

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

MEMORANDUM FOR THE RECORD

1. [Illegible]

2. [Illegible]

3. [Illegible]

4. [Illegible]

5. [Illegible]

6. [Illegible]

7. [Illegible]

8. [Illegible]

9. [Illegible]

10. [Illegible]

11. [Illegible]

12. [Illegible]

13. [Illegible]

14. [Illegible]

15. [Illegible]

16. [Illegible]

17. [Illegible]

18. [Illegible]

19. [Illegible]

20. [Illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x}{\sqrt{2}} = 0$$

~~$$\cos 9x - \cos 5x = 2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$~~

$$\cos 9x - \cos 5x = 2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x + \sin 2x) = \cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x =$$

$$= (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$(\cos 2x + \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x + \sin 2x - \cos 2x) = 0$$

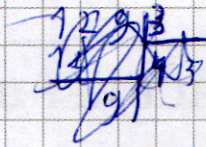
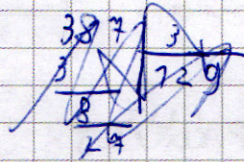
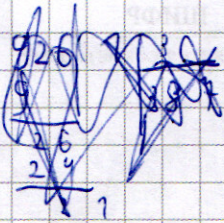
$$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \\ \sin 7x = \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k_2 \\ 7x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + 2\pi k_3 \end{cases}$$

ответ

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_1}{2} \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k_2}{9} \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k_3}{5} \end{cases} \quad \forall k_i \in \mathbb{Z}$$

N 1



$$9 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 = 9 \cdot 7 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 9 = 3^4 \cdot 7^3 \Rightarrow 3 \text{ цифры равны } 7$$

число способов выбрать позиции для этих цифр

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = C_{10}^3 = 120 \text{ упорядочив остальные}$$

цифры они равны 1, 3 или 9. всего число вариантов

выбрать их будет $C_5^3 = 10$ - если цифра 9 не встретится $C_4^3 = 4$

выбрать 2 девятки $C_4^2 = 6$ $\Rightarrow$ выбрать остальные (посчитано)

$$\Rightarrow \text{Ответ } 120 \cdot 45 = 5400$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-7)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

при $x+y \geq -5$ и $y-x \geq -5 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -5-x \\ y \geq -5+x \end{cases} \Leftrightarrow y \geq -5+|x|$;

$2y+10=10 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow 5 \geq |x|$

при $x+y \geq -5$ и $y-x \leq -5$: $y \geq -5-x$ $\xrightarrow{-5+x}$ $\Leftrightarrow x \geq y+5 \geq -x$;

$$\begin{aligned} x+y+5 - y+x-5 &= 10 \\ 2x &= 10 \Leftrightarrow x=5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \geq -5-y \\ x \geq 5+y \end{cases} \Leftrightarrow |x| \geq |y+5|$$

$$5 \geq |y+5|$$

при $x+y \leq -5$ и $y-x \geq -5$: $\begin{cases} x \leq -5-y \\ x \leq y+5 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -|y+5|$

$$-x-y-5 + y-x+5 = 10$$

$$-2x = 10 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow -5 \leq -|y+5| \Rightarrow |y+5| \leq 5$$

при $x+y \leq -5$ и $y-x \leq -5$: $\begin{cases} y \leq -5-x \\ y \leq -5+x \end{cases} \Leftrightarrow y \leq -5-|x|$

$$-x-y-5 - y-x-5 = 10$$

$$-2y = 20 \Leftrightarrow y = -10$$

$$-10 \leq -5-|x| \Rightarrow |x| \leq 5$$

$\Rightarrow$ решение первого ур: $y = -10$ при $|x| \leq 5$; $x = -5$ при $|y+5| \leq 5$;
 $y = 0$ при $|x| \leq 5$ и $x = 5$ при $|y+5| \leq 5$.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\frac{3}{\ln(y/x^2)}} = e^{\ln y + \ln(\frac{y}{x^2})} = \left(\frac{y}{x^2}\right)^{\ln y} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad \log_3 x; y > 0$$

