

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

Рассмотрим число 9261 в непонятном виде:
 $9261 = 7^3 \cdot 3^3$, тогда произведение в ^{цифры} ~~каждой~~ разности
 разности $7^3 \cdot 3^3$. Какие ^{цифры} ~~каждой~~ могут быть? Т.к.
 цифры лежат в отрезке $[0; 9]$, а произведение
 состоит из простых множителей 7 и 3, то
 цифры могут быть: 1, 3, 7, 9

1) Рассмотрим 2 случая: ① если в нашем числе
~~есть цифра 9~~ есть цифра 9 $\Rightarrow 9261 = 7^3 \cdot 3 \cdot 9$, т.е. в числе
^{3 семёрки, одна девятка, одна единица}
 9 может стоять на любой ^{позиции}
 из восьми позиций. 3 может стоять на оставшихся
 семи. Тогда для семёрок получается 8 позиций. Т.о.
 кол-во чисел в первом случае: $N_1 = 8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 20 \cdot 8 \cdot 7 =$
 $= 1120$. (Оставшиеся 3 позиции мы заменили «1»)

2) ② Во втором случае девятки нет (она может быть
 только одна т.к. произведение всего 3) $\Rightarrow$ у нас есть 3 «7» и
 3 «3» и две «1».

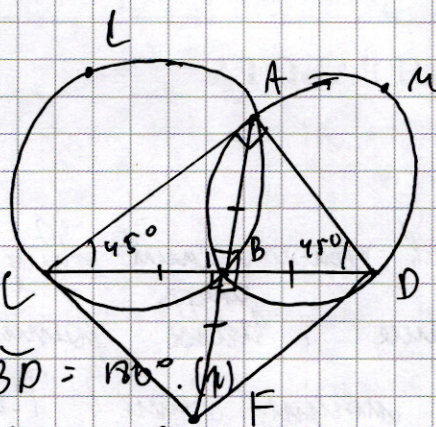
Теперь рассмотрим позиции «3». Наши варианты:

$C_3^3 = 56$, тогда для «7» $C_5^3 = 10$. Оставшиеся
 2 позиции заполняем единицами. Тогда число во
 втором случае: $N_2 = 10 \cdot 56 = 560$

3) Т.о. всего случаев $N_1 + N_2 = 1120 + 560 = 1680$

Окружн: 1680.

нб.



$$1) \angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 90^\circ, \text{ но } \angle CAB = \frac{1}{2} \widehat{BC} \text{ (как впис. угол), аналогично } \angle BAD = \frac{1}{2} \widehat{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{BD} = 180^\circ \text{ (н)} \\ \angle CBA + \angle ABD = 180^\circ \text{ (как смежные), где } \angle CBA = \frac{1}{2} \widehat{CA} = \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{CB}) \text{, аналогично } \angle ABD = \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{BD}),$$

$$\text{тогда } 180^\circ \sim \text{т.е. } 360^\circ - \widehat{CB} + 360^\circ - \widehat{BD} = 360^\circ, \text{ с другой}$$

$$\text{стороны } \widehat{CB} = \widehat{CB} + \widehat{AB} \text{ и } \widehat{BD} = \widehat{AB} + \widehat{BD} \Rightarrow$$

$$360^\circ = 2\widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{CB}, \text{ с учетом (1) получим}$$

$$\widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \angle APB = \angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2} = 45^\circ \text{ (как впис.)}$$

$$2) \text{т.о. } \triangle ACB - \text{равнобедр. и прямоуг. } \Rightarrow AC = AD \Rightarrow$$

$\widehat{AB} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{CB} = \widehat{BD} \Rightarrow CB = BD$, значит AB - высота и медиана ~~хорды~~ ~~хорды~~ ~~хорды~~ и делятся (по 2-ву теореме о перп. из центра к хорде).

