

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
ANN ARBOR, MICHIGAN 48106-1000

1-1-1980

MR. J. H. HARRIS

ANN ARBOR, MICHIGAN

Dear Mr. Harris:

I have received your letter of the 11th of January, 1980, regarding the matter of the University of Michigan Library's collection of the papers of the late Dr. J. H. Harris.

I am sorry that I cannot give you a more definitive answer at this time, but I am sure that you will understand the need for further consultation with the appropriate authorities.

I have discussed this matter with the appropriate authorities and we are working to resolve the outstanding issues as quickly as possible.

I am sure that you will be satisfied with the outcome of our efforts.

Very truly yours,

John H. Harris

Enclosed for you are two copies of the letterhead memorandum which I have prepared for your information.

I am sure that you will find this information helpful.

I am sure that you will be satisfied with the outcome of our efforts.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Найду все простые делители числа 64827:

$$64827 \div 3$$

$$21609 \div 3$$

$$7203 \div 3$$

$$2401 \div 7$$

$$343 \div 7$$

$$49 \div 7$$

$$7$$

следовательно $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Все цифры необходимых
восьмизначных чисел равны

либо их произведению (с разными степенями)

либо 1.

Каждая цифра не может быть ничем кроме

1, 3, 7 и 9, поскольку остальные произведения

3 и 7 разных степеней не цифры (они > 9).

$$(3 \cdot 7 = 21 > 9; 7 \cdot 7 = 49 > 9, 3^2 \cdot 7 = 63 > 9 \dots)$$

$$3 \cdot 3 = 9 \leq 9$$

подходит

Следовательно есть два варианта:

I восьмизначное число "собрать" из цифр:

$$7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1$$

т.к. порядок не важен

$$\frac{8!}{4! 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 280$$

и восьмизначное число "собрано" из цифр
7; 7; 7; 7; 9; 3; 1; 1

таких чисел: $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 60 \cdot 21 = 840$

Следовательно всего таких чисел:

$$840 + 280 = 1120$$

~~Решение~~
Ответ: 1120 ~~чисел~~

УЗ.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x}{y}\right)^7 \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2) & \text{I} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II} \quad y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x =$$

$$D = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 =$$
$$= 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$$

$$y = \frac{-2x-4 \pm (4(x-1))}{2}$$

$$y_1 = \frac{-2x-4+4x-4}{2}$$

$$y_2 = \frac{-2x-4-4x+4}{2}$$

$$y_1 = x-4$$

$$y_2 = -3x$$

$$\text{I} \quad \text{Если } y = x-4$$

$$\left(-\frac{x}{x-4}\right)^7 \ln(4-x) = x^2 \ln(x \cdot (x^2 - 8x + 16))$$

$$\text{Если } y = -3x$$

$$\left(\frac{x}{-3x}\right)^7 \ln 3x^2 \ln 9x^3 = x$$

прод. на стр. 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln(4-x)(3\ln x - \ln(4-x)) = 2\ln^2 x$$

$$\ln(4-x) = 8 \quad \ln x = 9$$

$$b(3a-b) = 2a^2$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$\Delta = 9b^2 - 8a^2 = 0$$

$$b = \frac{3a \pm a}{2}$$

$$b_1 = 2a \quad b_2 = 0$$

$$\ln(4-x) = 2\ln x$$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

поскольку $y = \ln x$ — возраст.
функция:

$$4-x = x^2 \quad \text{или} \quad 4-x = x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

неудовл. *

$$x_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

удовл. *

$$4 < \sqrt{17} < 5$$

$$3 < \sqrt{17} - 1 < 4$$

$$\frac{3}{2} < \frac{\sqrt{17} - 1}{2} < 2$$

$$x \neq 0, **$$

$$x > 0$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln 9x^3}$$

$$\frac{x^6}{3} > 0 \quad \text{и} \quad x^{2\ln 9x^3} > 0, \text{ т.к.}$$

**, поэтому возведем
в $\ln$ от обеих частей.

$$\ln \left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = \ln x^{2\ln 9x^3}$$

$$\frac{x^6 \ln 3x}{3 \ln 3x} = x^{4 \ln 3x} \cdot \ln x$$

$$\left(\frac{x^3}{3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln x}$$

$$\ln 3x \ln \frac{x^2}{3x} = 2 \ln^2 x$$

$$\ln 3x (3 \ln x - \ln 3x) = 2 \ln^2 x$$

$$\ln x = c \quad \ln 3x = d$$

$$d(3c-d) = 2c^2$$

$$2c^2 - 3cd + d^2 = 0$$

$$\Delta = 9c^2 - 4c^2 = c^2$$

$$d = 2a \quad \text{или} \quad d = a$$

$$d = 2a \quad \text{или} \quad d = a$$

$$\ln 3x = 2 \ln x \quad \ln 3x = \ln x$$

~~$$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = \left(\frac{x^7}{x(4-x)}\right)^{\ln(x(4-x))}$$~~

$$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(4-x))}$$

$$4-x > 0$$

$$x < 4$$

$$x(4-x)^2 > 0$$

$$x > 0$$

$$* x \in (0; 4)$$

$$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(4-x))}$$

$$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln(4-x)}$$

$$\left(\frac{x^7}{x^2(4-x)}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x} \quad , \text{ т.к. } x \neq 0$$

$$\left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x}$$

$$x \in (0; 4), \text{ след. } \left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} > 0 \text{ и } x^{2\ln x} > 0$$

возьмем $\ln$ от обеих частей, т.к. это не нарушит общности.

$$\ln\left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = \ln x^{2\ln x}$$

$$\ln(4-x) \cdot \ln\left(\frac{x^3}{4-x}\right) = \ln x^2 \cdot \ln x$$

$$\ln(4-x)(\ln x^3 - \ln(4-x)) = \ln x^2 \cdot \ln x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. уч поскольку $y = \sqrt{x}$ монотонно
возр. функцией:

