

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$. 

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

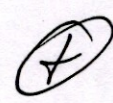
$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$



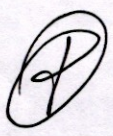
4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16. 

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$



имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . 

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

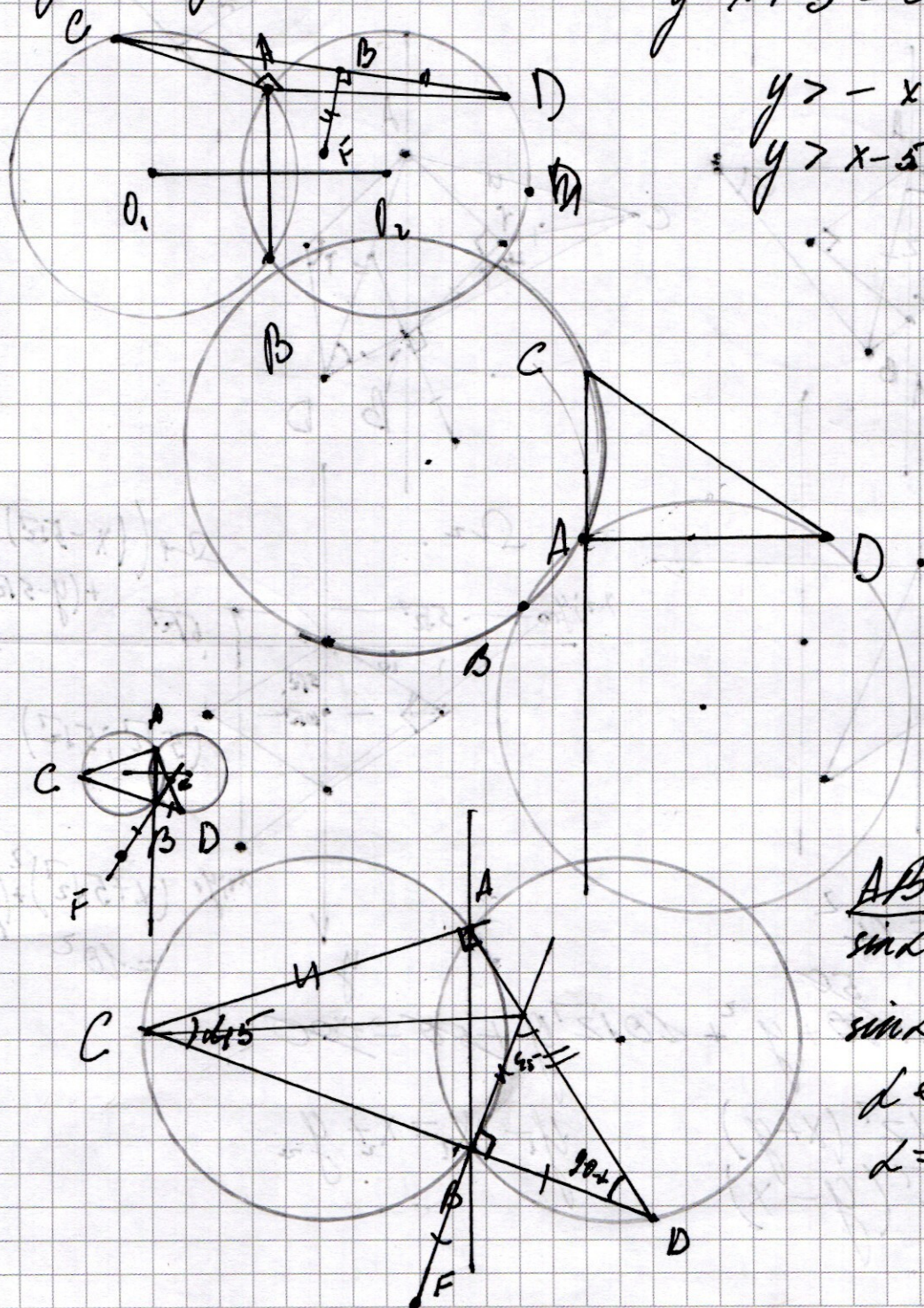
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$\begin{aligned} x+y+5 &> 0 \\ y-x+5 &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &> -x-5 \\ y &> x-5 \end{aligned}$$

