

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ANNALS OF THE ENTOMOLOGICAL SOCIETY OF AMERICA

1934

Vol. 25

No. 1

1. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
2. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
3. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
4. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
5. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
6. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
7. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
8. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
9. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1
10. The Biology of the House Fly, <i>Musca domestica</i> L. (Diptera: Muscidae) in the State of Texas. J. H. Krombein and J. H. Krombein.	1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано: $\overline{abcdefgh} = N$,

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 8261$;

$8261 = 49 \cdot 277 = 7^3 \cdot 3^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$ I

$= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ II

Т.к. $(a, b, c, d, e, f, g, h) \geq 0 \Rightarrow$ возможны только эти два
разложения. (см выше)
 $(a, b, c, d, e, f, g, h) \leq 9$.

I $A_8 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 10 = 560$.

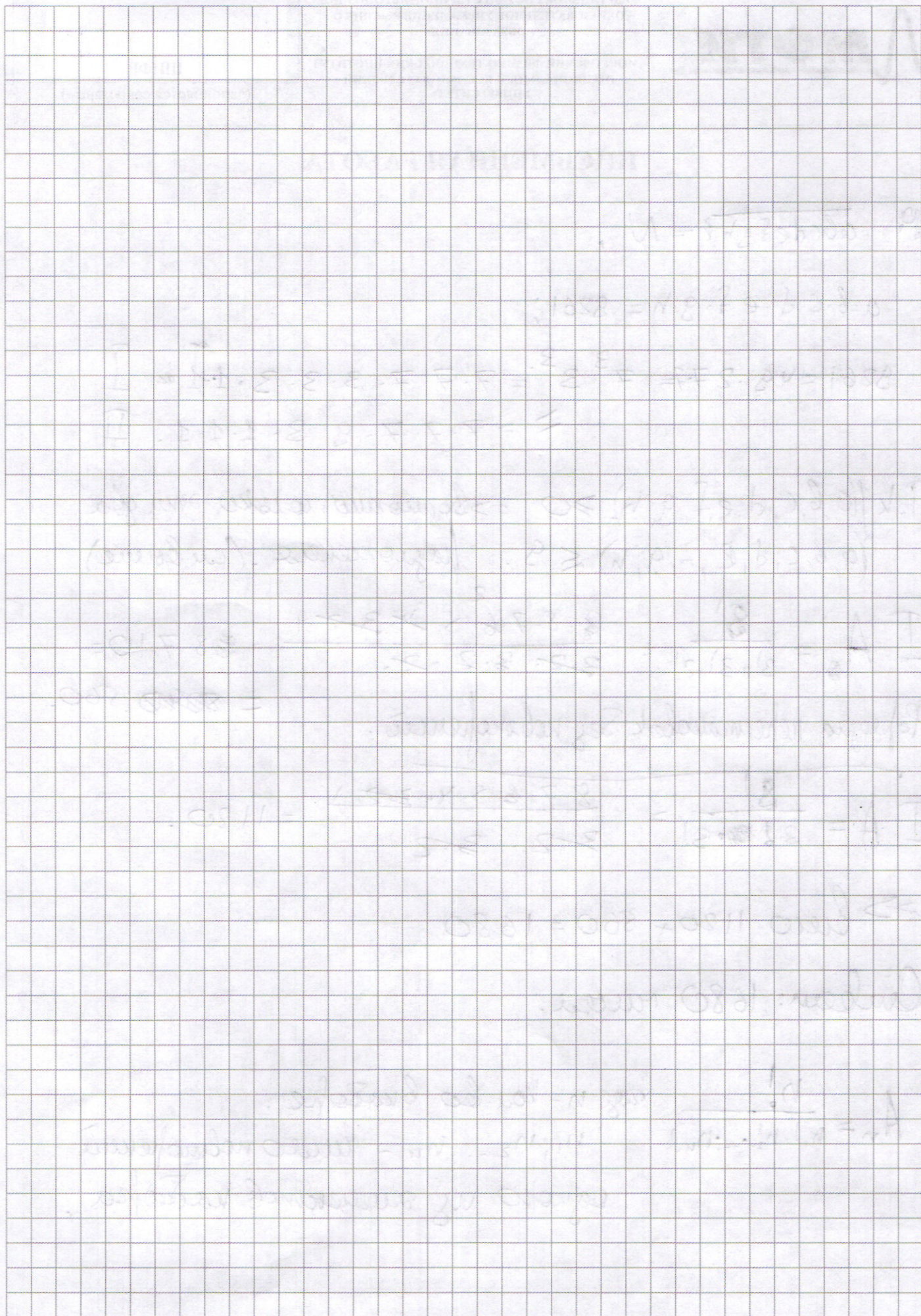
Формула перестановок без повторений.

II $A = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 1120$.

$\Rightarrow$ всего $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680 чисел.

$A_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ где n - кол-во в наборе.
 $n_1, n_2, \dots, n_k$ - число повторений
одного из элементов набора.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2}(\cos 3x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 3x + \sin 5x) = 0$$

$$-2 \sin \frac{3x+5x}{2} \cos \frac{3x-5x}{2} - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \sin \frac{3x+5x}{2} \cos \frac{3x-5x}{2} = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 4x - \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_2 (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x}_{\sin(\frac{\pi}{4} + 2x)}) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad (1)$$

$$2 \sin 4x - 2 \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0 \quad (2)$$

① $\sin 2x = \cos 2x$, можно поделить на $\cos 2x$, т.к.

если $\cos 2x = 0$ то $\sin 2x = 1$ (0TT), $1=0$ - неверно.

$$\tan 2x = 1$$

$$(2) \quad 2 \sin 4x - 2 \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0 \quad 2 \sin \frac{4x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2} \cos \frac{4x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{6x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$(3) \quad \begin{cases} \tan 2x = 1 \\ \sin \frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{6x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \frac{6x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \quad m, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k.$$

$$\sin x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n.$$

$$\sin x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k.$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n \quad m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{x^2 y^4}^{-\ln x} = y^{\ln(3/x^7)} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \quad (1)$$

$$1) y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8x = 0.$$

$$\Delta = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 =$$

$$= (3x)^2 - 2(3x) \cdot 4 + (4)^2 = (3x - 4)^2.$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+4-3x+4}{2} = \frac{-2x+8}{2} = -x+4.$$

$$y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x.$$

$$2) y = 2x.$$

$$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^7})}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})} \quad \text{Дифференцируем по x с помощью ln.}$$

$$\ln(x 16x^4)^{-\ln x} = \ln((2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}); \quad -\ln x \cdot \ln(16 \cdot x^6) = \ln(\frac{2}{x^6}) \cdot \ln 2x.$$