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & \text{I} \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 & \text{II} \end{cases}$$

$3x = x^2$ $3x = x$
 $x=0$ или $x=3$ $x=0$ не удов. **
 $x=3$ удов. **

$x+y+8 \geq 0$
 $y \geq -8-x$

$x-y+8 \geq 0$
 $y \leq x+8$

Ответ: $(3; -9)$
 $(2; -2)$ и $(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2})$

h - области,
ограниченные
прямыми

$y_1 = -8-x$
 $y_2 = x+8$

① $x+y+8 \geq 0$; $x-y+8 \leq 0$
 $x+y+8 - (x-y+8) = 16$
 $y = 8$

② $x+y+8 \geq 0$; $x-y+8 \geq 0$
 $x+y+8 + x-y+8 = 16$
 $x = 0$

$$\textcircled{3} \quad x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \geq 0$$

$$\begin{aligned} -x-y-8 + x-y+8 &= 16 \\ y &= -8 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad x+y+8 \leq 0 \quad x-y+8 \leq 0$$

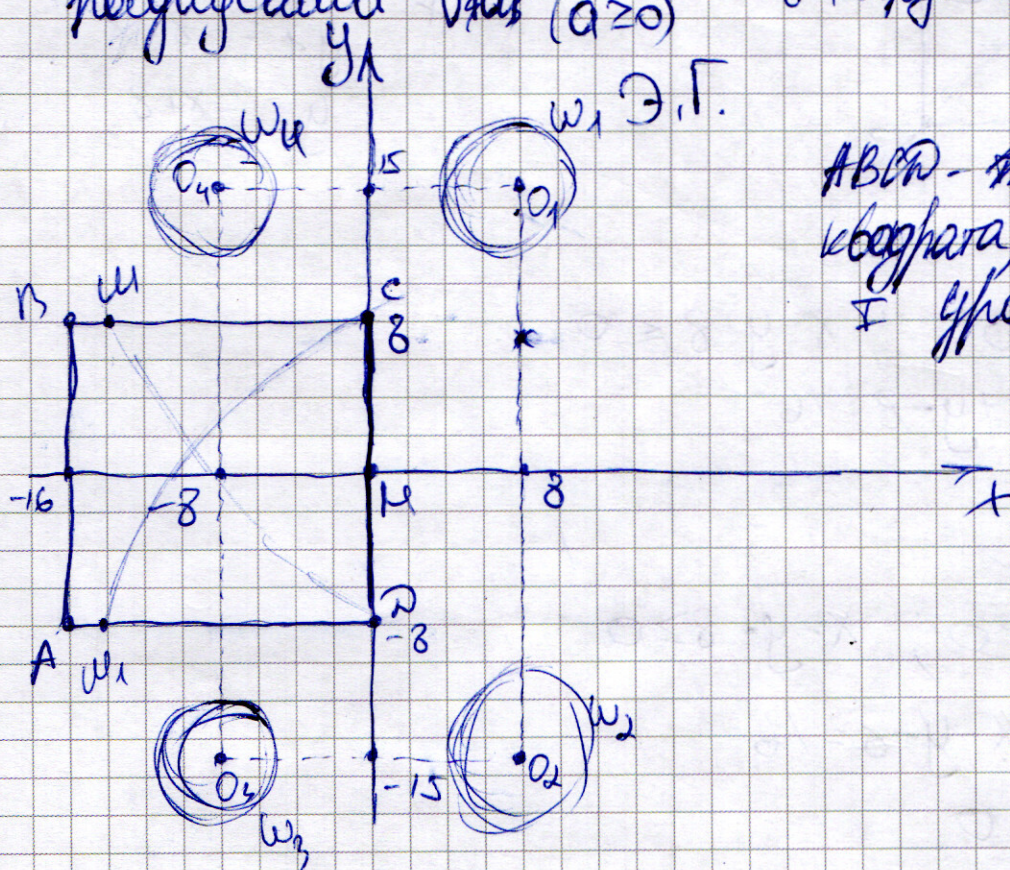
$$-x-y-8 - x+y-8 = 16$$

$$-x = 16$$

$$x = -16$$

Учитывая область, I уравнение задаёт квадрат с диагональю $(-16; -8) - (0; 8)$

II уравнение задаёт 4 окружности с центрами $(8; 15); (-8; 15); (8; -15); (-8; -15)$ и радиусами $\sqrt{a^2}$ ($a \geq 0$) в координатах x, y



ABCD - вершины квадрата, заданного I уравнением.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I при $\sqrt{4a^2} < 7$ система не имеет решений
(на графике видно, что окружности не касаются
квадрата). — не подходит

II при $\sqrt{4a^2} = 7$ система имеет ровно 2 корня,
т.к. $\rho(O_1; C) = \sqrt{49 + 64} > 7$, следовательно
 ω_1 не касается ~~квадрата~~ ^{квадрата},
 ω_2 как и ω_1 , а ω_4 и ω_3 касаются — подходит

III при $7 < \sqrt{4a^2} < R_1$ ω_4 и ω_3 имеют каждая
по 2 точки пересечения с квадратом. ~~Через~~
как с какого-то радиуса и ω_1 и ω_2 тоже
имеют по 2 точки пересечения. На этом
промежутке система имеет 4 или 6 или 8
корней, что не подходит. — не под

IV точки B и C равноудалены от O_3 .
при $\sqrt{4a^2} = R_1$ ω_3 проходит через B и C

$$\sqrt{4a^2} = \rho(O_3; C) = \sqrt{64 + 23^2}$$

при этом (из-за симметрии) O_1 пересекает
ABCD в точке ~~ABCD~~

критическая точка, при $\sqrt{4a^2} > R_1$ ω_4 и ω_3 не
имеют точек пересечения с ABCD