3) По условию $BF \perp CD$, но т.к. $AB \perp CD$, то отрезки AB и BF лежат на одной прямой AF. $\angle CBF = 90^\circ$, т.к. $BF = BD$, то $BF = BC$ ($BC = BD$) $\Rightarrow \triangle CBF$ - рпд и прямо-моу. $\Rightarrow CF = CB\sqrt{2}$.

$$\angle ABD = 90^\circ \Rightarrow AD - \text{диаметр и } AD = 20 \Rightarrow BD = \frac{AD}{\sqrt{2}} = CB \Rightarrow$$

$$CF = AD = \boxed{20}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

д) Зная, что $BC = 12$ подтверждаем с условием из
 $R = 10 \Rightarrow$ можем считать что радиус нам не известен,
ноже $AB = BF$ из рав-ва $\triangle BCF$ и ABD (по гипотен. и
катету) $\Rightarrow AF = 2AB = 2 \cdot BC = 24$.

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \boxed{144}$$

Ответ: а) 20; д) 144.

и 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): При помощи:
$$\begin{cases} y = -x-5 \\ y = x-5 \end{cases}$$

Рассм. графики ф-ции (1) на выдел. области

I. $x+y+5 + y-x+5 = 10 \Leftrightarrow y=0$ - прямая $\parallel$ оси Ox .

II. $x+y+5 - y+x+5 = 10 \Leftrightarrow x=5$ - прям. $\parallel$ оси Oy .

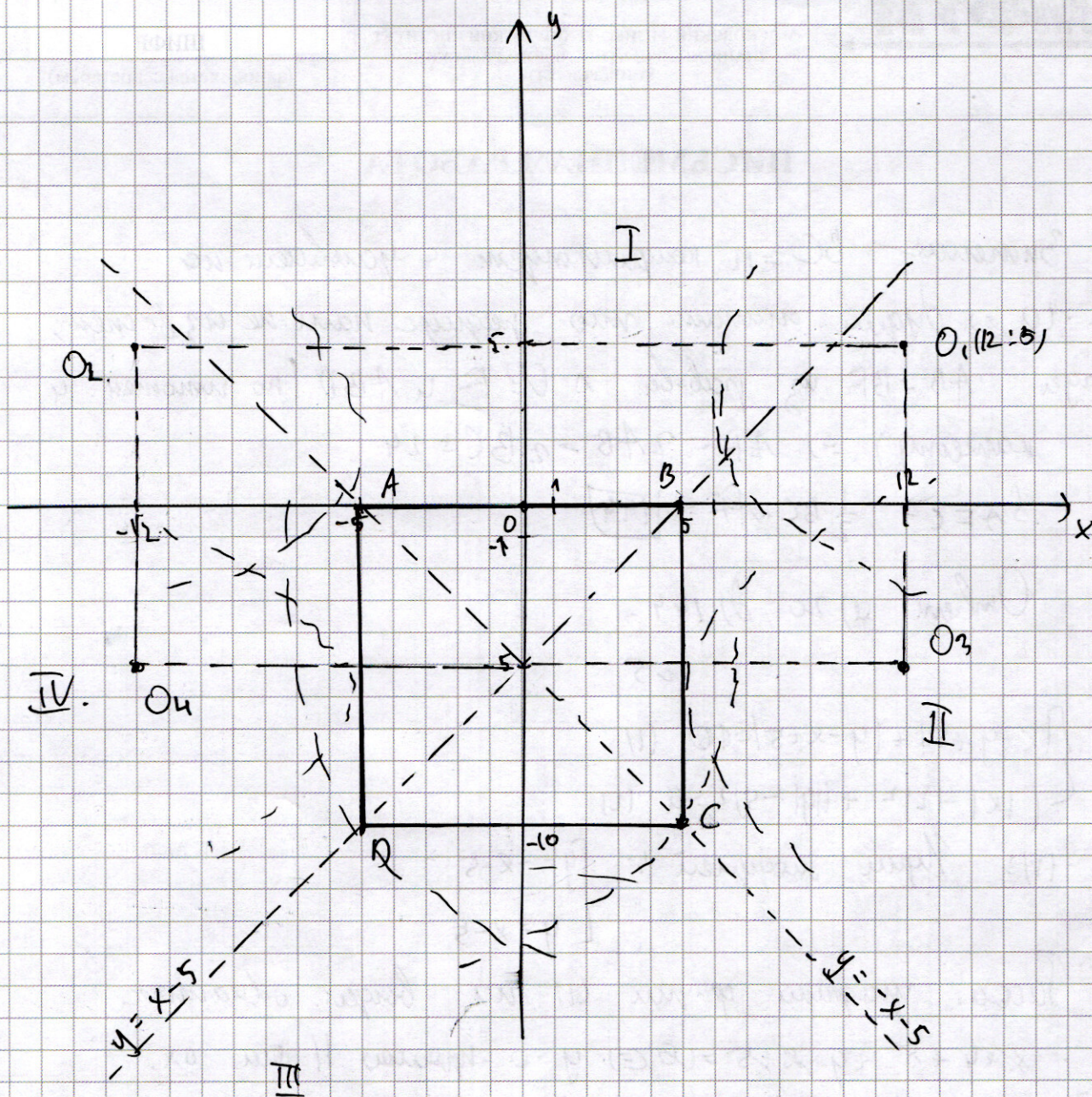
III. $-x-y-5 - y+x-5 = 10 \quad ; \quad -2y = 20 \quad ; \quad y = -10$