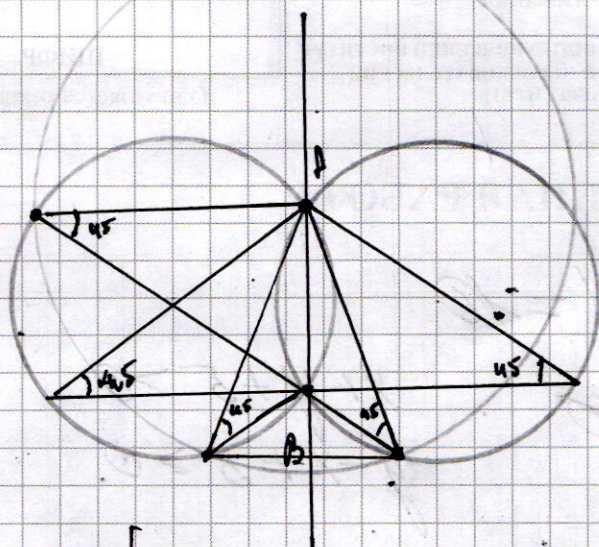


$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\alpha \in (0; \pi/2)$$

$$\alpha = 45$$



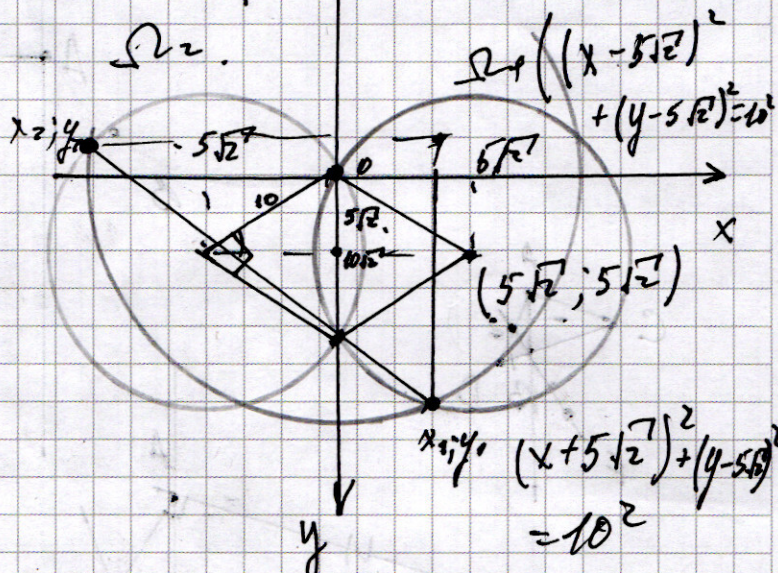
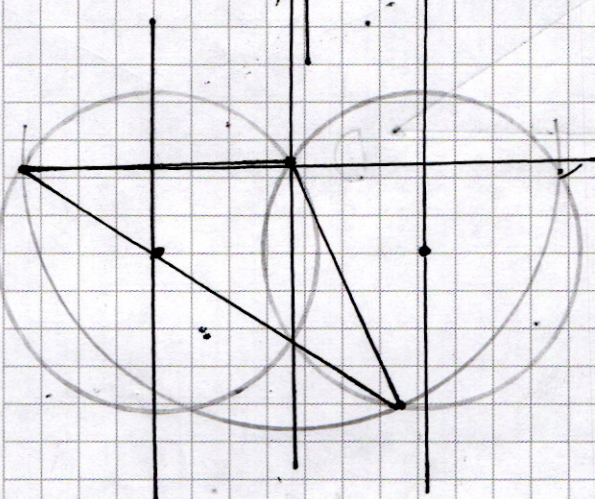
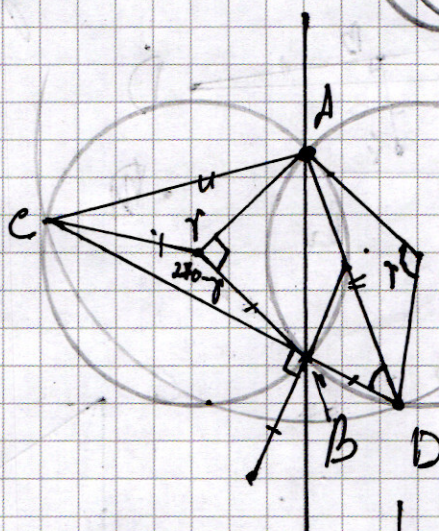
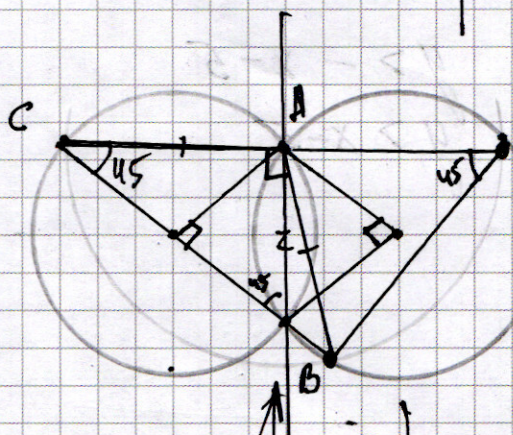
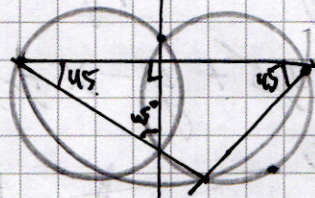
11:40

1.

2.

1.

15:40



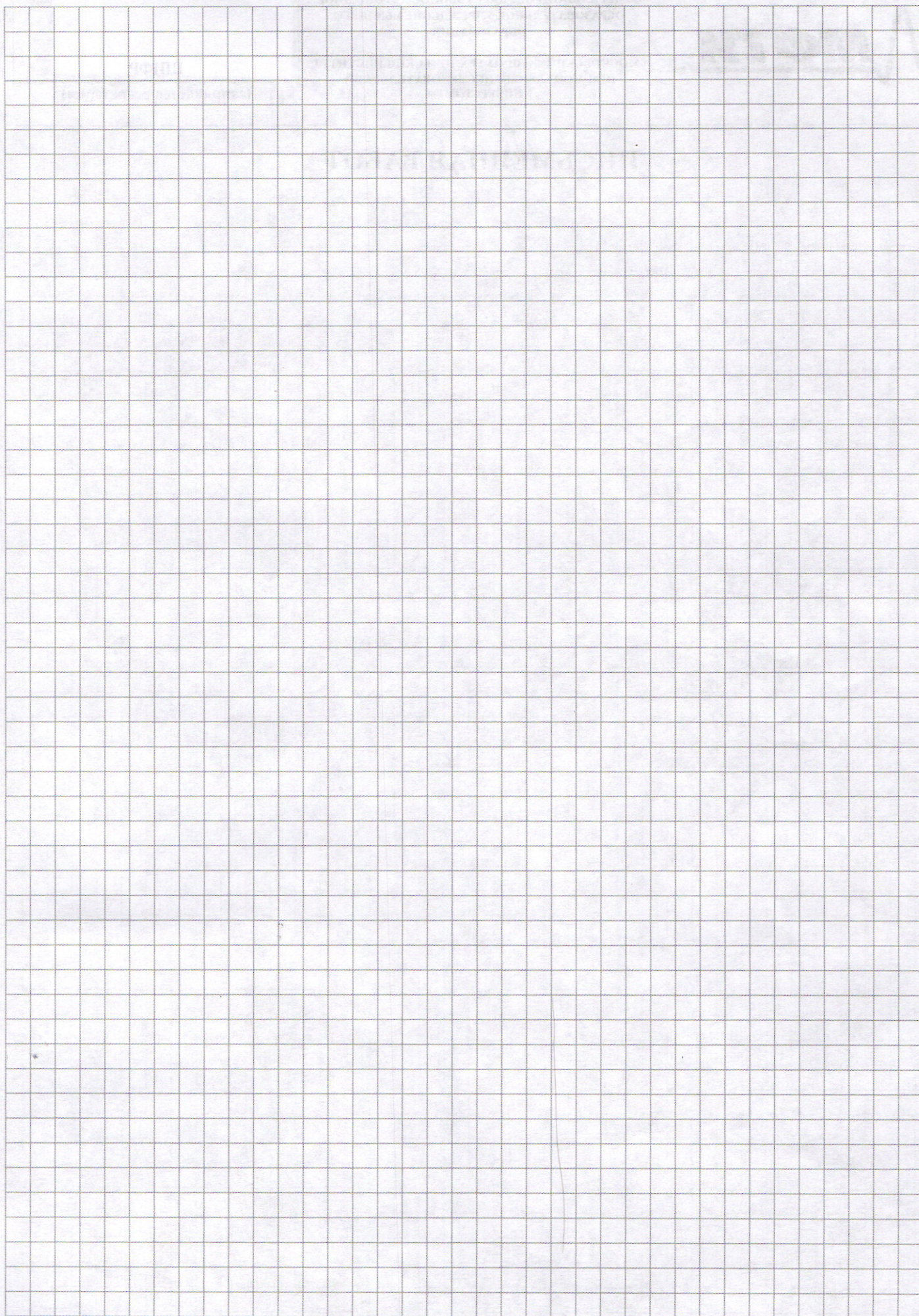
$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 - 10\sqrt{2}x + 50 + y^2 + 10\sqrt{2}y + 50 = 100$$