$$2y^2 - 2xy - 8y = 4x^2 - 16x$$

$$(y-x)^2 + y^2 - 8y + 16 = 5x^2 - 16x + 16.$$

$$x^2 y^4 = \left(\frac{y}{x^2}\right)^{-\frac{\ln y}{\ln x}} = \left(\frac{y}{x^2}\right)^{-\log_x y} \quad \text{при } x \neq 1: \quad (\text{возведем первое в степень } -\frac{1}{\ln x})$$

$$x^2 y^4 = y^{-\log_x y} \cdot x^{4 \cdot \log_x y} = y^{-\log_x y} \cdot y^4 \Rightarrow x^2 = y^{3 - \log_x y} \Rightarrow$$

при $y \neq 1$:

$$\Rightarrow x^2 = y^{2 \log_y x} = y^{3 - \log_x y} \Leftrightarrow \text{при } y > 0 \quad 2 \log_y x = 3 - \log_x y$$

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x y} \Rightarrow 2 - 3 \log_x y + \log_x^2 y = 0$$

равносильно первому ур.

$$(\log_x y - 1)(\log_x y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x^2 \end{cases}$$

при $x=1$: $-\ln x = 0$;

$$(y^4)^0 = 1 = y^{\ln(y)} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 = x$$

при $y=1$:

$$x^{-2 \ln x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 = y \quad \text{входит в область.}$$

и при $y=x$: подставим x во второе

$$y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0 \Leftrightarrow y^2(2y - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$y = x = 2$ - решение

← не род

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

график:

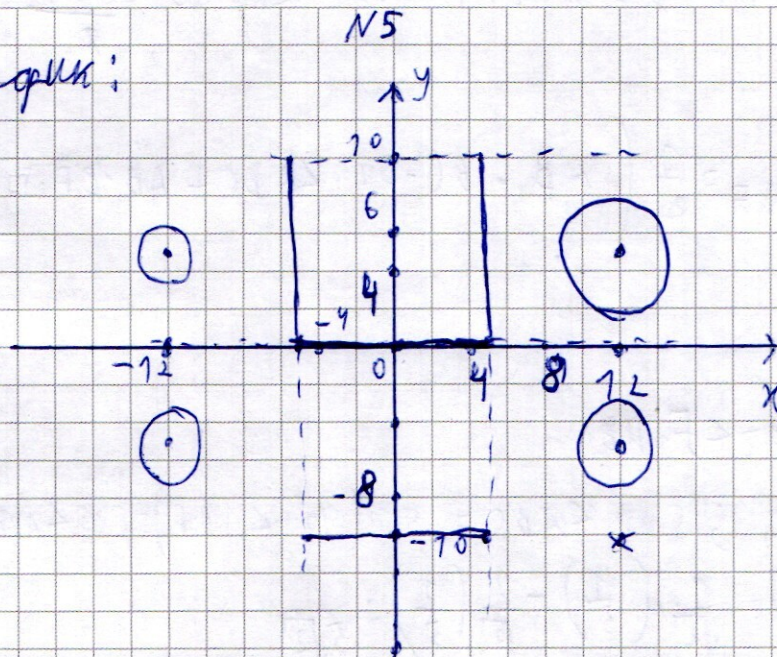


График ~~второго~~ второго уравнения - окружность в положительной части y и в остальных симметрична относительно осей, с центром $(12; 5)$ и радиусом $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$)

система имеет ровно 2 решения если 2

окружности в частях $y \geq 0$ касаются прямых $x = 5$ и $x = -5$ или точка $(0; 0)$ принадлежит

окружности, т.к. нижние окружности ~~пересекают~~ симм. отн. прямой $y = -5$,

если касание: радиус равен $12 - 5 = 7 \Rightarrow a = 49$

если $(0; 0)$ принадлежит: $(12)^2 + (5)^2 = 13^2 = a = 169$

ответ $a = 49$ или $a = 169$.