$$-\ln x \cdot (4 \ln 2 + 6 \ln x) = (\ln 2 - 6 \ln x) \cdot (\ln 2 + \ln x)$$

$$a = \ln x, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$-a(4 \ln 2 + 6a) = (\ln 2 - 6a)(\ln 2 + a);$$

$$-a(4 \ln 2) - 6a^2 = \ln^2 2 + a \ln 2 - 6a \ln 2 - 6a^2.$$

$$a \ln 2 = \ln^2 2; \quad a = \ln 2; \quad \text{ОЗ: } \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} y=2x \\ x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$3) y = -x + 4, (x \leq 4, x > 0)$$

$$(x^2(x-4)^4)^{-\ln x} = (-x+4)^{\ln \frac{-x+4}{x^2}} \int \ln()$$

$$-\ln x (\ln(x^2(x-4)^4)) = \ln \frac{-x+4}{x^2} \cdot \ln(-x+4)$$

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln(x-4)) = (\ln(-x+4) - 2\ln x) \cdot \ln(-x+4)$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln(x-4) = \ln(-x+4)^2 - 2\ln x \ln(-x+4)$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln(-x+4) + \ln(-x+4)^2 = 0$$

$$2\ln^2 x - 2\ln x \ln(-x+4) - \ln x \ln(-x+4) + (\ln(-x+4))^2 = 0$$

$$2\ln x (\ln x - \ln(-x+4)) - \ln(-x+4) (\ln x - \ln(-x+4)) = 0$$

$$(\ln x - \ln(-x+4)) (2\ln x - \ln(-x+4)) = 0$$

$$\ln x - \ln(-x+4) = 0 \quad 3)$$

$$\ln x^2 - \ln(-x+4) = 0 \quad 4)$$

$$3) \ln \frac{x}{-x+4} = 0 \quad \frac{x}{-x+4} = 1; \quad x = -x+4 \quad x=2$$

$$4) \ln \frac{x^2}{-x+4} = 0 \quad \frac{x^2}{-x+4} = 1 \quad x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\text{сравнили } \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4; \quad \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4 = \frac{-1 - 8 + \sqrt{17}}{2} = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{81} + \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow 4 > \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0 \text{ - подходит}$$

$$5) \begin{cases} x=2 \\ y=-x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

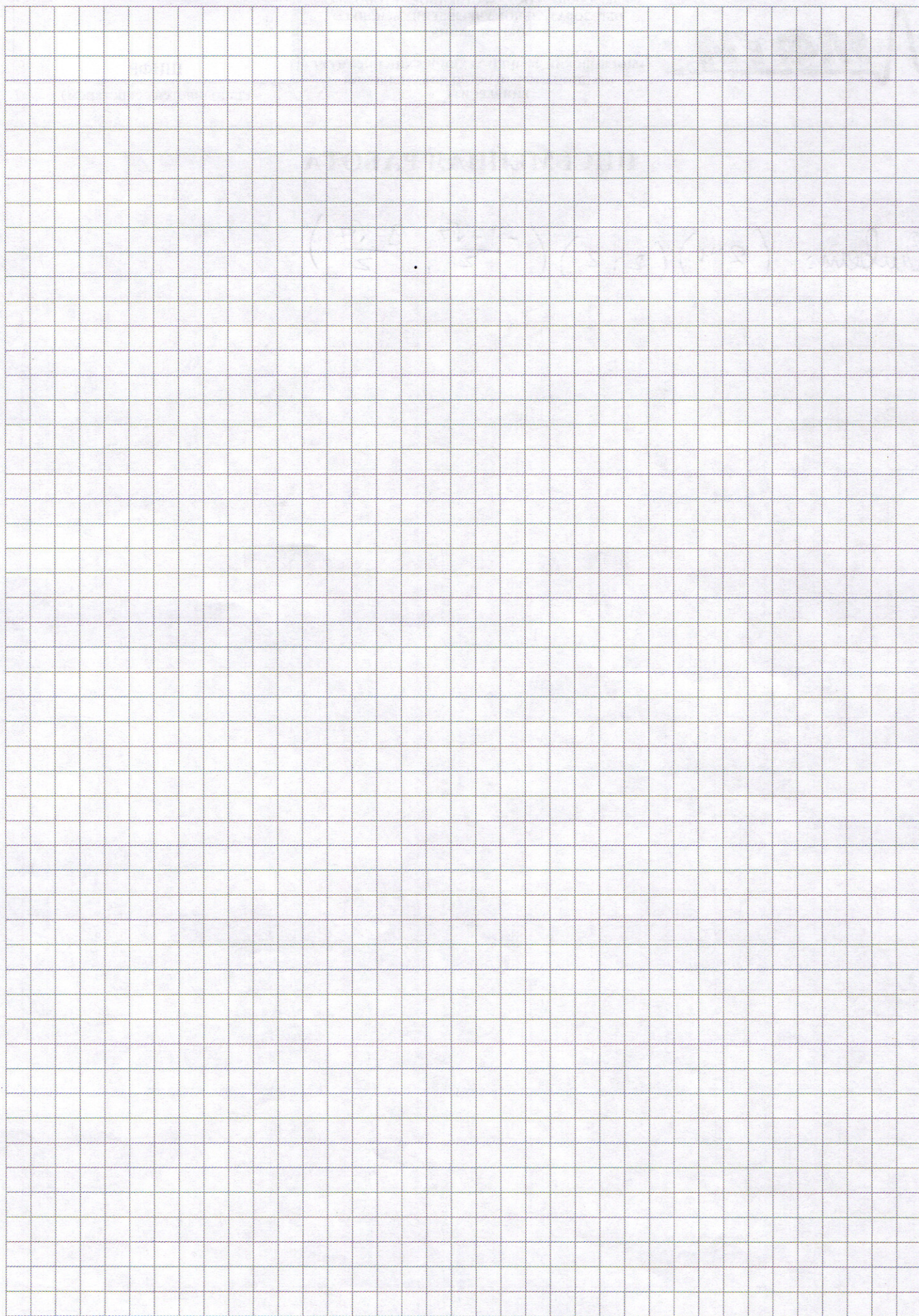
$$\begin{cases} x=2 \\ y=-x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $(2; 4) (2; 2) \left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{2}, \frac{9 - \sqrt{7}}{2} \right)$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{Решить } \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

① $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$. — рассмотреть в системе координат, отобразившись на прямых $\begin{cases} y = -x-5 \\ y = x-5 \end{cases}$

Зона I: КТ(0;0) $\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases}$

$$y+5 + y+5 = 10$$

$$y = 0 \text{ — прямая } \parallel OY.$$

Зона II: КТ(-5;-5) $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases}$

$$-x-x-5 = y-x+5 = 10$$

$$-2x = 10 \quad x = -5 \text{ — прямая } \parallel OY.$$

Зона III: КТ(0;-6) $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases}$

$$-y-5 - y-5 = 10 \quad -2y = 20$$

$$y = -10 \text{ — прямая } \parallel OX.$$

Зона IV: КТ(6;0) $\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases}$

$$x+x+5 = y+5-5 = 10$$

$$x = 5 \text{ — прямая } \parallel OY,$$

Точки пересечения: $\begin{cases} y = x-5 \\ y = -x-5 \\ x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \\ y = -10 \\ x = 5 \end{cases}$

*КТ — координатная точка.