$$a^2 = 10\sqrt{2}(x+y)$$

$$a^2 = 10\sqrt{2}(y-x)$$

$$y_1 - x_1 = x_2 + y_2$$

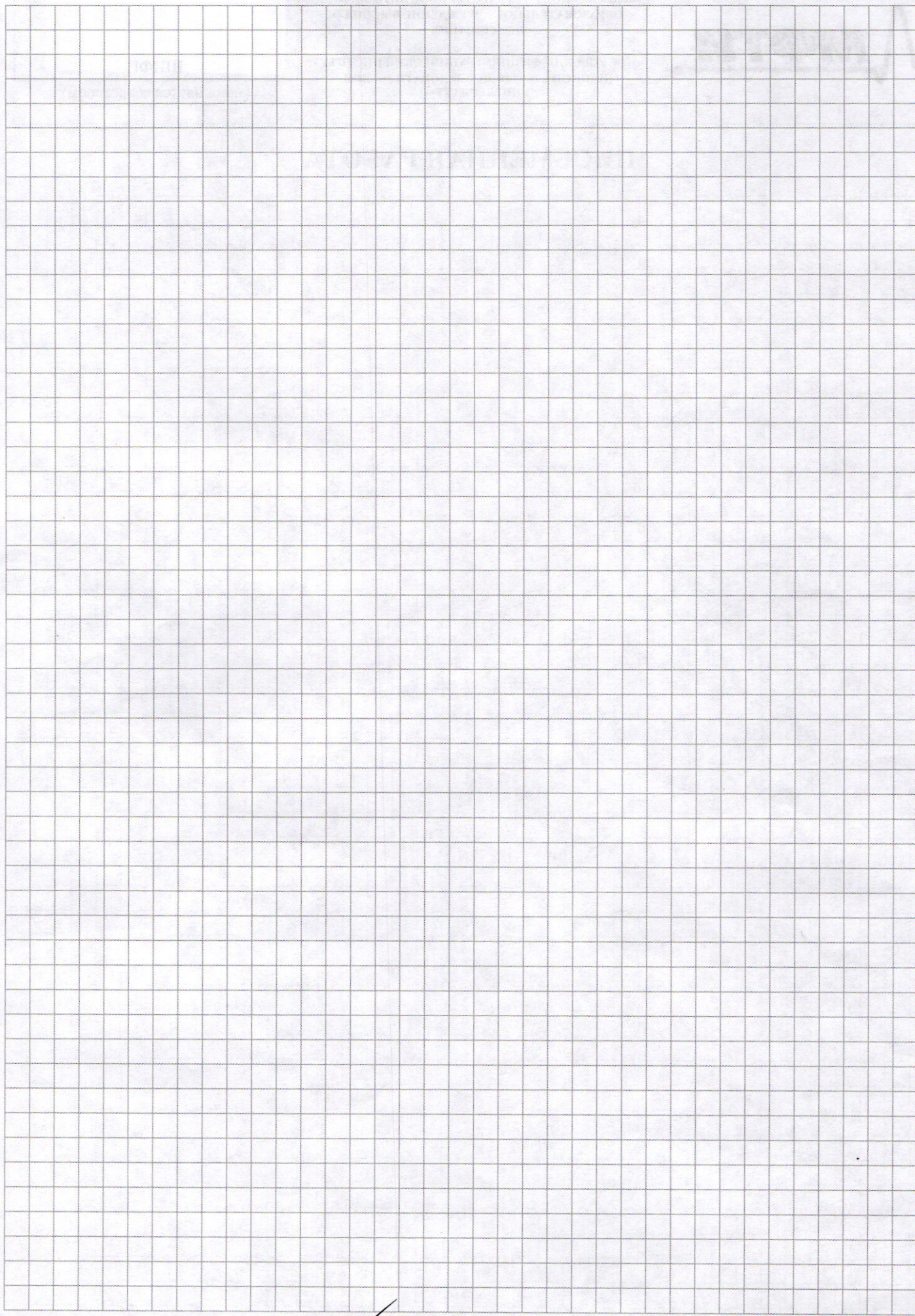


☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

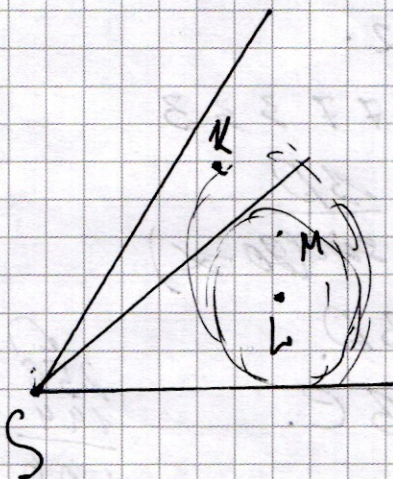
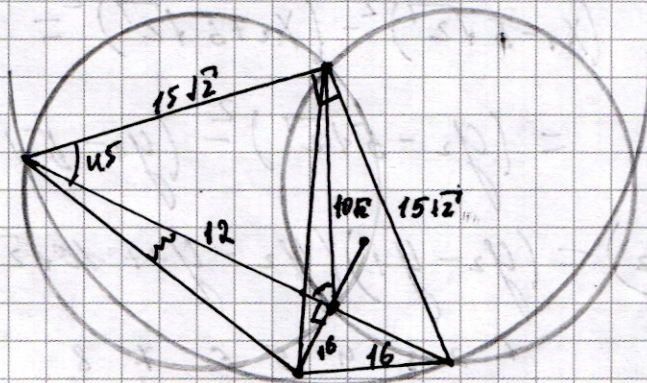
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 2 \\ \hline 98 \\ 180 \\ - 16 \\ \hline 164 \\ 46 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline 36 \\ 12 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \\ 12 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \\ 12 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 7 \\ \hline 84 \\ 12 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \\ 12 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 9 \\ \hline 108 \\ 12 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 10 \\ \hline 120 \\ 12 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 11 \\ \hline 132 \\ 12 \\ \hline 132 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 144 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline 156 \\ 12 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 14 \\ \hline 168 \\ 12 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 15 \\ \hline 180 \\ 12 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 16 \\ \hline 192 \\ 12 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 17 \\ \hline 204 \\ 12 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 18 \\ \hline 216 \\ 12 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 19 \\ \hline 228 \\ 12 \\ \hline 228 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 20 \\ \hline 240 \\ 12 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 21 \\ \hline 252 \\ 12 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 22 \\ \hline 264 \\ 12 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 23 \\ \hline 276 \\ 12 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 24 \\ \hline 288 \\ 12 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 25 \\ \hline 300 \\ 12 \\ \hline 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 26 \\ \hline 312 \\ 12 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 27 \\ \hline 324 \\ 12 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 28 \\ \hline 336 \\ 12 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 29 \\ \hline 348 \\ 12 \\ \hline 348 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 30 \\ \hline 360 \\ 12 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 31 \\ \hline 372 \\ 12 \\ \hline 372 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 32 \\ \hline 384 \\ 12 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 33 \\ \hline 396 \\ 12 \\ \hline 396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 34 \\ \hline 408 \\ 12 \\ \hline 408 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 35 \\ \hline 420 \\ 12 \\ \hline 420 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 36 \\ \hline 432 \\ 12 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 37 \\ \hline 444 \\ 12 \\ \hline 444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 38 \\ \hline 456 \\ 12 \\ \hline 456 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 39 \\ \hline 468 \\ 12 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 40 \\ \hline 480 \\ 12 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 41 \\ \hline 492 \\ 12 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 42 \\ \hline 504 \\ 12 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 43 \\ \hline 516 \\ 12 \\ \hline 516 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 44 \\ \hline 528 \\ 12 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 45 \\ \hline 540 \\ 12 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 46 \\ \hline 552 \\ 12 \\ \hline 552 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 47 \\ \hline 564 \\ 12 \\ \hline 564 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 48 \\ \hline 576 \\ 12 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 49 \\ \hline 588 \\ 12 \\ \hline 588 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 50 \\ \hline 600 \\ 12 \\ \hline 600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 51 \\ \hline 612 \\ 12 \\ \hline 612 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 52 \\ \hline 624 \\ 12 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 53 \\ \hline 636 \\ 12 \\ \hline 636 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 54 \\ \hline 648 \\ 12 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 55 \\ \hline 660 \\ 12 \\ \hline 660 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 56 \\ \hline 672 \\ 12 \\ \hline 672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 57 \\ \hline 684 \\ 12 \\ \hline 684 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 58 \\ \hline 696 \\ 12 \\ \hline 696 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 59 \\ \hline 708 \\ 12 \\ \hline 708 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 60 \\ \hline 720 \\ 12 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 61 \\ \hline 732 \\ 12 \\ \hline 732 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 62 \\ \hline 744 \\ 12 \\ \hline 744 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 63 \\ \hline 756 \\ 12 \\ \hline 756 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 64 \\ \hline 768 \\ 12 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 65 \\ \hline 780 \\ 12 \\ \hline 780 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 66 \\ \hline 792 \\ 12 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 67 \\ \hline 804 \\ 12 \\ \hline 804 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 68 \\ \hline 816 \\ 12 \\ \hline 816 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 69 \\ \hline 828 \\ 12 \\ \hline 828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 70 \\ \hline 840 \\ 12 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 71 \\ \hline 852 \\ 12 \\ \hline 852 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 72 \\ \hline 864 \\ 12 \\ \hline 864 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 73 \\ \hline 876 \\ 12 \\ \hline 876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 74 \\ \hline 888 \\ 12 \\ \hline 888 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 75 \\ \hline 900 \\ 12 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 76 \\ \hline 912 \\ 12 \\ \hline 912 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 77 \\ \hline 924 \\ 12 \\ \hline 924 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 78 \\ \hline 936 \\ 12 \\ \hline 936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 79 \\ \hline 948 \\ 12 \\ \hline 948 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 80 \\ \hline 960 \\ 12 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 81 \\ \hline 972 \\ 12 \\ \hline 972 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 82 \\ \hline 984 \\ 12 \\ \hline 984 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 83 \\ \hline 996 \\ 12 \\ \hline 996 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 84 \\ \hline 1008 \\ 12 \\ \hline 1008 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 85 \\ \hline 1020 \\ 12 \\ \hline 1020 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 86 \\ \hline 1032 \\ 12 \\ \hline 1032 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 87 \\ \hline 1044 \\ 12 \\ \hline 1044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 88 \\ \hline 1056 \\ 12 \\ \hline 1056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 89 \\ \hline 1068 \\ 12 \\ \hline 1068 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 90 \\ \hline 1080 \\ 12 \\ \hline 1080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 91 \\ \hline 1092 \\ 12 \\ \hline 1092 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 92 \\ \hline 1104 \\ 12 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 93 \\ \hline 1116 \\ 12 \\ \hline 1116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 94 \\ \hline 1128 \\ 12 \\ \hline 1128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 95 \\ \hline 1140 \\ 12 \\ \hline 1140 \end{array}$$

