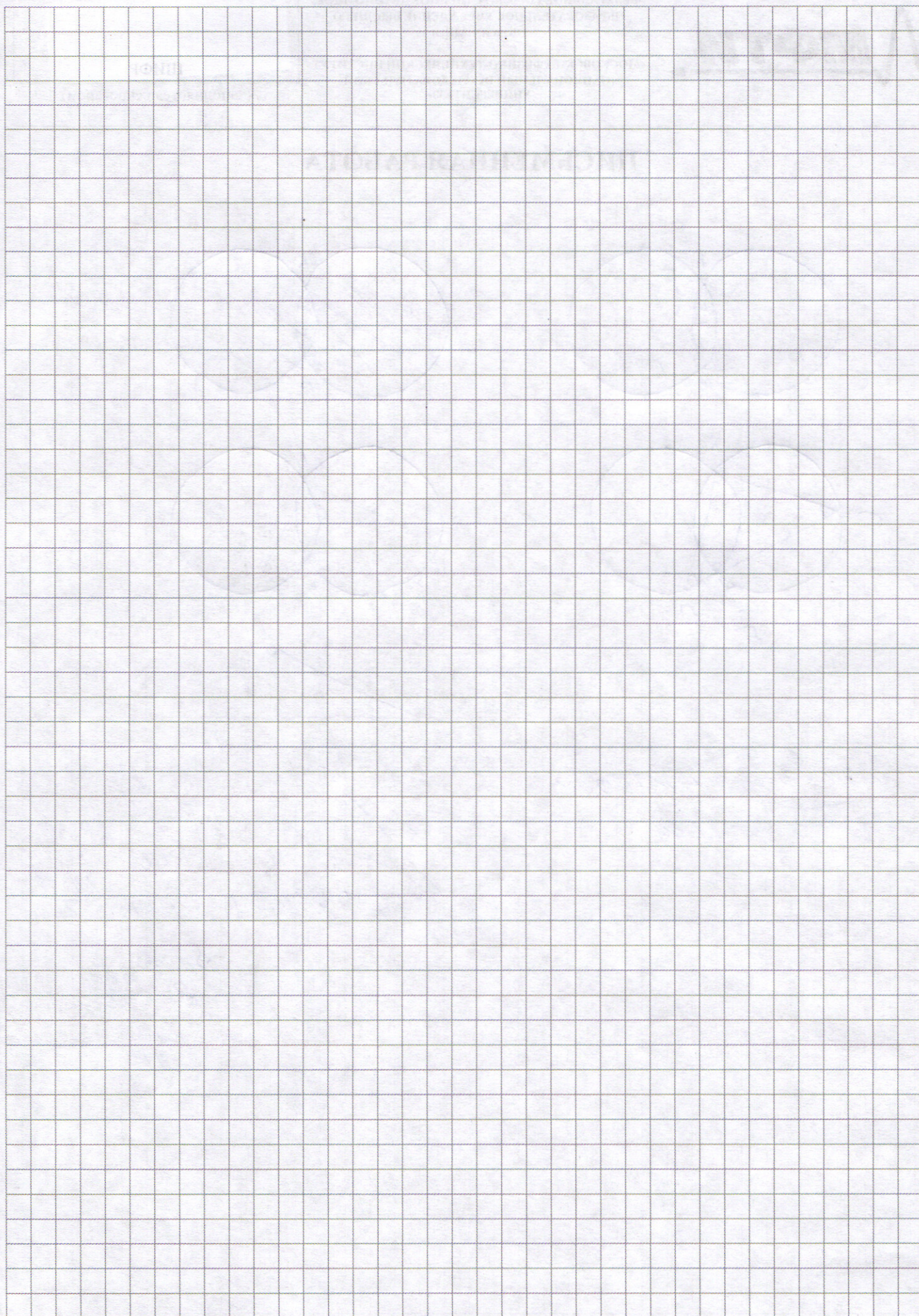
$$S_{ADB} = \frac{AH \cdot BD}{2}$$

$$S_{ADB} = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

5





☒ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)