(в других случаях: либо 4 пер. с хор. отрезками)
либо 4 с верт. стр. или их нет.

(не пересекаются)
отрезки решений
($x = 5$ и $x = -5$)

№ 6

$$\sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \alpha - \text{острый}$$

$$\angle F_1DB = \alpha \quad \text{как } \angle F_1DB \Rightarrow DB = DF_1 \cdot \cos \alpha = 20 \cos \alpha = \frac{8 \cdot 2}{5} = 16 =$$

$$= BF_1$$

$$S_{FAC} = S_{ACB} + S_{ABF} + S_{BCF} = \frac{1}{2} \left(AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC + AB \cdot BF \cdot \sin \angle ABF + BC \cdot BF \right)$$

$$\angle ABF_1 = 45^\circ - \alpha = \angle APB - \angle F_1DB$$

$$\sin \angle ABF = \sin \angle ABF_1; \quad \sin \angle ABC = \sin(90^\circ + \angle ABF_1) = \cos \angle ABF_1$$

$$\sin \angle ABF = \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{4}{5} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ABC = \cos(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \quad \text{подставим:}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \left(10\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} + 10\sqrt{2} \cdot 16 \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} + 12 \cdot 16 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (2 \cdot 12 \cdot 7 + 16 \cdot 2 + 12 \cdot 16) = 4(21 + 4 + 24) = 4 \cdot 49$$

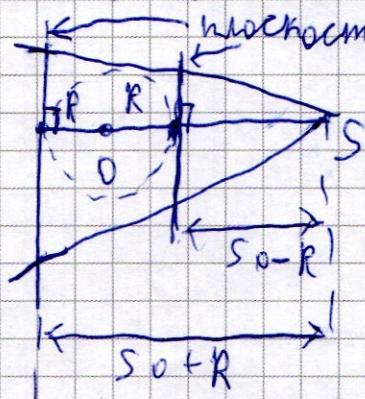
$$\text{Ответ: } FC = 20; \quad S_{ACF} = 196$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4

$S_K = S_L = S_M$ как кас. к сфере из S ,
рассмотрим сечения $\perp S_O$ и кас. сферы. $\therefore$

при пометении ~~кас. сферы~~ (центром S одну из этих
плоскостей можно перевести в другую т. к. они $\perp S_O$
 R - радиус сферы.



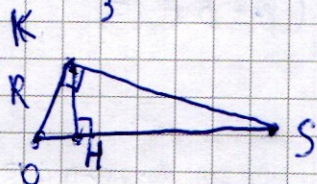
Коэффициент пометения равен

$$\Rightarrow \frac{S_O - R}{S_O + R} \text{ как отношение расстояний}$$

т. к. при пометении площади ~~каждой~~ увеличиваются
в a^2 раз (a - коэффициент) { сечения этими плоскостями
пометительны; ~~каждой~~ при той же пометении) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{S_O + R}{S_O - R} \right)^2 = \frac{16}{1} \Rightarrow \frac{S_O + R}{S_O - R} = 4 \Rightarrow S_O + R = 4(S_O - R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_O = \frac{5}{3} R$$