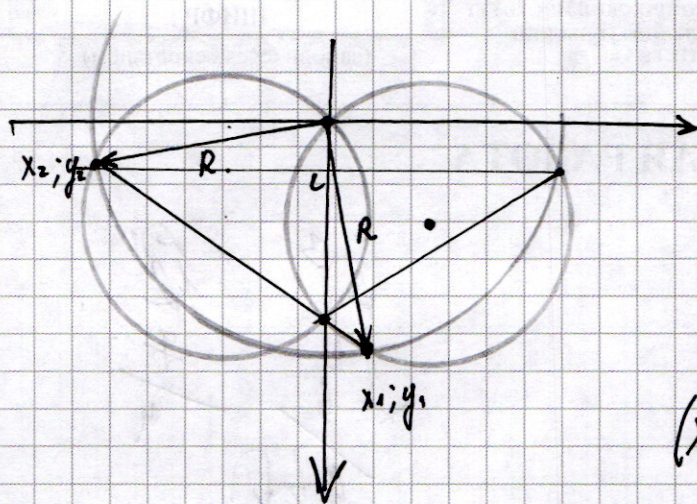
$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 96 \\ \hline 1152 \\ 12 \\ \hline 1152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 97 \\ \hline 1164 \\ 12 \\ \hline 1164 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 98 \\ \hline 1176 \\ 12 \\ \hline 1176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 99 \\ \hline 1188 \\ 12 \\ \hline 1188 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 100 \\ \hline 1200 \\ 12 \\ \hline 1200 \end{array}$$



$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$(x_1 x_2)^2 = (y_1 y_2)^2$$

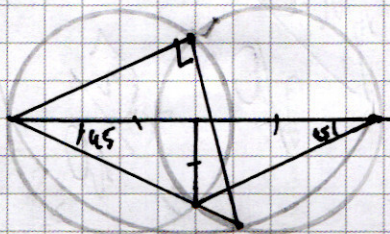
$$(x_1 - 5\sqrt{2})^2 + (y_1 - 5\sqrt{2})^2 = 10^2$$

$$(x_2 + 5\sqrt{2})^2 + (y_2 - 5\sqrt{2})^2 = 10^2$$

$$(x_1 - 5\sqrt{2})^2 - (x_2 + 5\sqrt{2})^2 =$$

$$= (y_2 - 5\sqrt{2})^2 - (y_1 - 5\sqrt{2})^2$$

$$(x_1 - x_2 - 10\sqrt{2})(x_1 + x_2) = (y_2 - y_1)(y_2 - y_1 + 10\sqrt{2})$$



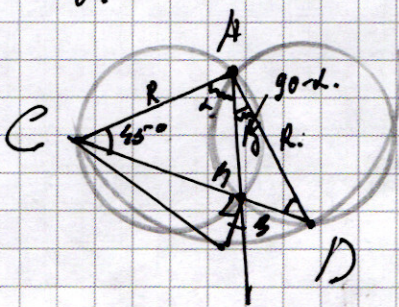
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$3 \cdot 3$$

$$1 \quad 1 \quad 2$$

$$1 \quad 1 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 3 \quad 3 \quad 3$$

8!



$$\sqrt{2} AB = 2R = \frac{BD}{\sin(90 - \alpha)}$$

$$2R \cos \alpha = BD$$

$$2R \sin \alpha = BC$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 194 \\ \hline 400 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{-2 \ln(x)} y^{-4 \ln(x)} = y^{\ln(y)} \cdot y^{-7 \ln(x)}$$

$$\frac{x^{-2 \ln(x)}}{y^{4 \ln(x)}} = \frac{y^{\ln(y)}}{y^{7 \ln(x)}}$$

$$\log_3 9 = 2 \cdot 1$$

$$\log_3 \frac{1}{3}$$

$$x^{-2 \ln(x)} \cdot y^{3 \ln(x)} = y^{\ln(y)}$$

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = y^{\ln(y)}$$

$$y = 2x$$

$$\log_{2,81} 2$$

$$\left(\frac{8x^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = 2x^{\ln(2x)}$$

$$(8x)^{\ln(x)} = 2^{\ln(2x)} \cdot x^{\ln(2x)}$$

$$2^{3 \ln(x)} \cdot x^{\ln(x)} = 2^{\ln(2)} \cdot 2^{\ln(x)} \cdot x^{\ln(x)} \cdot x^{\ln(2)}$$