найдя при этом точку пересечения ω_1 и $ABCD$

Одна точка D, а вторая: M, лежащая на прямой $y_3 = 8$

$$M(8; x_3)$$

$$p(M; O_1) = p(O_3; C)$$

~~$$\sqrt{64 + x_3^2}$$~~

~~$$\sqrt{64 + x_3^2}$$~~
$$\sqrt{49 + (8 - x_3)^2} = \sqrt{64 + 23^2}$$

по условию задано ~~$x_3 < 0$~~ $x_3 < 0^{**}$

~~$$49 + 64 = 16$$~~

$$49 + (8 - x_3)^2 = 64 + 23^2$$

$$(8 - x_3)^2 = 15 + 23^2$$

$$(8 - x_3)^2 = 544$$

$$8 - x_3 = \sqrt{544} \quad \text{или} \quad 8 - x_3 = -\sqrt{544}$$

$$x_3 = 8 - \sqrt{544}$$

подходит в $**$

$$x_3 = 8 + \sqrt{544}$$

не подходит в $**$

$$8 - \sqrt{544} > -16$$

~~Нет R_2~~

$$\sqrt{544} < 24$$

$$-24 < -\sqrt{544}$$

$$-16 < 8 - \sqrt{544}$$

не подходит

симметрично для ω_2 и M

II при дальнейшем увеличении радиуса

ω_1 и ω_2 будут иметь по 2 точки пересечения

$$R_1 \leq \sqrt{544} < R_2$$

(4 решения) ~~до R_2~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

VI при $\sqrt{OA'} = R_2$

ω_1 пересекает A, а ω_2 пересекает B
(из-за симметрии их расположения)
 ω_3 и ω_4 не имеют общих точек с ABCD

$$R_2 = \rho(O_1; A) = \sqrt{23^2 + 24^2} = \sqrt{105}$$

VII при $\sqrt{OA'} > R_2$

- подходит

нет корней, не подходит

Следовательно:

$$\sqrt{OA'} = \sqrt{23^2 + 24^2}$$

или

$$\sqrt{OA'} = \sqrt{49 + 64}$$

$$OA' = 1105$$

$$O_1 = 1105$$

$$OA' = 113$$

$$O_1 = 113$$

Ответ: ~~1105~~ 113 и 1105

113; 1105

У2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \sqrt{26} \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ 529 \\ \hline 1105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{23} \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 559 \end{array}$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 7x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x \right) + \sqrt{2} (\sin 45^\circ \cos 3x - \cos 45^\circ \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \cancel{\sin(\frac{\pi}{4} - 3x)} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 5x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = y$$

$$2 \sin 5x \cdot \cos y + \cos(2y - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\cos(2y - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2y) = \sin 2y$$

$$\cos 90^\circ = \sin 0^\circ$$

$$2 \sin 5x \cdot \cos y + \sin 2y = 0$$

$$2 \sin 5x \cdot \cos y + 2 \sin y \cos y = 0$$

$$\cos y = 0$$

или

$$2 \sin 5x + 2 \sin y = 0$$

$$\sin 5x = -\sin y$$

$$\sin 5x = \sin(-y)$$

$$5x = -y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = -y + 2\pi n$$

$$5x = -2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$5x = \pi - (-y) + 2\pi n$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \pi + 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \pi n; -\frac{3\pi}{8} + \pi n; -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

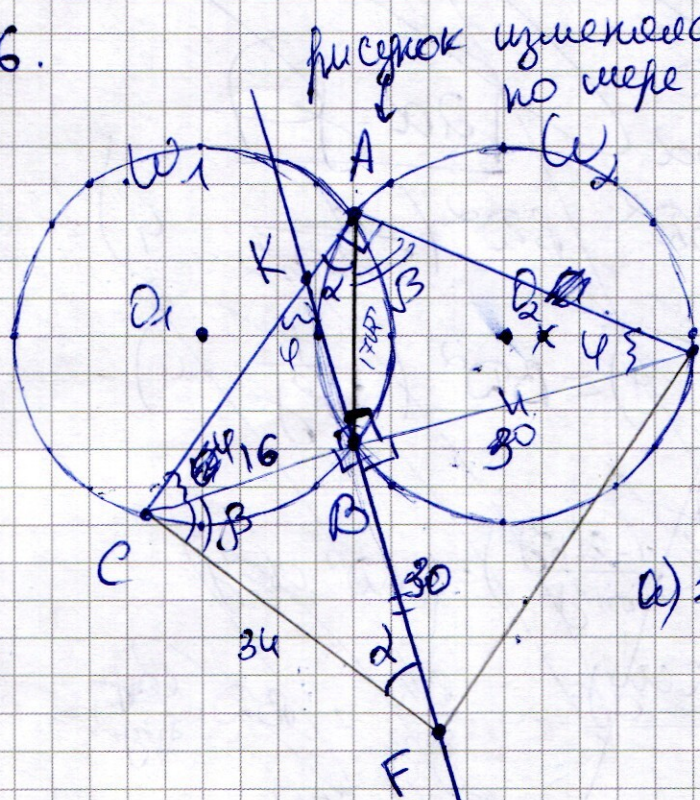


рисунок уменьшен по мере решения. Все уменьшено обосновано.
CF - ?

$$R = R_1 = R_2 = 17$$

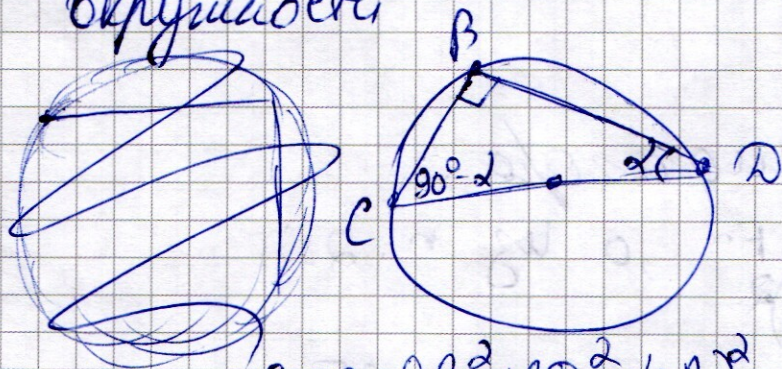
(R_1 и R_2 - радиусы

1 и 2 окружностей соответственно)

$$\angle CAD = 90^\circ$$

а) 1. Пусть $\angle CAB = \alpha$,
Тогда $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$