$$KS \perp OK; OK = R \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$$

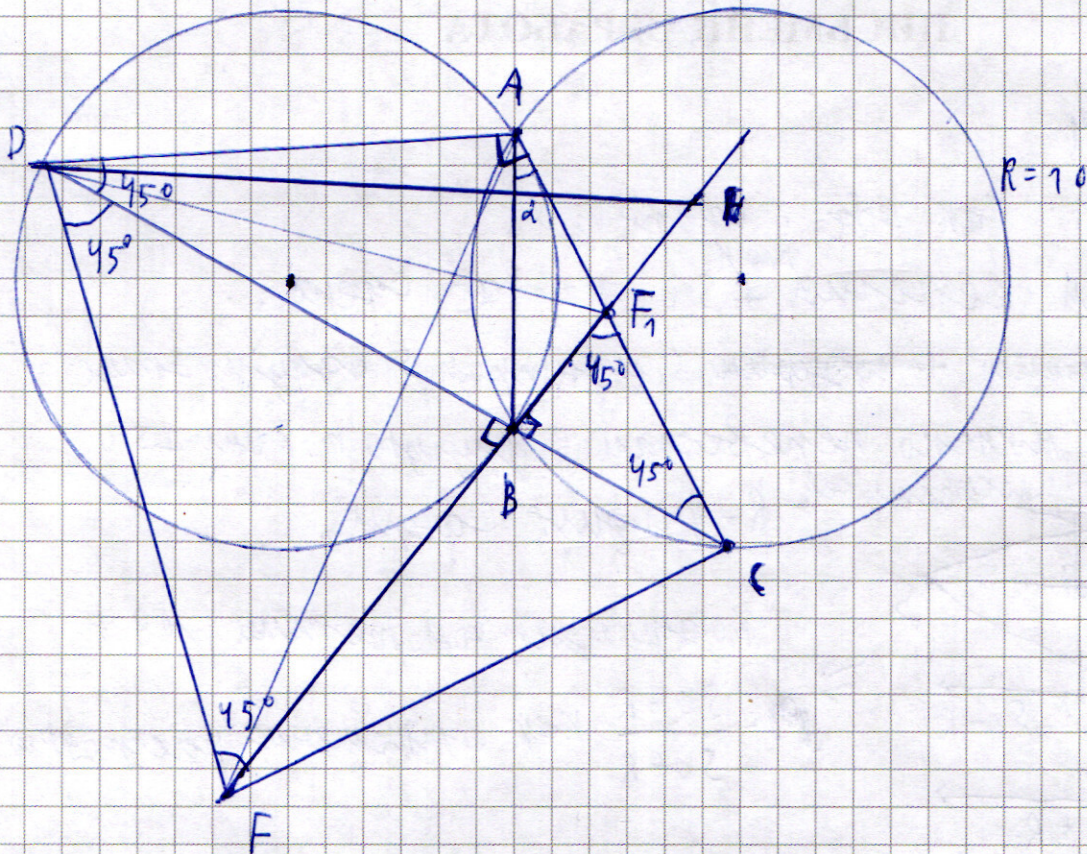
$$\angle KSO - \text{острый} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

плоскость $KLM \perp S_O$ т. к. $\triangle OKS \cong \triangle OLS = \triangle OMS$ по 3 сторонам $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ высоты на S_O из точек K, L, M ~~совпадают~~ имеют
единую точку $H \Rightarrow SH \perp KH; SH \perp KL \Rightarrow SH \perp KLM$ ($SH \parallel S_O$)

N 6

$$BF = BD$$



$\angle AFD = \angle ADC = 45^\circ$ т.к. они опираются на дугу AB
в окружностях одинакового радиуса (синусы равны, ~~остатки~~
~~тоже~~ равенство углов из конфигурации точек) $\Rightarrow AD = AC$
 $BF = BD \Rightarrow \angle DFB = \angle BDF = 45^\circ$,

по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow AB = 70 \cdot \sqrt{2}$.

$\angle ADF = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel DF \Rightarrow F_1 \in AC \cap BF, CB = BF_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle DBF_1 = \triangle F_1BC \Rightarrow CF = BF_1 = \sqrt{AD^2 + AF_1^2}$.