$$\cancel{x^{\ln(x)}} \cdot \cancel{2^{3 \ln(x)}}$$

$$2^{2 \ln(x)} \cdot \cancel{x^{\ln(x)}} = \cancel{2^{\ln(x)}} \cdot \cancel{x^{\ln(x)}} \cdot (2x)^{\ln(2)}$$

$$2^{2 \ln(x)} = 2^{\ln(2)} \cdot x^{\ln(2)}$$

$$4^{\ln(x)} = (2x)^{\ln(2)} \quad f'$$

$$4^{\ln(x)} = (2x)^{\ln(2)}$$

$$a^x = a^x \ln(a)$$

$$y' = \frac{4^{\ln(x)} \ln(4)}{(2x)^3} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\ln(x) \cdot \ln(2)^2 = \ln(2) \cdot \ln(2x)$$

$$\ln(x) \cdot \ln(y^3 \cdot x^{-2}) = \ln(2) \cdot (\ln(2) + \ln(x))$$

$$\ln(x) [3\ln(y) - 2\ln(x)] = \ln^2(2) + \ln(2) \cdot \ln(x)$$

$$3\ln(y)\ln(x) - 2\ln^2(x) = \ln^2(2) + \ln(2) \cdot \ln(x)$$

$$3\ln(4-x)\ln(x)$$

$$\ln(x) (3\ln(y) - 2\ln(x) - \ln(2)) =$$

$$y = 4 - x; \quad x = 4 - y. \quad \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = y^{\ln(y)}$$

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = \ln^2(4-x) = \ln(x) \cdot (3\ln(4-x) - 2\ln(x))$$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(4-x)} = \frac{1}{2}; \quad x^2 = 4 - x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$\frac{\ln(4-x)}{\ln(x)} = 2$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{2} = 2$$

$$t = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$4 - x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17;$$

$$y = 4 - x = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{8 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 9 \\ \underline{26} \\ 24 \\ \underline{21} \\ 3 \\ \underline{30} \\ 87 \\ \underline{84} \\ 3 \\ \underline{30} \\ 29 \\ \underline{27} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \underline{43} \\ 6 \end{array}$$

$$7^3 \cdot 3^3$$

a b c d e f

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$3 \cdot 3$$

a b c d e f

$$\frac{(x) m \pm h}{(h) m} = \frac{(x) m \pm h}{(h) m} \cdot \frac{(x) m \pm h}{(x) m \pm h}$$

$\sqrt{2}$.

$$\cos 9x - \cos 5x$$

$$(x) m \pm h - h m \pm h = (x) m \pm h \cdot \frac{(x) m \pm h}{(x) m \pm h}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 2x \sin 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

~~1/2~~

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \frac{7x - 2x - \pi/4}{2} \cos \frac{7x + 2x + \pi/4}{2} = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos 5x - \cos 9x)$$

$$0 = (4 - x + h)(x - h)$$

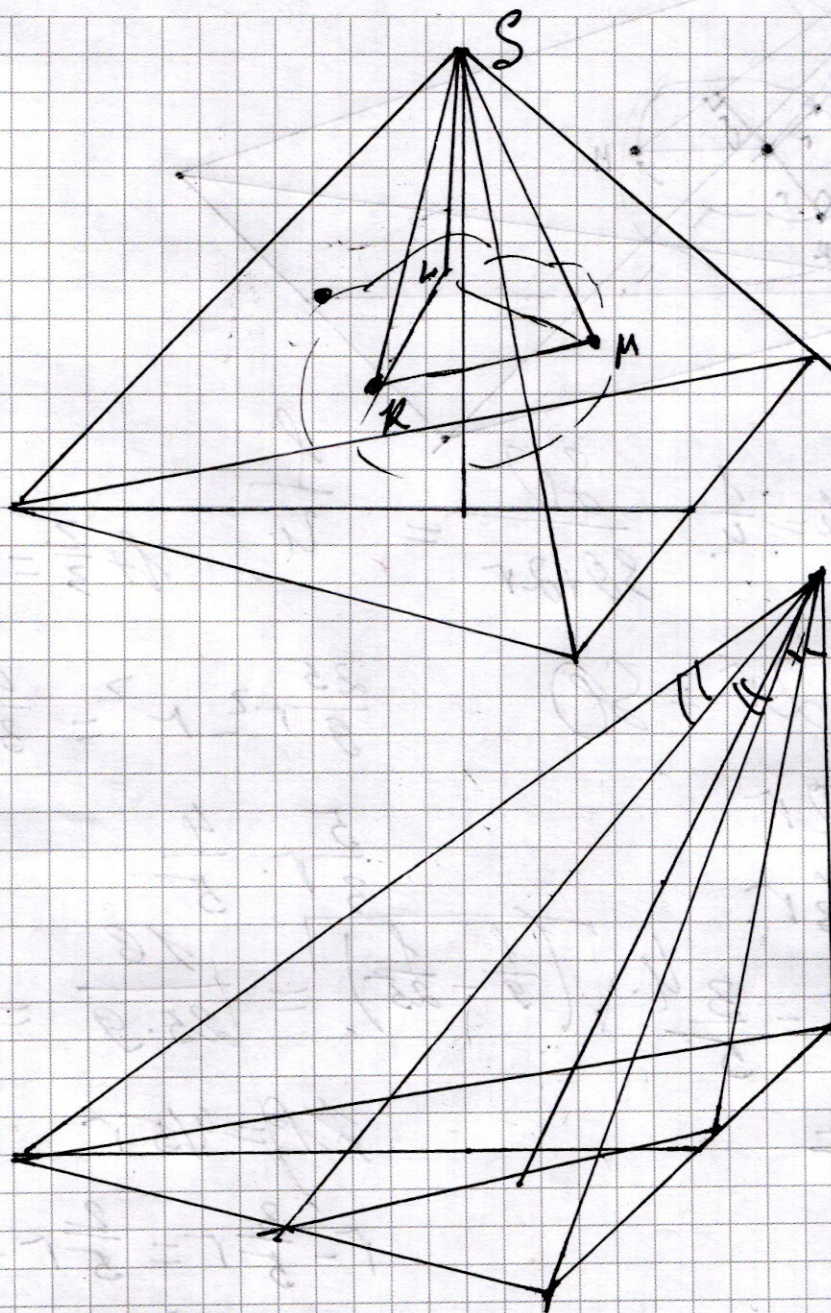
$$0 = (4 - x - x + h)(x - h)$$

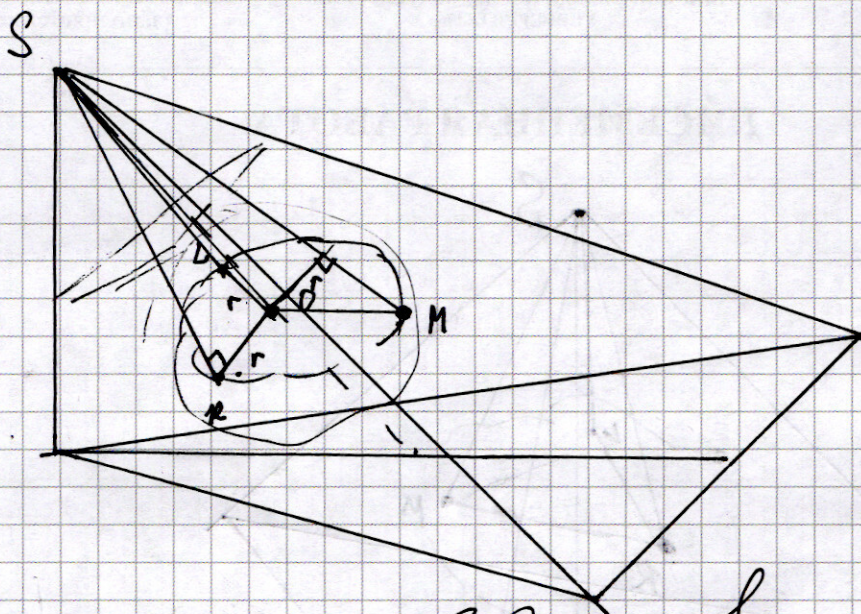
$$0 = (h - x)h + (h - x)x + (x + h)(x - h)$$