2. $\angle CAB$ опирается на дугу $\overset{\text{окружности } \omega_1}{CB}$, а $\angle BAD$ опирается на дугу $\overset{\text{окружности } \omega_2}{BD}$. Поскольку окружности одинаковы и $\angle CAB = 90^\circ - \angle BAD$, то длина этих дуг равна половине окружности.



~~равно длинная хорда~~
равно
рисунок, на котором CB и BD в одной окружности равны.

$$\text{след. } CB^2 + BD^2 = (2R)^2 \quad (\text{по т. Пифагора})$$

ω_1 и ω_2
расстояние между C и D
по теореме о хордах

снуг сав:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R = \frac{BD}{\cos \alpha}$$

$$CB^2 + BD^2 = 4R^2$$

$$CB^2 + BD^2 = \frac{BC \cdot BD}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$2\alpha = \gamma$$

$$D = \frac{BD^2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 4BD^2 = BD^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 4 \right) =$$

$$= BD^2 \left(\frac{4}{\sin^2 \alpha} - 4 \right) = BD^2 \left(\frac{4}{\sin^2 \gamma} - 4 \right) =$$

$$= 4BD^2 \left(\frac{1 - \sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} \right) = 4BD^2 \cot^2 \gamma$$

$$CB = \frac{2BD}{\sin \gamma} = 2BD \cot \gamma = \frac{BD}{\sin \gamma} + BD \cdot \cot \gamma$$

$$CB = \frac{BD(1 + \cot \gamma)}{\sin \gamma}$$

$$CB = \frac{BD(1 - \cot \gamma)}{\sin \gamma}$$

$$CB^2 - \frac{2BC \cdot BD}{\sin \gamma} + BD^2 = 0$$

$$D = \frac{4BD^2}{\sin^2 \gamma}$$

3. из $\triangle CBF$:

по теореме Пифагора:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2, \text{ а из н. 2.}$$

$$CF^2 = (2R)^2$$

по условию задачи $CF > 0$, следовательно:

$$CF = 2R = 34$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $BC = 16$

4. по п. 2:

$$BC^2 + BD^2 = 34^2$$

$$BD^2 = 34^2 - 16^2$$

$$BD^2 = (34 - 16)(34 + 16)$$

$$BD^2 = 18 \cdot 50$$

по условию задачи $BD > 0$, следовательно:

~~$BD = 5.4$~~

$$BD = 5.4 = 20$$

$$BD = \sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{25 \cdot 4 \cdot 9} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$

5. по теореме синусов из $\triangle ACB$:

$$\frac{16}{\sin \alpha} = 34$$

$$\sin \alpha = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

6. в $\triangle CBF$:

$$\sin \angle CFB = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

(т.к. $\triangle CFB$ — прямоугольный
по определению)

следовательно $\angle CFB = \alpha$

7. $\angle BCF = 90^\circ - \alpha = \beta = \angle BAD$

8. Пусть $\angle ACD = \theta$, $\angle ADC = \varphi$

9. по теореме синусов из $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$:

$$\frac{AB}{\sin \Theta} = 2R = \frac{AB}{\sin \varphi}$$

След. $\sin \Theta = \sin \varphi$
следовательно:

$$\Theta = \varphi \quad \text{или}$$

возможно,
следовательно:

$$\Theta = \varphi = 45^\circ$$

$$\Theta + \varphi = 180^\circ$$

невозможно,
поскольку Θ и φ —
углы ^{одного} ~~принадлежащего~~
треугольника
(ACD)

10. ~~г.м~~ ~~АН~~: ~~АН~~ — высота ~~в~~ ~~треугольнике~~ ~~ACD~~

11. ~~по свойству~~ ~~прямоугольного~~ ~~треугольника~~
 ~~$AK^2 = CK \cdot KB$~~

9. поскольку $\angle CBK = 90^\circ$; $\angle CKB = 45^\circ = \varphi$

~~10. следовательно~~

10. по п. 9:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 34$$

$$AB = 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

$$11. \sin \alpha = \frac{8}{17} \text{ по п. 5.}$$

поскольку $\alpha < 90^\circ$ (т.к. $\alpha + \beta = 90^\circ$; $\alpha, \beta > 0$),
то $\cos \alpha > 0$, следовательно:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 150 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha = \frac{15}{17}$$

12. по теореме косинусов из $\triangle ACB$:

$$AC^2 + 289 \cdot 2 - 2 \cdot AC \cdot 17\sqrt{2} \cdot \cos \alpha = 16^2$$

пусть $AC = x$

$$x^2 + 578 - 34\sqrt{2} \cdot \frac{15}{17} x = 256$$

$$x^2 - 30\sqrt{2}x + 322 = 0$$

$$D = 900 \cdot 2 - 1288 = 1800 - 1288 = 512$$

$$x = \frac{30\sqrt{2} \pm 16\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 322 \\ 1288 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{289} \\ 17 \\ \hline 578 \\ - 256 \\ \hline 322 \\ 9 \\ - 1800 \\ \hline 512 \end{array}$$

$$x = 23\sqrt{2}$$

или

$$x = 7\sqrt{2}$$

13. по теореме косинусов из $\triangle ACB$:

$$x^2 + 256 - 2 \cdot x \cdot 16 \cdot \frac{15}{17} = 578$$

$$x^2 - 16\sqrt{2}x - 322 = 0$$

$$D = 256 \cdot 2 + 1288 = 1800$$

$$x = \frac{16\sqrt{2} \pm 30\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{array}{l} 7\sqrt{2} + 17\sqrt{2} \\ 34\sqrt{2} \end{array}$$

$$7\sqrt{2} + 17\sqrt{2} > 16$$

$$7\sqrt{2} + 16 < 17\sqrt{2}$$

$$16 < 10\sqrt{2}$$

следовательно

т.к. $x = 7\sqrt{2}$ не подходит,
сторона $\triangle$ не может увеличиться

Если $AC = 23\sqrt{2}$
~~23~~ 'попкорка'