AF_1, BP - вписанный т.к. $\angle$ про т. $\angle$ равны 90° ; $\angle CAF_1 = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow DF_1$ - диаметр окружности ABD $\Rightarrow FC = 2R = 20$

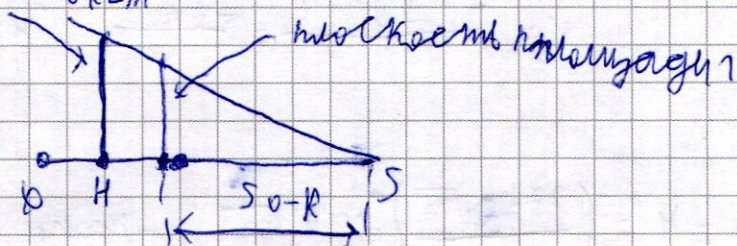
б) $BC = 12$, $\angle CAB = \alpha$, по теореме синусов: $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 20$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$OH = R \cos \angle KSO = \frac{4}{5} R \Rightarrow SH = SO - OH = R \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{5} \right) = \frac{R \cdot 13}{15} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ площадь сечения плоскостью KLM ^{аналогично} равна $\left(\frac{SH}{SO-R} \right)^2 \cdot 1 =$



$$= \left(\frac{\frac{13}{15} R}{\left(\frac{5}{3} - 1 \right) R} \right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{13}{5 \cdot 2} \right)^2 = 1,69$$

Ответ $\angle KSO = \arccos \sin \left(\frac{1}{5} \right)$; $S_{\text{сеч KLM}} = 1,69$

N3

при $y = x^2$, подставим y во второе:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \quad (x=0 \text{ не год.})$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ -x^3 + 2x^2 & \\ \hline x^2 - 6x & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -4x + 8 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + x - 4 \\ x^2 + x - 4 \end{array}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad y = x^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)^2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{— пара времени}$$

$$x = 2 \quad y = x^2 = 4 \quad \text{— пара времени}$$

$$\text{Ответ: } \{x; y\} = \left[\begin{array}{l} \{2; 2\} \\ \{2; 4\} \\ \left\{ \frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right\} \end{array} \right]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y > 3 \cdot 2^{34} > 2^{35}$$

$$\text{при } x \leq 1: \frac{1}{2^{35}} < y < 2^{34} \quad y \in \emptyset \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$$

при $x \geq 39$:

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} > 2^{39} > 2(2^{32} - 1)39 + 76, \quad y \in \emptyset$$

даже $x=39$

нижняя граница y возрастает быстрее верхней $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \leq 38$ производная верхней границы постоянна, а нижней монотонно возрастает

$$2^{35} \leq 2(2^{32} - 1)x < 2^{33} \Rightarrow x > 4$$

$$\text{при } x=5: 2^5 + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 5 < 76 + 2 \cdot 2^{32} \cdot 5 < 3 \cdot 2^{34} \Rightarrow y \in \emptyset$$

$$\text{при } x=6: 2^6 + 3 \cdot 2^{34} \leq 76 - 2 \cdot 6 + 2^{33} \cdot 6 = 64 + 3 \cdot 2^{34} \Rightarrow y \in \emptyset$$

нижняя и верхняя границы совпали, $y \in \emptyset$

$$\text{при } x=38: 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 - 2 \cdot 38 + 2^{33} \cdot 38 = 2^{38} \cdot \left(\frac{3}{32} + 1\right)$$

выполняется $\Rightarrow y \in \forall x \in [7; 38] \cap \mathbb{N}, \Rightarrow$

$\Rightarrow$ число нужных x пар равно $\sum_{x=7}^{38} (76 + 2(2^{32} - 1)x - (2^x + 3 \cdot 2^{34})) =$

$$= 76 \cdot 32 + 2(2^{32} - 1) \sum_{x=7}^{38} x - 32 \cdot 3 \cdot 2^{34} - \sum_{x=7}^{38} 2^x =$$