$$0 = h^2 - xh + hx - x^2 + x^2 - hx + hx - h^2$$

$$0 = h^2 - xh + hx - h^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$k = \frac{1}{4} \cdot \frac{SO}{SO + 2r} = \frac{1}{4}, \quad 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}r$$

$$4SO = 2r + SO$$

$$\frac{25}{9}r^2 - r^2 = \frac{4}{3}r$$

$$3SO = 2r$$

$$SO = \frac{2}{3}r$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \cdot 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right)} = \frac{16}{25 \cdot 9} = \frac{4}{15}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$KP = \frac{4}{5}r$$

$$SP = \frac{16}{15}r$$

$$r - \frac{3}{5}r = \frac{2}{5}r +$$

$$\frac{SP}{SO} = \frac{\frac{16}{15}r}{\frac{2}{3}r} = \frac{\frac{16}{15}r}{\frac{2}{3}r} = \frac{16}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = 2 \frac{5+3}{15}$$

$$k^2 = \frac{64}{25} = \frac{S_{\text{сум}}}{4}$$

$$\frac{16}{15}r$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{array}{r}
 9261 \mid 3 \\
 9 \quad \quad \quad \mid 3087 \mid 3 \\
 26 \quad 3 \quad \quad \mid 1029 \mid 3 \\
 24 \quad \quad \quad 8 \quad \quad \mid 343 = 7^3 \\
 21 \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 12 \\
 21 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 9 \\
 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 9 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

абсцдегн, всего 8 $\Rightarrow$ возможные
наборы:

3 3 3 7 7 7 1 1

3 9 7 7 7 1 1 1

Без учёта повторов: $(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 2$
Но ещё нужно убрать повто-
ряющиеся: $(3 \cdot 2 + 3 \cdot 2) \cdot 2$

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x \quad \text{по формуле}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x \quad \text{по формуле}$$

$$- \underline{2 \sin 7x \sin 2x} - \sqrt{2} \cos 4x + \underline{2 \sin 7x \cos 2x} = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(2 \cdot 2x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \end{cases}$$

$$2 \sin 7x - 2 \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x}_{\sin(\pi/4)} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x}_{\cos(\pi/4)} \right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \pi/4) = 0$$

$$2 \sin \frac{7x - 2x - \pi/4}{2} \cdot \cos \frac{7x + 2x + \pi/4}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}) \cdot \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$1. \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = \cos 2x; \cos 2x = 0 - \text{не реш} \Rightarrow$$

$$\tan(2x) = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}}$$

$$2. \sin(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0; \quad \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n; \\ 5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3. \cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi l$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

№3

$$\begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \\ (x^2 y^4)^{-\ln(x)} = y^{\ln(y/x^2)} \end{cases}$$

$$1) y^2 - xy - 4x^2 + 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y^2 - 4x^2) + 2x^2 - xy + 8x - 4y = 0$$

$$(y - 2x)(y + 2x) + x(2x - y) + 4(2x - y) = 0$$

$$(y - 2x)(y + 2x - x - 4) = 0; \begin{cases} y = 2x \\ y + x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln(x)} = y^{\ln(y/x^2)}$$

$$\ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = \ln(y) - \ln(x^2) = \ln(y) - 2 \ln(x)$$

$$x^{-2 \ln(x)} y^{-4 \ln(x)} = y^{\ln(y)} \cdot y^{-2 \ln(x)} / \cdot y^{2 \ln(x)}$$

$$x^{-2 \ln(x)} y^{3 \ln(x)} = y^{\ln(y)}$$

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = y^{\ln(y)}$$

$$1) y = 2x$$

$$\left(\frac{8x^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = (2x)^{\ln(2x)}$$

$$(8x)^{\ln(x)} = 2^{\ln(2) + \ln(x)} \cdot x^{\ln(2) + \ln(x)}$$

$$8^{\ln(x)} \cdot \underline{x^{\ln(x)}} = 2^{\ln(2)} \cdot 2^{\ln(x)} \cdot x^{\ln(2)} \cdot \underline{x^{\ln(x)}}$$

$$x^{\ln(x)} (8^{\ln(x)} - 2^{\ln(x)} \cdot (2x)^{\ln(2)}) = 0$$

пусть $y = x^{\ln(x)}$; $x > 0$; но никакое
число $\neq 0$ в любой степени не даёт

$$0 \Rightarrow x^{\ln(x)} \neq 0 \Rightarrow$$

$$2^{3 \ln(x)} = 2^{\ln(x)} \cdot (2x)^{\ln(2)} / \cdot 2^{-\ln(x)}$$

$$4^{\ln(x)} = (2x)^{\ln(2)}$$

$$\text{пусть } f(x) = 4^{\ln(x)}; f'(x) = 4^{\ln(x)} \ln(4) \cdot \frac{1}{x}$$

$x > 0$, тогда $f(x)$ - возрастает на всём ~~на всём~~
 $x > 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$g(x) = (2x)^{\ln(2)}$$~~

~~$$g'(x) = (\ln(2)) \cdot (2x)^{\ln(2)-1} \cdot 2$$~~

~~$e > 2 \Rightarrow \ln(2) - 1 < 0$, но тогда~~

$$4^{\ln(x)} = (2x)^{\ln(2)}, \quad x > 0 \Rightarrow \text{обе части } > 0$$

$$\ln(4^{\ln(x)}) = \ln(2x^{\ln(2)})$$

$$\ln(x) \cdot 2\ln(2) = \ln(2) \cdot \ln(2x)$$

$$2\ln(x) = \ln(2) + \ln(x)$$

$$\ln(x) = \ln(2)$$

$$\boxed{x=2; y=2x; y=4}$$

$$2) \quad y+x-4=0$$

$$y=4-x$$

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = (2x)^{\ln(2)}$$

$$(4-x)^3 = 64 + 12x^2 - 48x - x^3$$

$$\left(\frac{64 + 12x^2 - 48x - x^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = \cancel{(2x)^{\ln(2)}} (4-x)^{\ln(4-x)}$$

так не упрощается!