IV. $-x-y-5 + y-x+5 = 10 \quad ; \quad x = -5$

(2): $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ - ур-ие окруж-ти с центром.

$O_1(12; 5), O_2(-12; 5); O_3(12; -5); O_4(-12; -5)$.

Построим графики уравнений (1) и (2) в системе
 xOy .



Обозначим вершины внутреннего квадрата. Построенная система будет иметь 2 решения в двух случаях:

1) Когда окружности C_4 , O_3 и O_4 касаются ΔBCD и AD соотв. В таком случае $R = 7 \Rightarrow a = R^2 = 49$.

2) Когда окружности C_4 , O_2 и O_1 пересекают C и D соотв., тогда окружности с O_3 и O_4 не будут пересекать $ABCD$. В таком случае

$$a = O_1D^2 = 17^2 + 15^2 = 289 + 225 = 514.$$

Ответ: $a = \{49; 514\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2\sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \quad (1), \text{ где}$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \text{ по гр-ле гол. симметрии.}$$

Т.о. ур-ие (1) равносильно:

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \quad (2) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0 \quad (1) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^7} > 0 \end{cases}$$

$$(1): y^2 - (4+x)y - 2x^2 + 3x = (y-2x)(y+x-4) \\ D = x^2 + 3x + 16 + 3x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_1 = \frac{4+x+3x-4}{2} = 2x; \quad y_2 = \frac{4+x-3x+4}{2} = -x+4$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$$

$$y = 2x; \quad \frac{2x}{x^7} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$y = -x+4; \quad \frac{4-x}{x^7} > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 4)$$

$$y = 2x; \quad (2): (16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} \quad (3)$$

~~Так как функции монотонны, то уравнение (3) имеет не более 1 корня.~~

$$\begin{aligned} 2^{-4\ln x} \cdot x^{-4\ln x} &= (2x)^{\ln 2} \cdot (2x)^{-6\ln x} \\ 2^{-4\ln x} \cdot x^{-4\ln x} &= 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2} \cdot 2^{-6\ln x} \cdot x^{-6\ln x} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 2x: (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = 2x^{\ln \frac{2}{x^6}};$$

$$\frac{2x}{x^6} = \frac{2}{x^6}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = 2x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$2^{\log_2 2} = 2^{\frac{1}{\log_2 e}}$$

$$\ln \frac{2}{x^6} = \ln \left(\frac{\sqrt[6]{2}}{x} \right)^6 = 6 \ln \frac{\sqrt[6]{2}}{x}$$

$$\log_2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 e} = \frac{1}{\log_2 e}$$

$$\left(16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = 2 \cdot x^{6 \ln \frac{\sqrt[6]{2}}{x}} \right)$$

$$= \frac{2^1}{2^{\frac{1}{\log_2 e}}} = \frac{2}{2^{-\log_2 e}} = 2^{\log_2 e} \cdot 2 = 2^{\log_2 e + 1}$$

$$2^e$$

$$x = \sqrt[6]{2}$$

$$2^{\frac{1}{\log_2 e}}$$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 x}$$