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = +x - 5 \\ y = -x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -5 \\ y = 0 \\ x = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -5 \\ y = -10 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = +x - 5 \\ y = -x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \\ x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ y = +x - 5 \\ y = -x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 10 \\ x = 5 \\ y = -10 \end{cases}$$

Таким образом все точки пересечения в данной зоне совпадают $\Rightarrow$ разрыва нет.

$$\textcircled{2} (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a -$$

при $a < 0$ $x, y \in \emptyset$

при $a = 0$ - 4 точки с координатами $(12; 5)$ $(12; -5)$
 $(-12; 5)$ $(-12; -5)$.

$a > 0$ - ~~ф.к~~ ф.к получен из ф.к $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$ -

ф.е окрестности $y \in (12; 5)$ и $R = \sqrt{a}$;

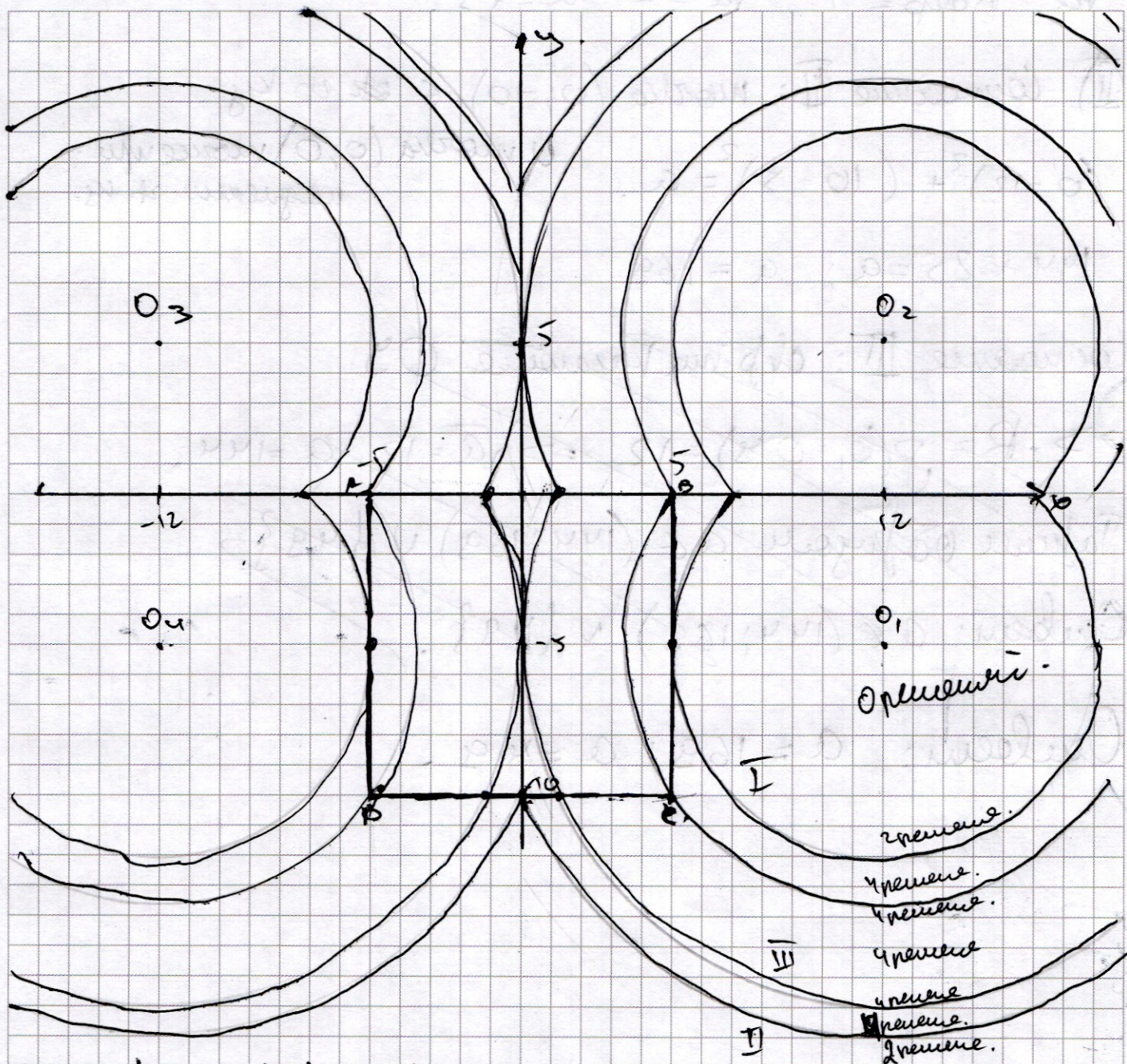
$(|x| - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$ - получен из предыдущего симметричного отражением ф.к части ф.к при $x \geq 0$ относительно ОУ, и отражением части при $x < 0$.

$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a$ получен из предыдущего симметричного отражением части ф.к при $y \geq 0$ относительно ОУ, и отражением части при $y < 0$

$R = \sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ семейство ф.к ~~изображены~~

всех в XOY .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ABCD: $|x - y + 5| + |y - x + 5| = 10$

Решени.

Таким образом зрение будет!

в составе I

и в составлении ~~(II, III)~~. II

I окружности касающиеся BC и AD

$$\Rightarrow p(O_1; BC) = p(O_4; AD) = |x_{O_1}| - |x_{BC}| = 12 - 5 = 7.$$

$$\sqrt{a} \cdot R_{O_1P} = 7; \sqrt{a} = 7 \quad a = 49.$$

II) Состояние II: точка $(0; -10) \in$ ~~кр. кр.~~ кр. кр. :

$$(0 - 12)^2 + (-10 - 5)^2 = a. \quad \text{и точка } (0; 0) \text{ тоже при-}$$

надлежит кр. кр.