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln(x)} = (2x)^{\ln(2)}; \quad x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$y = 4 - x > 0$$

$$x < 4; \quad x \in (0; 4)$$

$$\ln\left(\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln(x)}\right) = \ln\left(\frac{(2x)^{\ln(2)}}{y^{\ln y}}\right)$$

$$\ln(x) \cdot (3 \ln(y) - 2 \ln(x)) = \ln(2) \cdot (\ln(2) + \ln(x))$$

$$3 \ln(y) \cdot \ln(x) - 2 \ln^2(x) = \ln^2(2) + \ln(2) \cdot \ln(x)$$

$$= \ln^2(4-x)$$

$$\ln(x) (3 \ln(4-x) - 2 \ln(x)) = \ln(4-x) \cdot \ln(4-x)$$

пусть $\ln(x) = a$, $\ln(4-x) = b$

$$a(3b - 2a) = b^2$$

$$-2a^2 + 3ab = b^2$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = t^2;$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$t = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$t = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(4-x)} = \frac{1}{2}$$

$$2 \ln(x) = \ln(4-x)$$

$$\ln(x^2) = \ln(4-x);$$

$$x^2 = 4-x;$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17.$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\rightarrow \emptyset \quad x \in (0; 4)$$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(4-x)} = 1$$

$$\ln(x) = \ln(4-x)$$

$$x = 4-x$$

$$2x = 4; \quad x = 2; \quad y = 2$$

$$y = 4 - 2 = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}; y = 4-x = \frac{8-\sqrt{17}+1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

Итого: $x=2; y=4$

$x=2; y=2$

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}; y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(2; 4); (2; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 2 \end{cases}$$

1) построим $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

в I: $y > -x+5$

$y > x-5$

$y=0$

~~$x+y+5 + y-x+5 = 10$~~

в II: к.м. $x=1; y=-5$:

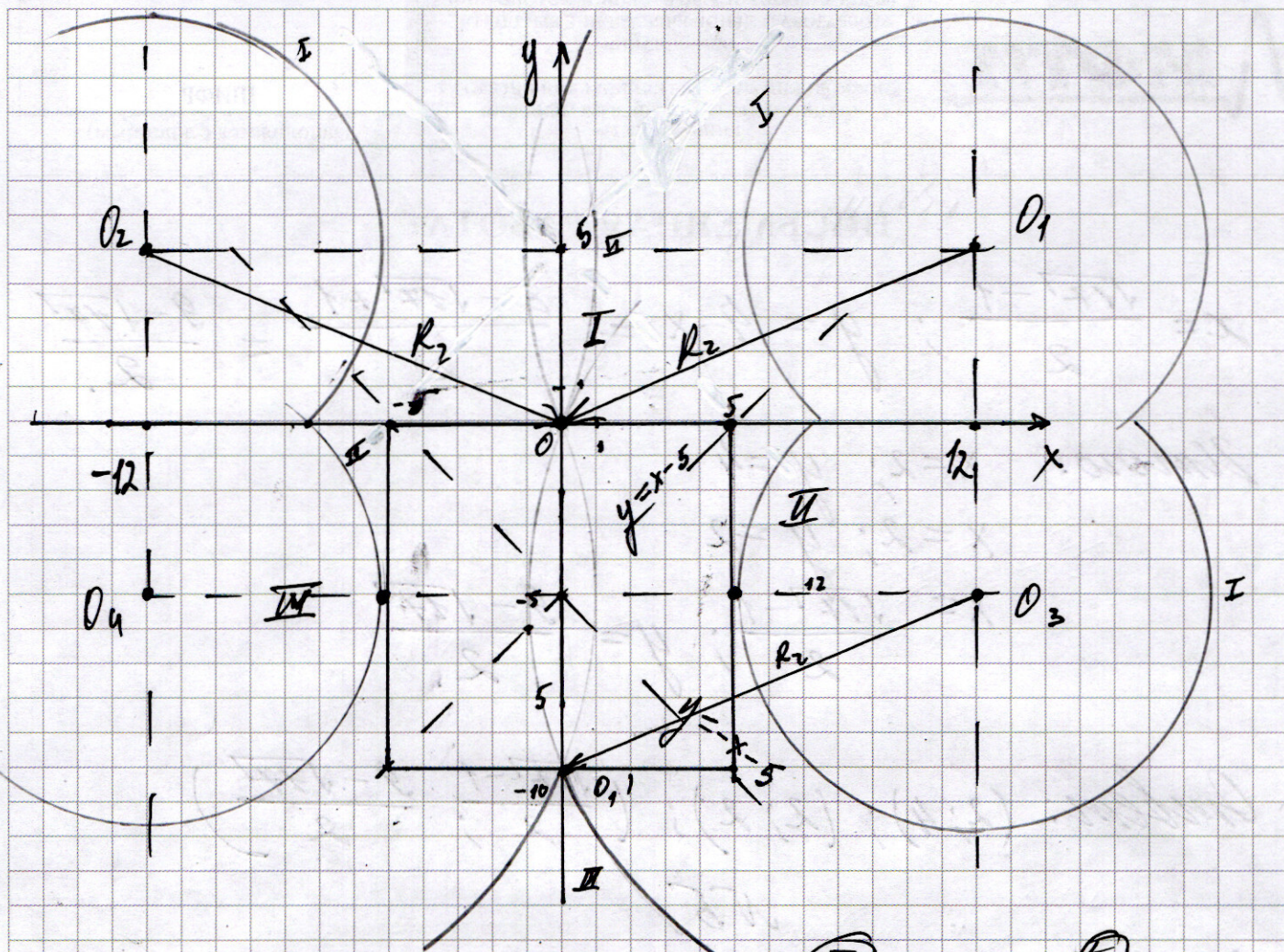
$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

~~$x+y+5 - y+x-5 = 10$~~

~~$x=5$~~

в III: к.м. $x=0; y=-6$: $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

~~$-x-y-5 - y+x-5 = 10; -2y=20; y=-10$~~



в IV: к.м. $x = -1$; $y = -5$: $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$
 $-x-y+5 + y-x+5 = 10$
 $-2x = 10$; $x = -5$.

2) $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ — семейство кусков окружностей. Найдём их центры:

$x > 0$ $O_1(12; 5)$ $R = \sqrt{a}$
 $y > 0$

$x < 0$ $O_2(-12; 5)$
 $y > 0$

$x > 0$ $O_3(12; -5)$
 $y < 0$

$x < 0$ $O_4(-12; -5)$
 $y < 0$

3) Первый сегмент очевиден: $R = \sqrt{a} < 12-5 = 7$; $a = 49$

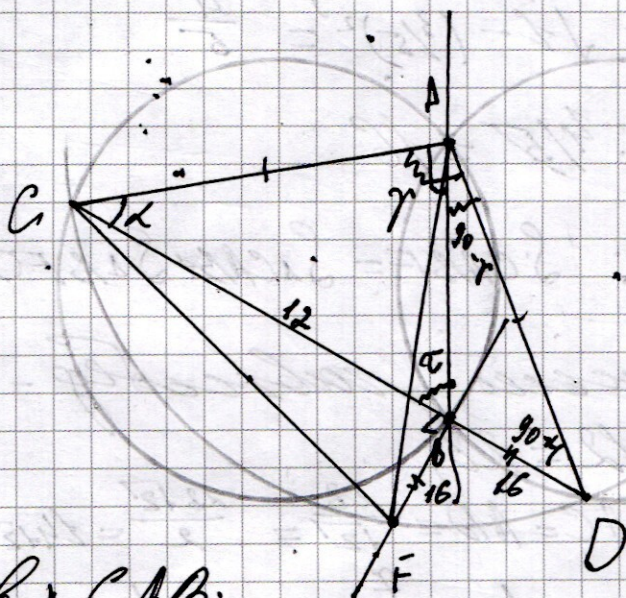
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Рассмотрите случай, касание в т. O и O_1 по Γ Паскаля:

$$R^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 = 169 = a; \quad \boxed{a = 169}$$

Ответ: $a \in \{49; 169\};$

№ 6



1) пусть $\angle ACD = \alpha$;
тогда в $\triangle ACD$ -
прямоугольный
 $\angle D = 90 - \alpha$;
по следствию
из Γ синусов
в $\triangle ABD$:

$$\frac{AB}{\sin(90 - \alpha)} = 2R.$$

в $\triangle CAB$:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\cos \alpha}; \quad \sin \alpha = \cos \alpha;$$

$$\alpha \in (0; \pi/2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha = \pi/4$; $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD$ - прямо-
угольный равнобедренный.