~~$23\sqrt{2} + 16 \geq 44\sqrt{2}$~~
 $16 + 17\sqrt{2} \geq 23\sqrt{2}$

$16 \geq 6\sqrt{2}$
 $256 \geq 72$ $\sqrt{\frac{18}{96}}$

оба могут быть сторонами
 этого Δ

Если $AC = 23\sqrt{2}$

Если $AC = 7\sqrt{2}$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin(\varphi + \beta)}{2}$$

$$\sin(\varphi + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \beta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15}{17} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{8}{17} =$$

$\sin \beta = \cos \alpha \quad \cos \alpha = \sin \beta$

$$= \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$\sqrt{\frac{23}{161}}$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot 23\sqrt{2}}{34 \cdot 2}$$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 34 \cdot 23\sqrt{2}}{34 \cdot 2}$$

$$S_{\Delta ACF} = 529$$

или $S_{\Delta ACF} = 161$

Ответ: 161 или 529

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$y_1 = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ — график — экспонента ($y_2 = 3^x$, но сдвинутая по оси y)

$y_2 = 93 + (3^{28} - 3)x$ — график — прямая

Эти 2 функции не могут иметь более 2 общих точек, т.к. $y_1 = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ — имеет постоянную выпуклость и её производная всё время увеличивается, а y_2 — прямая.

Найдя эти точки пересечения:

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + (3^{28} - 3)x$$

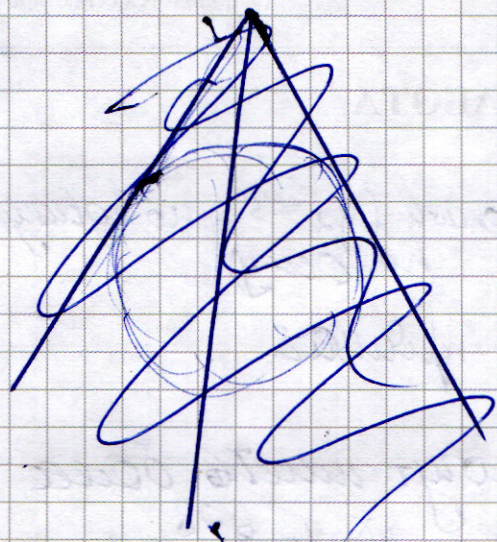
$$x = 4$$

$$3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 4 \cdot 3^{28} - 12$$

подходит при подстановке

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + (3^{28} - 3)x$$

другой x , очень очень близок к 4 и не цел, т.к. $x = 3$ и $x = 5$ не подходит и при $x = 3$.



$$y_1 = 27 + 4 \cdot 3^{28} = 27 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y_2 = 93 + (3^{28} - 3) \cdot 3 = 93 + 3 \cdot 3^{28} - 9$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 27 \\ 9 \\ \hline 243 \end{array}$$

$$y_1 \geq y_2$$

$$27 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3 \cdot 3^{28} - 9$$

$$3^{28}$$

$$93 - 9 - 27$$

а при $x = 5$:

$$y_1 = 243 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y_2 = 93 + (3^{28} - 3) \cdot 5$$

$$y_1 \geq y_2$$

$$243 + 4 \cdot 3^{28}$$

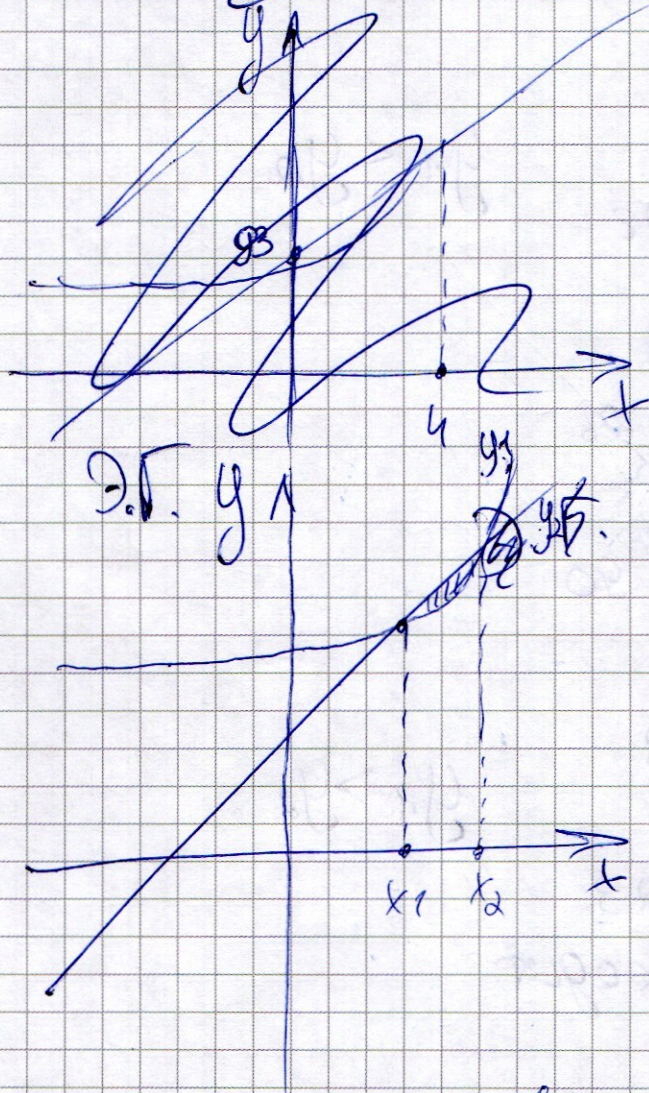
$$93 + 5 \cdot 3^{28} - 15$$

$$243 - 93 + 15 \leq 3^{28}$$

Следовательно второй корень лежит между 3 и 5. Следовательно единственного

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~возможное паре из целых чисел~~
~~чисел имеет $x=4$.~~



из заштрихованной
области надо найти
все целые точки.