черновик

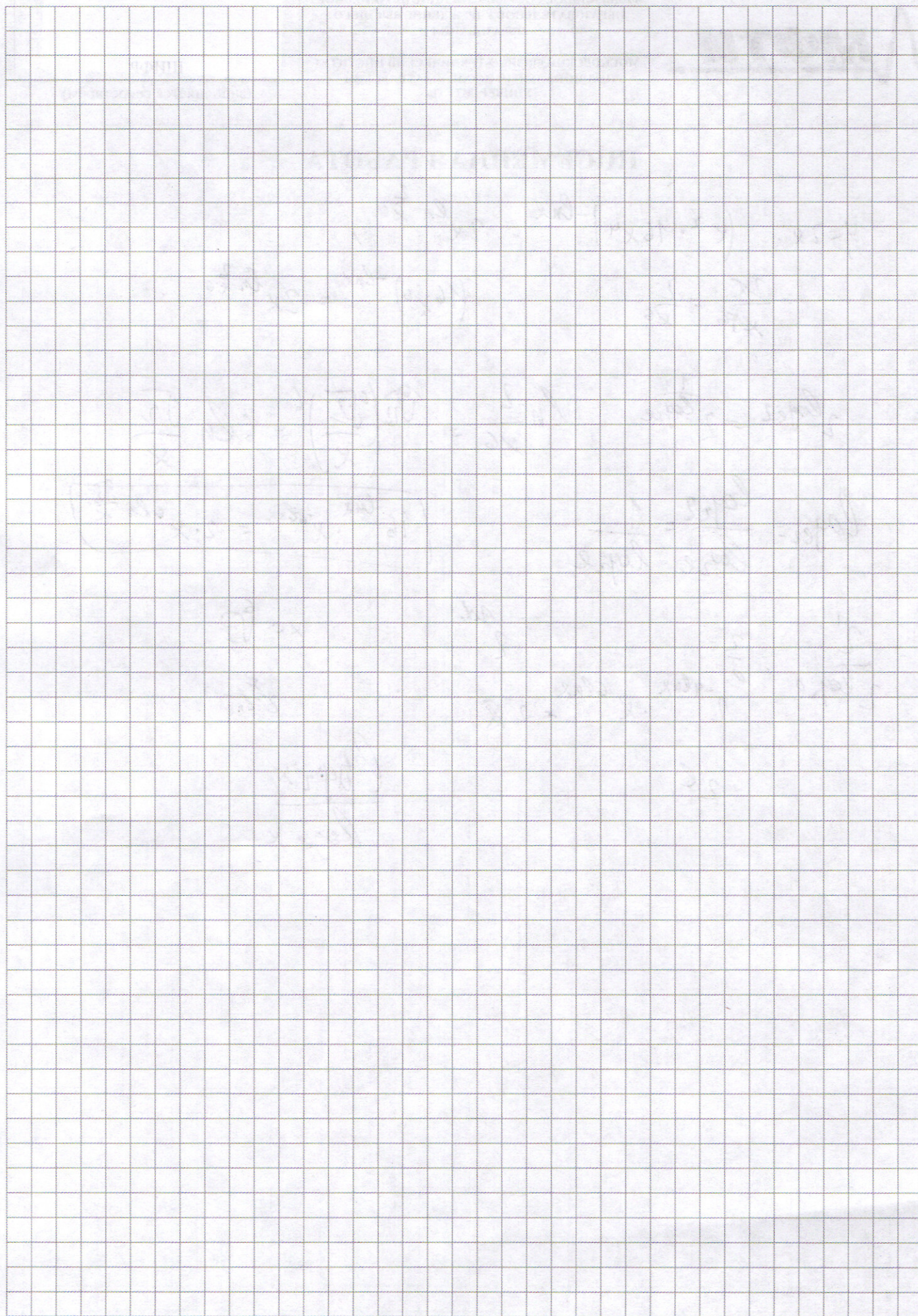


чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 21 \\ \overline{9261} \overline{13} \\ \underline{1} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 21 \\ 008 \\ \underline{6} \\ 27 \\ 27 \\ 00 \\ \underline{27} \\ 00 \\ 00 \\ 00 \end{array}$$

$$9261 = 343 \cdot 27 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{17} \\ \underline{28} \\ 63 \end{array}$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\begin{aligned} 2 \sin \sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \\ \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x &= 0 \end{aligned}$$

$$y^2 - (4+x)y - 2x^2 + 8x = (y - 2x - 4)(y + x) = 0$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ 225 \\ \hline 514 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 \\ &= (3x + 4)^2 \end{aligned}$$

$$17^2 + 15^2$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ 225 \\ \hline 514 \end{array}$$