$$144 + 225 = a; \quad a = 169$$

~~Состояние III: окружности касающиеся OY~~

$$\Rightarrow R = p(O_1; OY) = 12 \Rightarrow \sqrt{a} = 12 \quad a = 144.$$

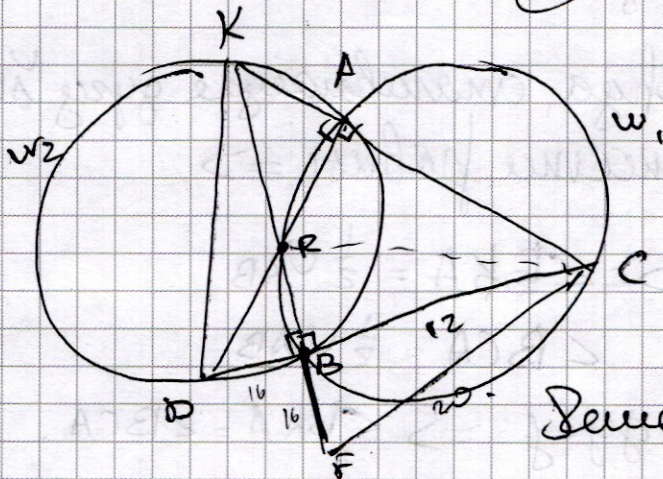
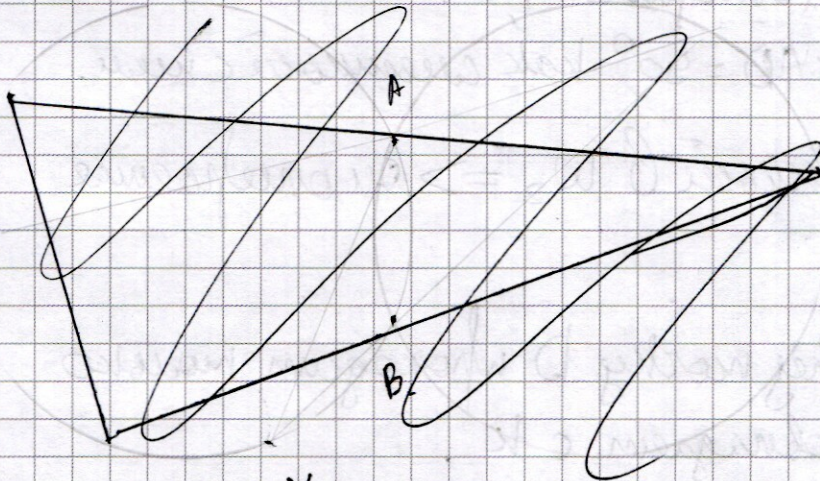
~~Таким образом $a \in (144; 169) \cup \{49\}$.~~

~~Ответ: $a \in (144; 169) \cup \{49\}$.~~

Ответ: $a = 169; a = 49$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

26.



Law:

$$\omega_1, \omega_2 \quad r_1 = r_2 = r_0$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$$

$$C \in \omega_1, B \in \omega_2$$

$$\angle CAD = 80^\circ$$

$$B \in [C, D].$$

h - I weeds AB.

$$BF = BD.$$

CFN

Земле.

1) пусть $AD \cap \omega_1 = R$; т.к. $\angle DAC = 90^\circ \Rightarrow \angle A$ (вписанной) опирается на диаметр RC

~~Изложение ВЗ сводится к тому~~

2) если $BK \perp DC$, $BK \cap B$ (1 из условия), тогда т.к. $\angle B$ - вписанный, $\angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle B$ так же опирается на диаметр.

3) Через точку C можно провести только 1 диаметр (прямая заданная однозначно двумя точками).

т.о. $\angle B$ тоже опирается на RC и

$$BR \cap \omega_1 = R.$$

4) $\angle DBK = 90^\circ$ (из условия), а т.к. OK - вписанный в $\omega_2 \Rightarrow DK$ - диаметр ω_2

5) Пусть $CA \cap \omega_2 = K'$ (вторично);

$$\angle BAC = 90^\circ (\text{учи}) \Rightarrow \angle K'AD = 90^\circ \text{ как смежные с тем.}$$

По т.к. $\angle K'AD$ - вписанный в $\omega_2 \Rightarrow OK'$ опирается на диаметр.

Аналогично (и 3) через точку D проходит только 1 диаметр $\Rightarrow K'$ совпадает с K .

6) $\omega_1 = \omega_2$ ($r_1 = r_2$); AB - хорда, стягивающая дугу $\overset{\frown}{AB}$ (малую), по т.к. окружности равны $\Rightarrow$.

$$\overset{\frown}{AB} \in \omega_1 = \overset{\frown}{AB} \in \omega_2 \Rightarrow \angle BKA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$$
$$\angle BCA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$$

как вписанные на одну и ту же дугу $\Rightarrow \angle BKA = \angle BCA$.

$$\Rightarrow \triangle BKC - \text{р/б} \Rightarrow BC = BK.$$

7) $\triangle BDK$ - н/у ($\angle DBK = 90^\circ$ т.к. $BK \perp DC$), ишем из н 4: DK - диаметр $\omega_2 \Rightarrow DK = 2r_2 = 20$

$$\Rightarrow \text{по теореме Пифагора: } DK^2 = BK^2 + DB^2.$$

8) По теореме Пифагора в $\triangle FBC$ ($\angle FBC = 90^\circ$ т.к. $BK \perp DC$ по условию) $CF^2 = BC^2 + BF^2$

$$\left. \begin{array}{l} BC = BK \text{ (6)} \\ DB = BF \text{ (учи)} \end{array} \right\} CF^2 = BK^2 + BD^2 = 400 \Rightarrow CF = 20.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

10) $BC = 12$ $S_{\triangle ACF} = ?$

11) Из п. 9: $BF^2 + BC^2 = FC^2 \Rightarrow BF^2 = FC^2 - BC^2 = 20^2 - 12^2 =$
 $= (20 - 12)(20 + 12) = 8 \cdot 32 = 2^3 \cdot 2^5 = 2^8 \Rightarrow BF = \sqrt{2^8} =$
 $= 2^4 = 16$

12) $BF = BD = 16$
 $BC = 12$

13) Аналогично п. 6: $\angle ADB = \angle ACB \Rightarrow \triangle DAC - \text{пр.}$
 а.м.н. $\triangle DAC - \text{н.у.} \Rightarrow$ по т. Пифагора: $2AD^2 = DC^2$;

$DC = DB + BC = 28$ $2AD^2 = 28^2$; $AD = \frac{28}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow AC = \frac{28}{\sqrt{2}}$