При этом око могут
считаться на прямой,
но не могут считаться
на степенной
функции y_1

x_1 или x_2 равно 4, т.к. око подходит
при подстановке.

Если $x=5$:

$$y_1 = 27 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y_2 = 93 + 5 \cdot 3^{28} - 9$$

~~$y_1 > y_2$~~
 ~~$y_2 > y_1$~~

Если $x=3$
 $y_1 = 27 + 4 \cdot 3^{28}$
 $y_2 = 93 + 3 \cdot 3^{28}$

Следовательно при $x=5$
 y_1 все еще меньше
 y_2

следовательно, $x_1 = 4$.

при $x=28$:

$$y_1 = 3^{28} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y_2 = 93 + 28 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 28$$

$$y_1 < y_2$$

при ~~$x=29$~~ $x=30$

$$\del{y_1} y_1 = 9 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y_2 = 93 + 30 \cdot 3^{28} - 90$$

при $x=32$

$$y_1 = 81 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y_2 = 93 + 32 \cdot 3^{28} - 32 \cdot 3$$

$$y_1 > y_2$$

не подходит

при $x=31$:

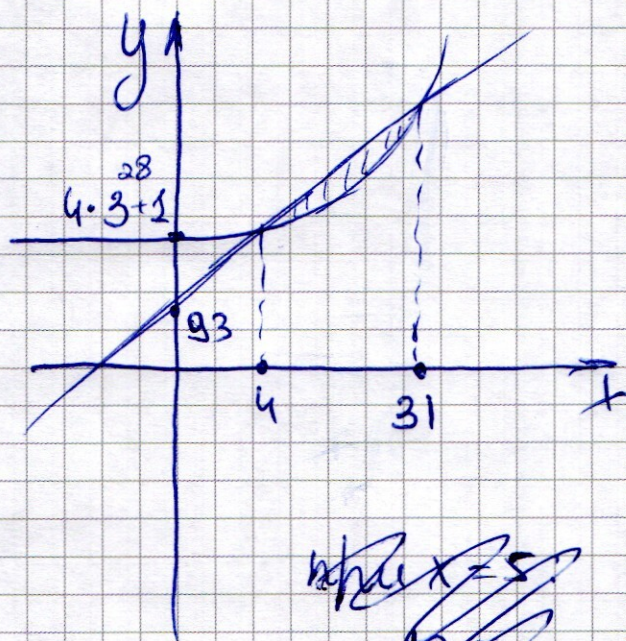
$$y_1 = 27 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y_2 = 93 + 31 \cdot 3^{28} - 31 \cdot 3$$

$$\del{y_1} y_1 = y_2$$

$x_1 = 4$ и $x_2 = 31$ - подходит при подсчете

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Необходимо найти все
целые числа в
этой области,
по оси y .

~~при $x=5$
 $y=2$~~

при любом целом $x \in$
(4; 31) количество таких
пар с таким x :

$y_2(x) - y_1(x) - 1$, т.к.
 y_1 не включена в область.

$x \in [5; 30]$

Всего таких чисел:

$$93 \cdot 26 + (3^{28} - 3) \cdot \frac{30+5}{2} \cdot 26 - \cancel{3^{30} - 3^{28}} - 4 \cdot 3^{28} -$$

$$- 26 =$$

$$= 92 \cdot 26 + 13 \cdot 35(3^{28} - 3) - \cancel{3^{30} - 3^{28}} - 104 \cdot 3^{28} =$$

$$= 13(184 - 105) + 13 \cdot 35 \cdot 3^{28} - 104 \cdot 3^{28} - \cancel{3^{30} - 3^{28}} =$$

$$= 1027 + 351 \cdot 3^{28} - \cancel{(3^{30} - 3^{28})} =$$

геометрическая
прогрессия

$$\begin{array}{r} 351 \\ \times 3 \\ \hline 1053 \\ + 10530 \\ + 105300 \\ \hline 1053000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1027 \\ + 1053000 \\ \hline 1054027 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 184 \\ - 105 \\ \hline 79 \end{array}$$

$$3^5 + 3^6 + \dots + 3^{30} = \frac{3^{30} - 3^5}{3 - 1}$$

2 4 8 16

9; 49

$$\frac{(16-2) \cdot 4}{2} = 60$$

$$227 \times 15 \frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 9 \\ 7203 & 3 \\ 2401 & 7 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ & 7 \end{array}$$

~~$$\begin{array}{r|l} 2401 & 7 \\ 343 & 7 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 49 & 7 \end{array}$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 49 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1 \\ 7, 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1 \end{array}$$

$$\cos 30^\circ + \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

~~$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$~~

~~$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4} =$$~~

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

~~$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$~~

.....