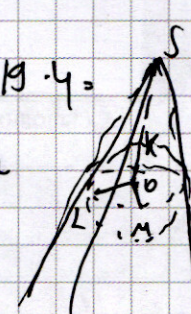
$$y_1 = \frac{4+x+3x+4}{2} = 2x+4$$

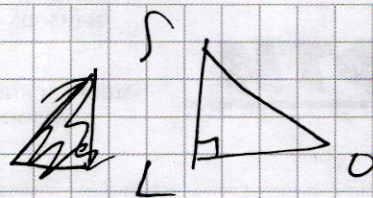
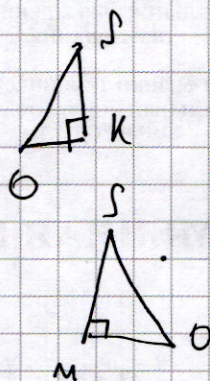
$$y_2 = \frac{4+x-3x-4}{2} = -x$$

$$\begin{aligned} y - 2x - 4 &= 0 \\ y + x &= 0 \end{aligned}$$

$$a = 49$$

$$76 = 19 \cdot 4 = 19 \cdot 2^2$$

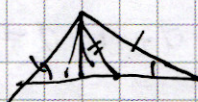
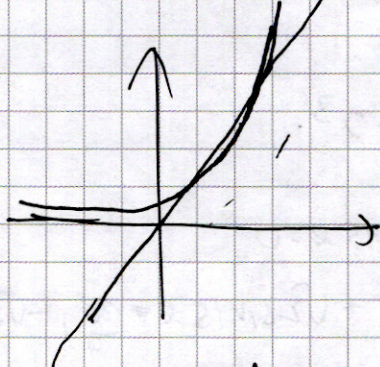
$$3 \cdot 2^{32} - 19$$




$$76 = 64 + 2^2 + 2^3 = 2^6 + 2^2 + 2^3$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^k + 3 \cdot 2^{34}$$

$$26 + 2^2 + 2^3 + 2^{33}x - 2x > 2^k + 3 \cdot 2^{34}$$



$$1350 + 145 = 1495$$

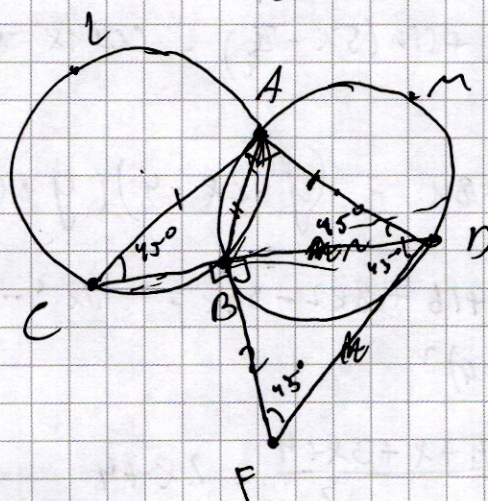
$$\overline{CB} + \overline{BD} = 1300$$