14) $\triangle DAC - \text{пр.}$ и н.у. $\Rightarrow \angle ACD = 45^\circ$

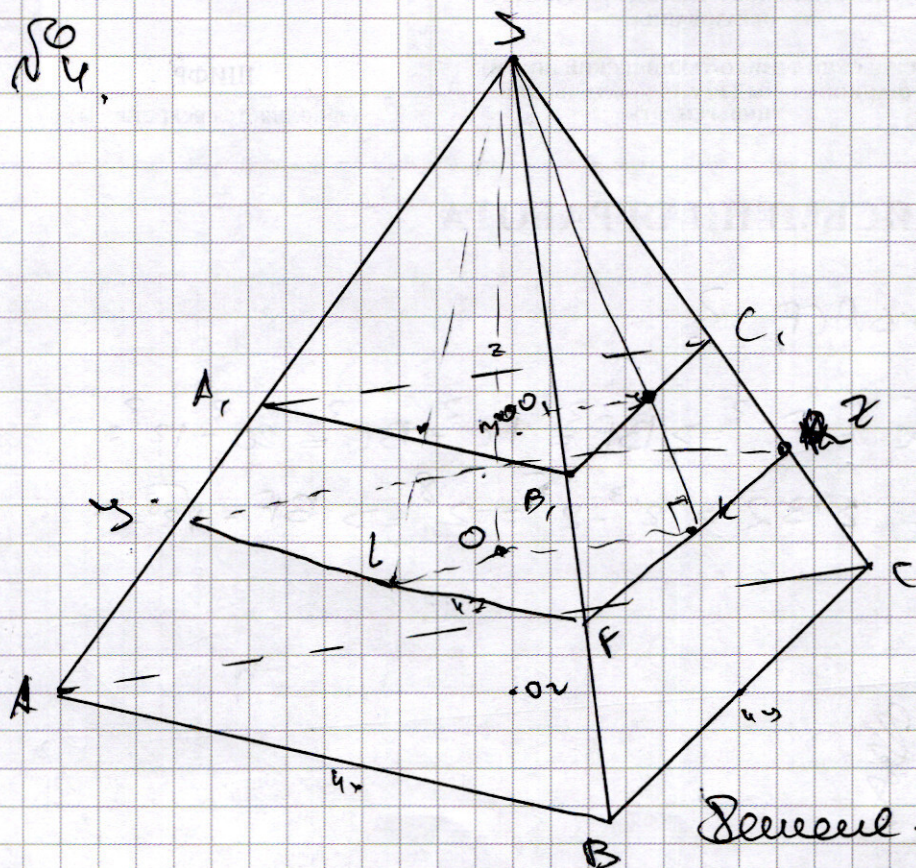
15) В н.у. $\triangle BCF$: $\sin \angle BCF = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$; $\cos \angle BCF = \frac{3}{5}$.
 м.н. $\triangle DAC - \text{н.у.}$

16) $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{\sqrt{2}} \cdot 20 \cdot \sin(\angle ACD + \angle BCF) =$
 $= \frac{14 \cdot 20}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{14 \cdot 20 \cdot 7}{8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 14^2 = 196$

Ответ: $CF = 20$

$S_{\triangle ACF} = 196$

№ 4.



Дано:

$\sqrt{\text{шар}}$ - вписан
в Δ -образ S .

$\angle KSO$ - ?

S KLM - ?

Решение.

1) Пусть $(A_1B_1C_1)$ и (ABC) - данные в условии сечения,
 $\perp SO$, как $\sqrt{\text{шар}}$.

т.к. $(A_1B_1C_1) \perp SO \} (A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$ по св. б.у. II те-ем.
 $(ABC) \perp SO$

а так как $\sqrt{\text{шар}}$ как центр сферы угла $(A_1B_1C_1)$ и $(ABC) \Rightarrow$
шар вписан в усеченную пирамиду $ABC A_1B_1C_1$ и
в Δ -ую пирамиду $SABC$.

2) Пар. е м-ти пересекают 3 м-ти по II прямой (св. б.у. II те-ем) $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$; $B_1C_1 \parallel BC$; $A_1C_1 \parallel AC$

3) $\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SAB$ ($\angle B$ - общий; $\angle A_1 = \angle A$ как соотв. е при.)
 $A_1B_1 \parallel AB$ (как A_1A) $\Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SA_1}{SA}$.

аналогично $\Delta SB_1C_1 \sim \Delta SBC$; $\Delta SA_1C_1 \sim \Delta SAC$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1 B_1}{AB} &= \frac{S B_1}{SB} = \frac{SA_1}{SA} \\ \frac{B_1 C_1}{BC} &= \frac{SC_1}{SC} = \frac{SB_1}{SB} \\ \frac{A_1 C_1}{AC} &= \frac{SC_1}{SC} = \frac{SA_1}{SA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{A_1 C_1}{AC} \Rightarrow \triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle ABC$$

по III признаку.

$$\Rightarrow \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{A_1 C_1}{AC} = \frac{1}{k};$$

$$\frac{S_{A_1 B_1 C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}; k=4$$

4) шар кас. $(A_1 B_1 C_1) \Rightarrow \rho(O; (A_1 B_1 C_1)) = R$; где R - радиус шара.
шар кас $(ABC) \Rightarrow \rho(O; (ABC)) = R$;

$\Rightarrow$ м.к из одной точки можно провести один перпендикуляр,
 $\alpha (A_1 B_1 C_1) \parallel (ABC) \Rightarrow \rho(A_1 B_1 C_1; (ABC)) = 2R = h$ - высота пирамиды.

5) ~~по формуле~~ ~~высота пирамиды~~

пирамиды $SA_1 B_1 C_1$ и $SABC$ имеют общий угол $\Rightarrow$

$$\frac{V_{SA_1 B_1 C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{A_1 B_1}{AB} \cdot \frac{B_1 C_1}{BC} \cdot \frac{A_1 C_1}{AC} = \frac{1}{k^3}$$

$$V_{SA_1 B_1 C_1} = \frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot S_{A_1 B_1 C_1} \quad \text{м.к } (A_1 B_1 C_1) \perp SO \Rightarrow SO_1 \perp (A_1 B_1 C_1);$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot h_2 \cdot S_{ABC} \quad ; \quad SO_1 = h_1,$$

$$\text{м.к } (ABC) \perp SO \Rightarrow SO_2 \perp (ABC) \\ SO_2 = h_2.$$

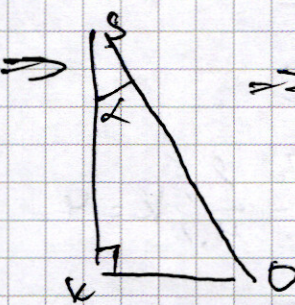
прямые. продолж. вышше. $h_2 = h_1 + h = h_1 + 2R.$

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot S_{ABC_1}}{\frac{1}{3} \cdot (h_1 + 2R) \cdot S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = k$$

$$\frac{h_1}{h_1 + 2R} = k; \quad \frac{h_1}{h_1 + 2R} = \frac{1}{4}. \quad 4h_1 = h_1 + 2R; \quad \boxed{h_1 = \frac{2}{3}R}$$

$$\Rightarrow SO = h_1 + \frac{h}{2} = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$$

м.к K-мощка кас $\Rightarrow OK \perp SK \Rightarrow \triangle SOK$ н.г. $\angle K = 90^\circ$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$ $\sin \alpha = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$, $\angle K = 90^\circ$
(м.к K-мощка касание)

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

6) П.к. SO - ось симметрии. $\left\{ \begin{array}{l} \triangle SOK = \triangle SOL = \triangle SOM \\ OL = OK = OM = R \end{array} \right.$

$$\Rightarrow SK = SL = SM$$

$\nexists$ п.к. $FZ \parallel AB; FZ \cap L; (SAB)$ | ~~т.к все эти плоскости~~
 $FZ \parallel BC; FZ \cap K; (SBC)$ | ~~и как стороны ABC,~~
 $FZ \parallel AC; FZ \cap M; (SAC)$ | ~~так и стороны A, B, C.~~

$\Rightarrow (FZ)$ - искомое сечение.