2) в $\triangle CAB$: $\frac{CB}{\sin \gamma} = 2R$; $CB = 2R \sin \gamma$

в $\triangle BAD$: $BD / \sin(90 - \gamma) = 2R$; $BD = 2R \sin(90 - \gamma) = 2R \cos \gamma$

3) $BF \perp CD$ по условию, $BF = BD = 2R \cos \gamma$
 в $\triangle CBF$, по Пифагора:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + CD^2 = 4R^2 \sin^2 \gamma + 4R^2 \cos^2 \gamma = 4R^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = 4R^2$$

$$CF^2 = 4R^2; \quad CF = 2R = 20$$

$$\boxed{CF = 20}$$

4) $BC = 12$; $BC = 2R \sin \gamma$
 $12 = 20 \cdot \sin \gamma$; $\sin \gamma = \frac{12}{20} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{5}$
 $\cos \gamma = \sqrt{1 - (3/5)^2} = \frac{4}{5}$

$$BD = 2R \cdot \cos \gamma = 2 \cdot 10 \cdot 4/5 = 16$$

5) $S_{ACF} = S_{CBF} - S_{ABF}$; $S_{CBF} = S_{ACB} + S_{BFC}$

$\triangle ACD$ - прямоугольный, равнобе-
 ренный $\Rightarrow CD = 16 + 12 = 28$;

$$AC^2 + AD^2 = (28)^2; \quad AC = AD = \frac{28}{\sqrt{2}} = \frac{28\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$$

$$S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 84$$

$$S_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$$

$$S_{CBF} = 84 + 96 = 180.$$

6) из $\triangle CBA$: $\frac{AC}{\sin \varepsilon} = 2R$; $14\sqrt{2} = 2 \cdot 10 \cdot \sin \varepsilon$
 $\sin \varepsilon = \frac{7\sqrt{2}}{10}$
 $\cos \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{49 \cdot 2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle ABF = 90^\circ + \varepsilon$$

$$\sin \angle ABF = \sin 90^\circ \cos \varepsilon + \cos 90^\circ \cdot \sin \varepsilon$$

$$\sin \angle ABF = \cos \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BF \cdot \cos \varepsilon; \quad AB = 10\sqrt{2},$$

$$\text{т.к. } 2R \sin(45^\circ) = AB.$$

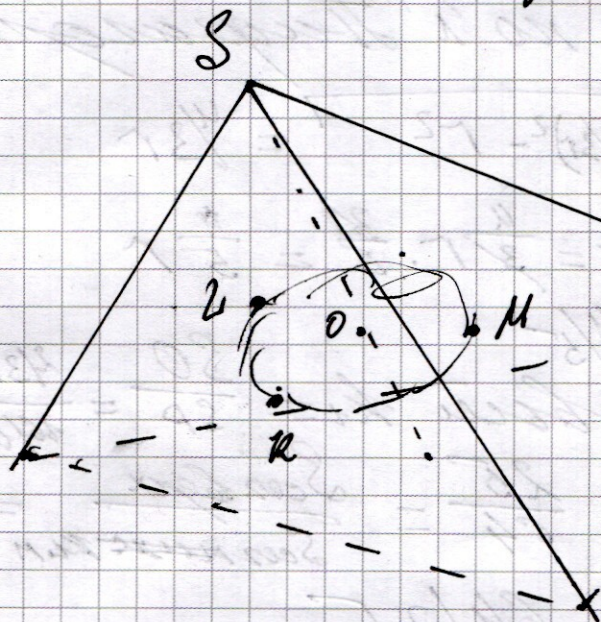
$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = 16$$

$$S_{ACF} = 180 - 16 = 164.$$

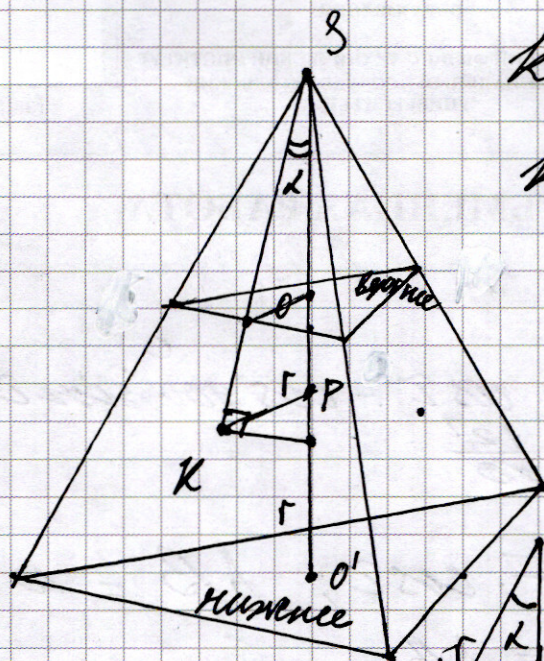
Ответ: а) $CF = 20$

$$б) S_{ACF} = 164.$$

✓4



1) пусть, т.к. известно, что оба сегмента 180° и кас. окружн., то мы как бы имеем 2 подобных окружности



$$k^2 = \frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{1}{16}$$

$$k = \frac{1}{4}; \Rightarrow$$

$$\frac{SO}{SO'} = k \cdot \frac{1}{4};$$

$$4SO = SO';$$

$$\text{но } SO' = SO + 2r$$

$$4SO = SO + 2r \Rightarrow$$

$$3SO = 2r;$$

$$SO = \frac{2}{3}r$$

тогда

$$\sin \alpha = \frac{OK}{OS} = \frac{r}{r + \frac{2}{3}r} = \frac{r}{\frac{5}{3}r} = \frac{3}{5};$$

$$\angle \alpha = \angle KSO = \arcsin(3/5).$$

2) в $\triangle KSP$; $SP \perp KP$, но $\square$ треугольника
в $\triangle KSO$:

$$KS = \sqrt{(\frac{5}{3}r)^2 - r^2} = \frac{4}{3}r$$

$$\text{в } \triangle KSP: KP = KS \cdot \sin \alpha = \frac{4}{3}r \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}r$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$$

$$SP = \frac{4}{3}r \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}r, \text{ но вый } k_1 = \frac{SO}{SP} = \frac{\frac{2}{3}r}{\frac{16}{15}r} =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8} \Rightarrow k^2 = \frac{25}{64} = \frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{1}{16}$$

$$25 S_{\text{бок}} = 64; S_{\text{бок}} = 64/25$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{бок}} = 64/25; \angle \alpha = \arcsin(3/5)$$