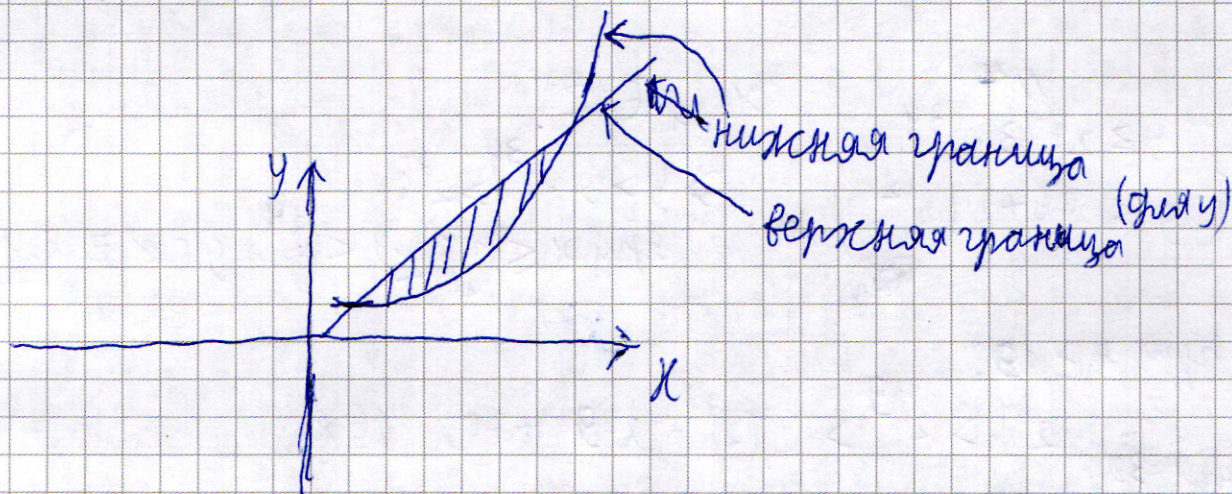
$$= 76 \cdot 32 + 2(2^{32} - 1) \left(\frac{38+7}{2} \cdot 32 \right) - 32 \cdot 3 \cdot 2^{34} - (2^{39} - 2^7) =$$

$$= 76 \cdot 32 + 32 \cdot 45 + 2^{32} \cdot 32 \cdot 45 - 3 \cdot 2^{39} - 2^{39} + 2^7 = 32 \cdot 37 + 2^7 +$$

N 7

$$+ 2^{37} (45 - 4^2) = 32 \cdot 37 + 128 + 2^{37} (29) = 992 + 128 + 29 \cdot 2^{37} =$$

$$= 1120 + 29 \cdot 2^{37}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light blue horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

$$\begin{array}{r} \times 43 \\ 387 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 387 \\ 1161 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 245 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9267 | 3 \\ 9 \quad \quad \quad 3087 \\ \hline 24 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 | 3 \\ \hline 1029 \end{array}$$

$$2^{36} > 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 34$$

$$\begin{array}{r} 1029 | 3 \\ 9 \quad \quad \quad 343 \\ \hline 72 \\ 9 \end{array}$$

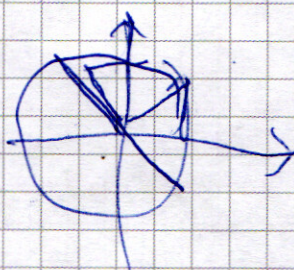
$$\begin{array}{r} 343 | 7 \\ 28 \quad \quad \quad 49 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \cdot 5 \\ 2^{34} \cdot 2,5 \\ \times 120 \\ \times 45 \\ \hline 90 \\ 45 \\ \hline 5400 \end{array}$$

20

4 16

9



$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\left(\frac{y}{2} - 4\right) = xy$$

$$\left(\frac{y}{2} - 4\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 3x^2 + 8x = 4y$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 31 \\ \hline 32 \\ 96 \\ \hline 992 \end{array}$$

74

5 7 2 3 9 4 5 6

7 0

7 8 7 1

7 2