Зак. во:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x}$$

log.

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x}$$

+

$$-y > -76 - 2(2^{32} - 1) \cdot 1$$

$$0 \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} - 76 - 2(2^{32} - 1) \cdot 1$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{3x} - 76 - 2(2^{32} - 1) \cdot 1$$

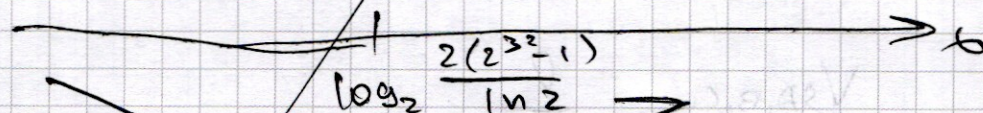
$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2(2^{32} - 1) = 0$$

$$2^x = \frac{2(2^{32} - 1)}{\ln 2}$$

$$2^x \uparrow, \forall x \in \mathbb{R}; \quad \frac{2(2^{32} - 1)}{\ln 2} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \text{всего 1 решение } a = x = \log_2 \frac{2(2^{32} - 1)}{\ln 2} > 0$$

f



$$x \in (-\infty; a] \quad f(x) \downarrow; \quad x \in [a; +\infty) \quad f(x) \uparrow.$$

Продолжение на стр. 20

$$\begin{aligned} YF \parallel AB \parallel A_1B_1 &\Rightarrow \text{по теореме о параллельных отрезках: } \frac{SF}{FB} = \frac{SY}{YA} \\ FZ \parallel BC &\Rightarrow \text{по теореме о параллельных отрезках: } \frac{ZF}{FB} = \frac{SZ}{ZC} \\ ZF \parallel BC &\Rightarrow \text{по теореме о параллельных отрезках: } \frac{SZ}{ZC} = \frac{SY}{YA} \end{aligned}$$

$$\frac{SY}{YA} = \frac{SF}{FB} = \frac{SZ}{ZC} \Rightarrow \text{все эти отрезки имеют в начале одну точку, следовательно,}$$

$$\parallel (ABC) \quad \boxed{\text{М.м.г.}} \quad \textcircled{1} \in (YFZ)$$

$$\text{по теореме м.м.г.} \quad \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SA_1}{SA} \Rightarrow \frac{B_1F}{FB} = \frac{C_1Z}{ZC} = \frac{A_1Y}{YA}$$

$$\frac{SB_1}{SF} = \frac{SC_1}{SZ} = \frac{SA_1}{SY} = \frac{1}{m}$$

$$8) \text{ Аналогично и } 3: A_1B_1C_1 \sim YFZ,$$

$$\frac{A_1B_1}{YF} = \frac{B_1C_1}{FZ} = \frac{A_1C_1}{YZ} = \frac{SB_1}{SF} = \frac{SC_1}{SZ} = \frac{SA_1}{SY} = \frac{1}{m}$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{YFZ}} = \frac{1}{m^2}$$

$$\text{Аналогично и } 5: \frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SYFZ}} = \frac{1}{m^3}$$

$$\text{нужен } h(SYFZ) = p(S; O) = \frac{5}{3}R$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}R \cdot (S_{A_1B_1C_1})}{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3}R \cdot (S_{A_1B_1C_1})} = \frac{1}{m^3} \quad \frac{2}{5} = \frac{1}{m} \quad \boxed{m = \frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{YFZ} = \frac{25}{4} \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{25}{4}$$

$$\text{Ответ: } \arccos\left(\frac{3}{5}\right); S = \frac{25}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} (\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) - \sqrt{2} \cos 4\alpha + (\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) = 0$$

$$-2 \sin \frac{3\alpha+5\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha-5\alpha}{2} - \sqrt{2} \cos 4\alpha + 2 \sin \frac{3\alpha+5\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha-5\alpha}{2} = 0$$

$$-2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha - \sqrt{2} \cos 4\alpha + 2 \sin 7\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \sin 7\alpha (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) - \sqrt{2} (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) = 0$$

$$(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) (2 \sin 7\alpha - \sqrt{2} \cos 2\alpha - \sqrt{2} \sin 2\alpha) = 0$$

$$\text{I} \quad 2 \sin 7\alpha - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha \right) = 0$$

$$2 \sin 7\alpha - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) = 0$$

$$\sin 7\alpha - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) = 0$$

$$\sin 7\alpha - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) = 0$$

$$2 \sin \frac{7\alpha - \frac{\pi}{4} + 2\alpha}{2} \cos \frac{7\alpha + \frac{\pi}{4} - 2\alpha}{2} = 0$$

$$\sin \left(\frac{9\alpha - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{9\alpha + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin 7\alpha - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{7\alpha - 2\alpha - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{7\alpha + 2\alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$(\text{т.к. } \sin 7\alpha - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{7\alpha - 2\alpha - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{7\alpha + 2\alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\text{I} \quad \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0 \quad \left| : \cos 2\alpha (\cos 2\alpha \neq 0 \text{ т.к. иначе по ДТТ}) \right.$$

$$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$0 - 1 = 0 \text{ (неверно)}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha \neq 0$$

$$\tan 2\alpha = 1$$

$$\begin{cases} \lg 2x = 1 \\ \sin\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \frac{9x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi m \end{cases}, m, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \\ 9x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n \\ 5x + \frac{\pi}{4} = 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{2}{9}\pi n \\ x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m \end{cases}, n, m, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, \frac{\pi}{36} + \frac{2}{9}\pi n, -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m, n, m, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \lg 2x = 1 \\ \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\pi n \\ \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \\ 5x - \frac{\pi}{4} = 4\pi n \\ 9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10} n \\ x = \frac{3\pi}{36} + \frac{2}{9}\pi m \end{cases}, k, n, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10} n, \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m, m, n, k \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a b c d e f g h.