$$1300 + 145 = 1445$$

$$\overline{CA} + \overline{AD} = 3600$$

$$\overline{CA} = 3600 - \overline{CB} - \overline{AB}$$

$$\overline{AD} = 3600 - \overline{AB} - \overline{BD}$$



$$\overline{CA} = 3600 - \overline{CB} - \overline{AB}$$

$$3600 - \overline{CB} - \overline{AB} =$$

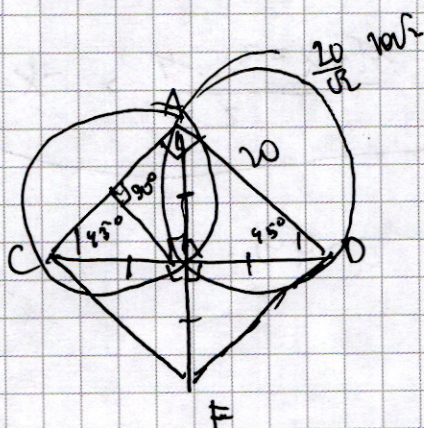
$$+ 3600 - \overline{BD} - \overline{AB} = 3600$$

$$3600 = 2\overline{AB} - 1300$$

$$\overline{AB} = 900$$

$$a^h - a^g$$

$$AB = 100\sqrt{2}$$



$$49$$

$$x > 0$$

$$\frac{4-x}{x^2} > 0$$

$$x \in (0; 4)$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 7^3 \cdot 3^3$$

LLLLLLLLL

Какие цифры цифры могут быть? 1, 7, 3, 9

Если есть 9, остается 7 и 3.

9 LLLLLLLLL

Вероятность что $9'' = 8$.

$$\boxed{8 \cdot 7 \cdot 20}$$

или $3'' = 7$

7777777

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

Если 9 нет: 7^3 и 3^3

LLLLLLLLL

Способы выбора $3''$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$\cos^2 x - 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \sin 7x \cos 2x$$

$$= 2 \sin 7x \sin 2x$$

LLLLLLLLL

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$56 \cdot 10 = 560$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

cos

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$1) \cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x \right) = \sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) =$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos(9x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0 \quad \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

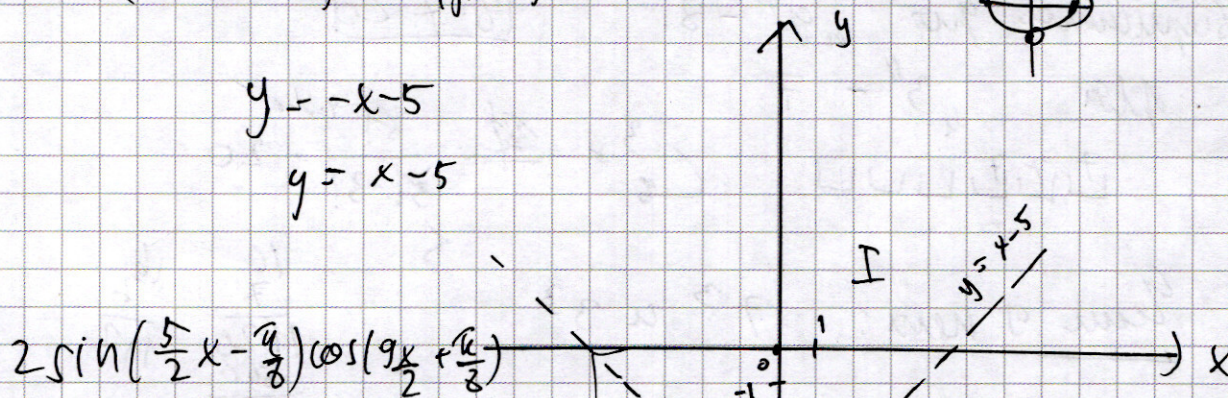
$$2\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4} + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4} - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= -x-5 \\ y &= x-5 \end{aligned}$$



$$2\sin(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}) \cos(9\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})$$

$$7x - 2x - \frac{\pi}{4} = 5x - \frac{\pi}{4}$$

$$(16 \times 6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x} 6)}$$

$$\frac{2x}{x^2} \cdot \frac{2x}{x^2} \cdot \frac{2}{x^6}$$

$$x = \frac{3\pi}{5-4} + \frac{2\pi m}{5}$$

$$\frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi m$$

$$I. x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$2\sin(\frac{9x + \pi}{2}) \cos$$

$$\frac{\pi - \pi}{1} = \frac{3\pi}{8} + \pi m$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$\sin 2x - \cos 2x$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0; 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$+y 2x = 1; 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$