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

~~cos 2x~~

$$\int \left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad \text{I}$$

$$\int y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad \text{II}$$

$$\log_2 4 + \log_2 8 = 2+3$$

$$\text{I} \quad \frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 4y + 4 - 4 + 2xy = 3x^2 + 12x + 12 - 12$$

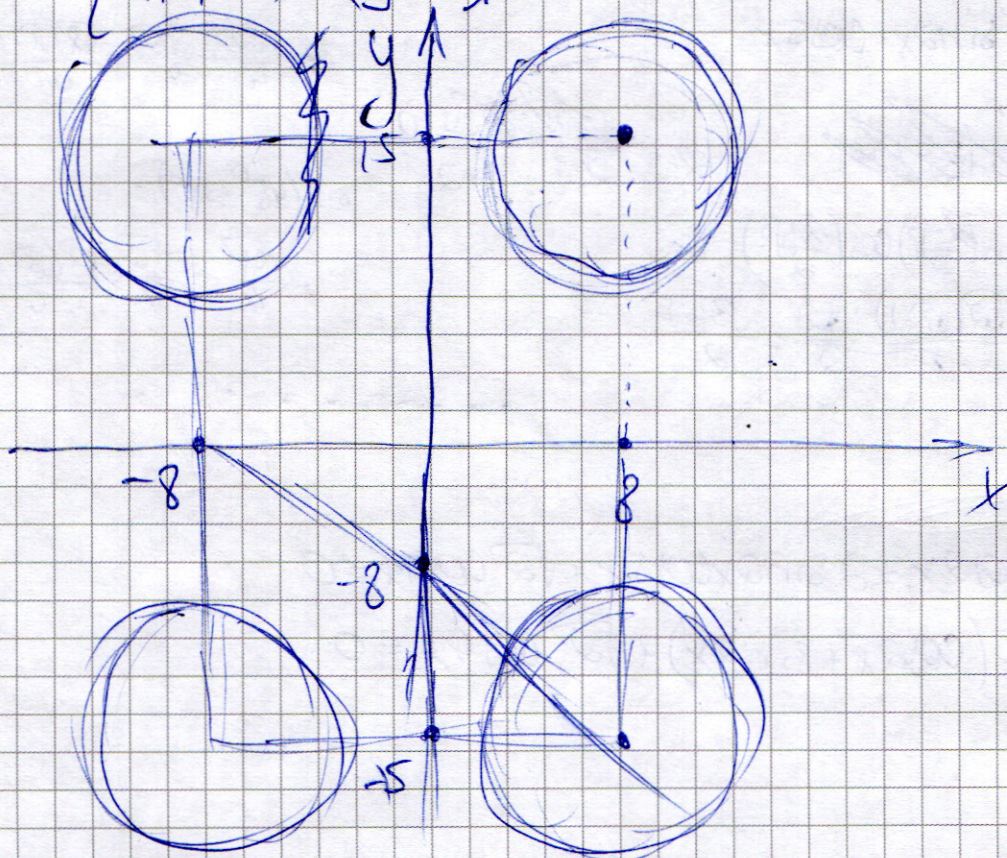
$$(y+2)^2 - 4 + 2xy = 3(x+2)^2 - 12$$

$$\int |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

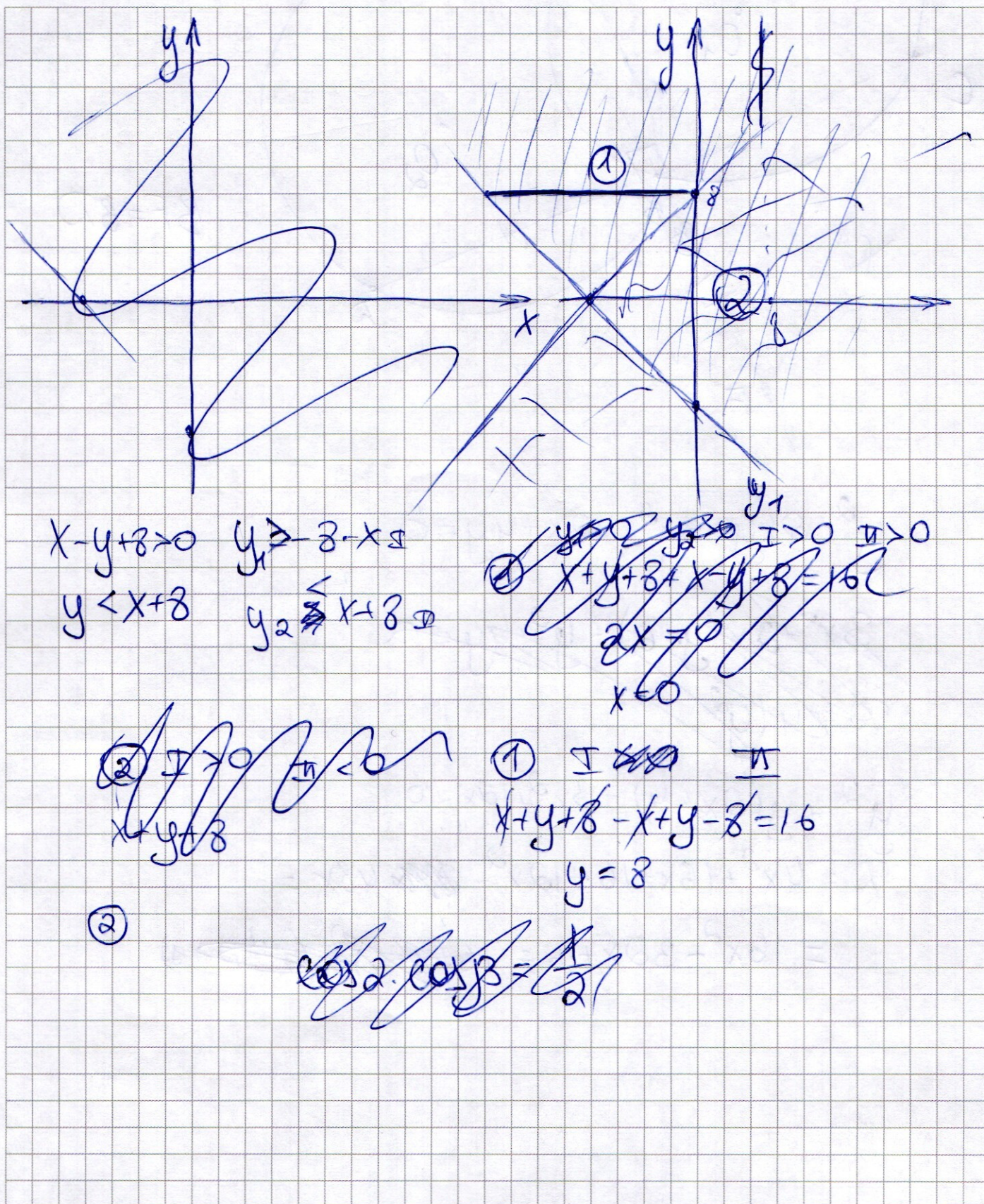
$$x+y+8=0$$

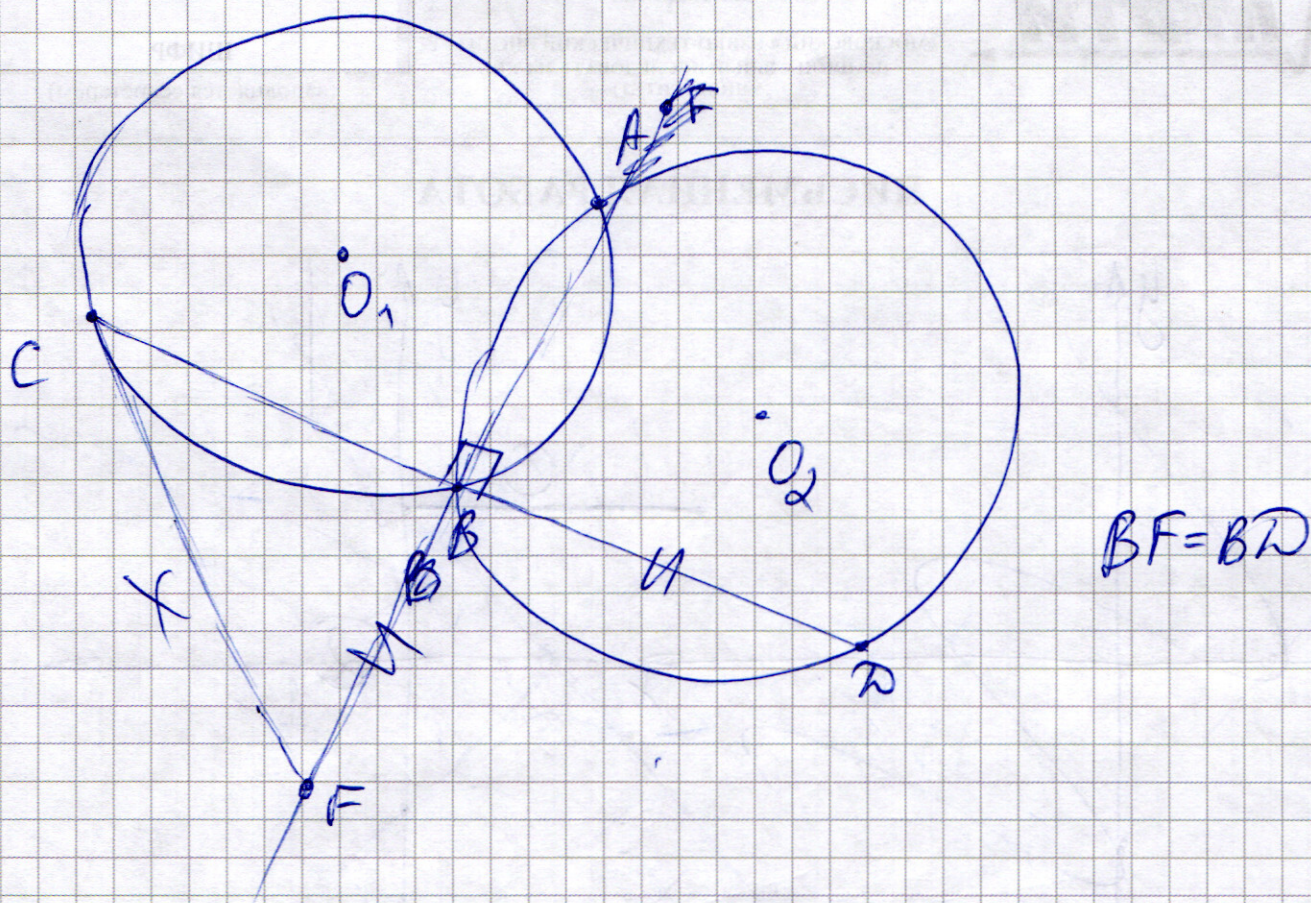
$$y = -8 - x$$

$$\int (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$y^2 + 2xy + 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

~~$$3x^2 + 2x(y+6) + y^2 + 4y = 0$$~~
~~$$D = 4(y^2 + 12y + 36) - 12x(y+6) = 4(y+6)^2 - 12x(y+6)$$~~

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 5x = \cos(4x+x) = \cos 4x \sin x - \sin 4x \cos x$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 4x = 0$$

~~Второй вариант~~

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right)$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cdot \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

~~$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 7x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 7x \sin \frac{\pi}{4}$$~~

~~$$2 \cos(5x) \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$~~

$$2x - \frac{\pi}{4} = y$$

~~Второй вариант~~

~~$$2 \cos(5x) \cos y + \cos \left(2y - \frac{\pi}{2} \right) - \sin 2y$$~~

$$\sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x$$

~~$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) + \cos 4x = 0$$~~

$$2 \sin(5x) \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$y \leq 93 + (3^{28} - 3)x$$