$$abcde + fgh = 9261 = 3^3 \cdot 7^3.$$

$$a, b, c, \dots, h \in [0; 9].$$

$$ce \in [1; 9].$$

$$(3+1)(3+1) = 16.$$

8
8
27
7
49
343
21

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \mid 3 \\ - 9 \\ \hline 26 \\ - 24 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \mid 3 \\ - 3 \\ \hline 08 \\ - 6 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \mid 3 \\ - 10 \\ - 9 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \mid 7 \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 343 \\ \hline 243 \\ 324 \\ \hline 243 \\ \hline 27783 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 3^3 \\ 32 \\ 343 \\ 127 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$-2 \sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0.$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x =$$

$$\begin{cases} (b^2 y^4)^{-\ln b} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - by - 2x^2 + 8b - 4y = 0. \end{cases}$$

$$\ln b \cdot \ln(b^2 y^4) = \ln y \cdot \ln\left(\frac{y}{x^7}\right)$$

$$\ln(b) \cdot (2\ln b + 4\ln y) = \ln y \cdot (\ln y - 7\ln b)$$

~~$$y^2 - by + y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8b = 0$$~~

~~$$D = b^2 + 8b + 16 + 8b^2 - 16b \Rightarrow$$~~

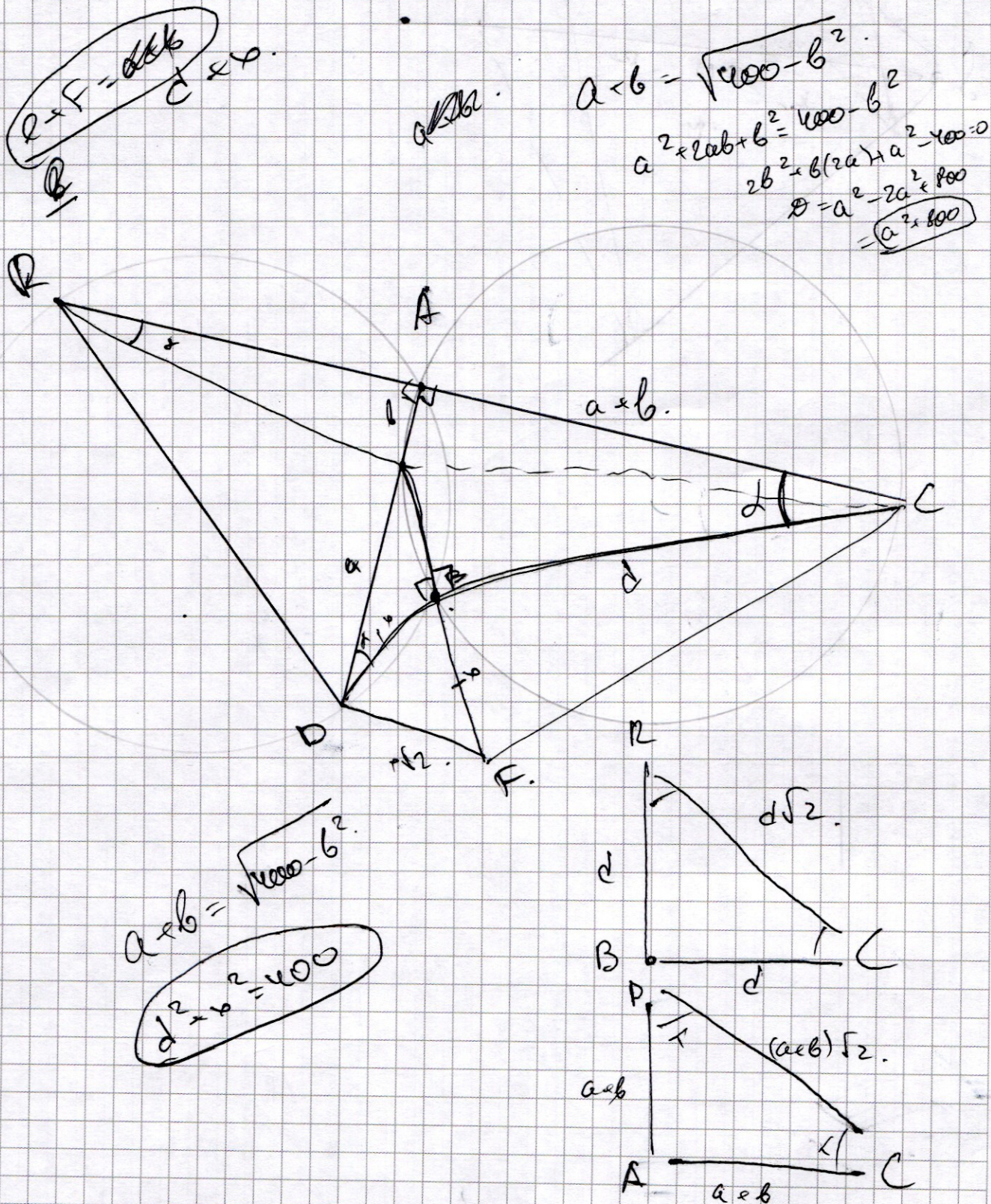
~~$$= 9b^2 - 8b + 16 \quad \frac{D}{4} = 16 - 16 \cdot 9 > 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$~~

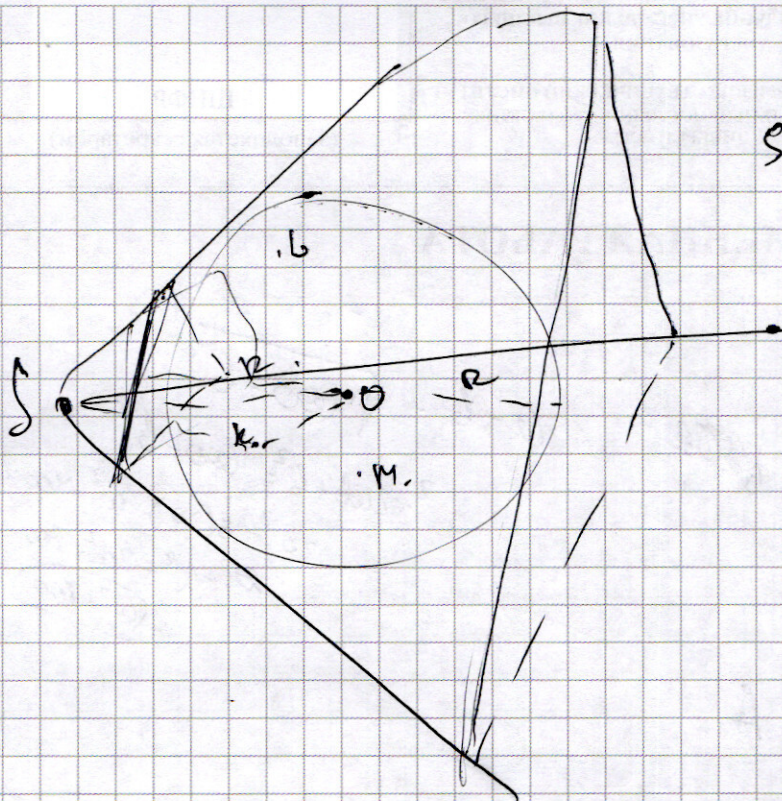
$$y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8b = 0$$

$$D = b^2 + 8b + 16 + 8b^2 - 32b = 9b^2 - 24b + 16 =$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





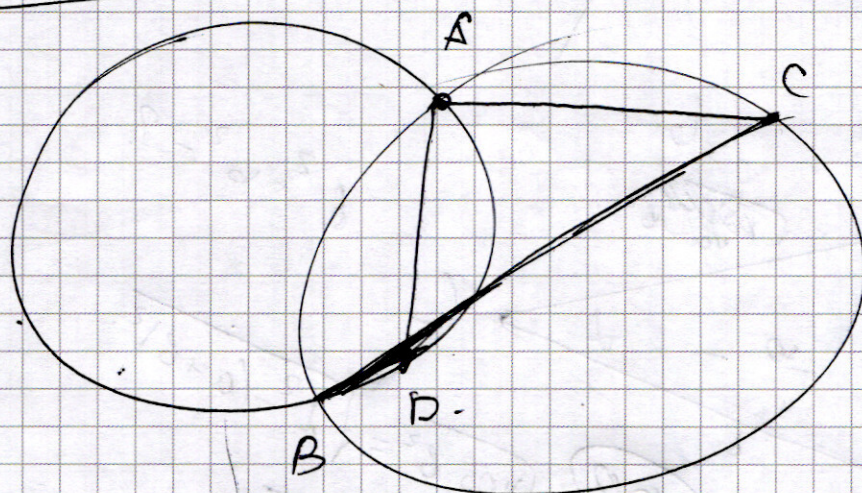
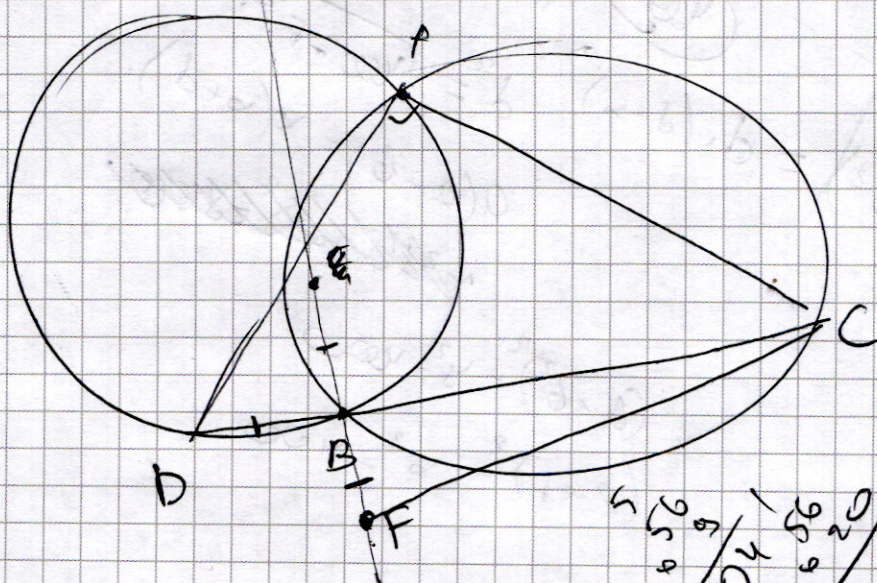
Scat KLM - ?;

h16.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^b + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)b \end{cases}$$

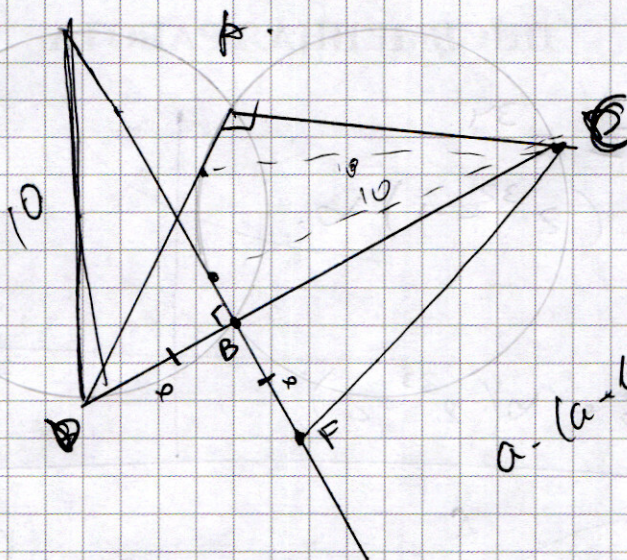
$$2^{10} + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 10(2^{33} - 2)$$


$$r_1 = r_2 = 0.$$
$$B \in [CD]$$
$$BF = BD$$


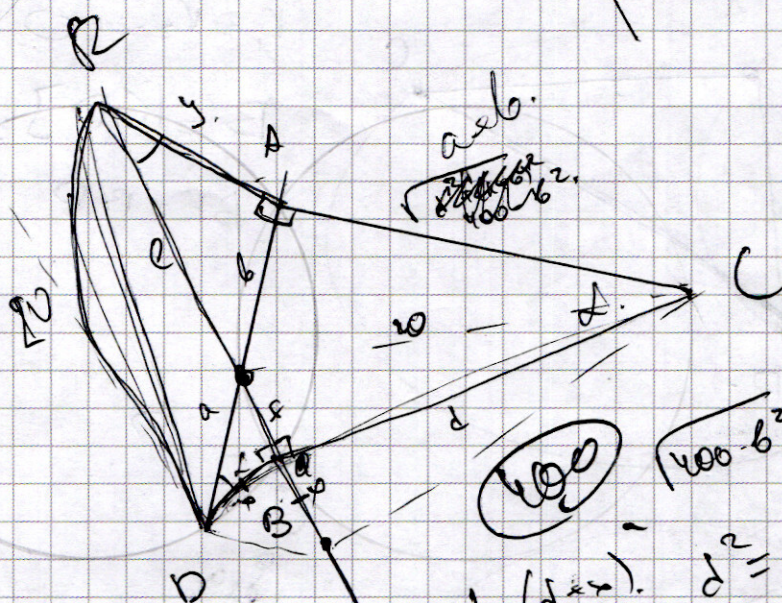
$$\begin{array}{r}
 926 \\
 \times 24 \\
 \hline
 3704 \\
 1852 \\
 \hline
 22216
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 504 \\ 9 \overline{) 4536} \\ \underline{45} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$r_1 = r_2 = 10.$$



$$a \cdot (a-b) = x(x+d).$$



$$b^2 = x^2 - ?$$

$$\sqrt{400 - b^2} = \sqrt{d^2 - (a+b)^2}.$$

$$d^2 = \sqrt{400 - b^2}.$$

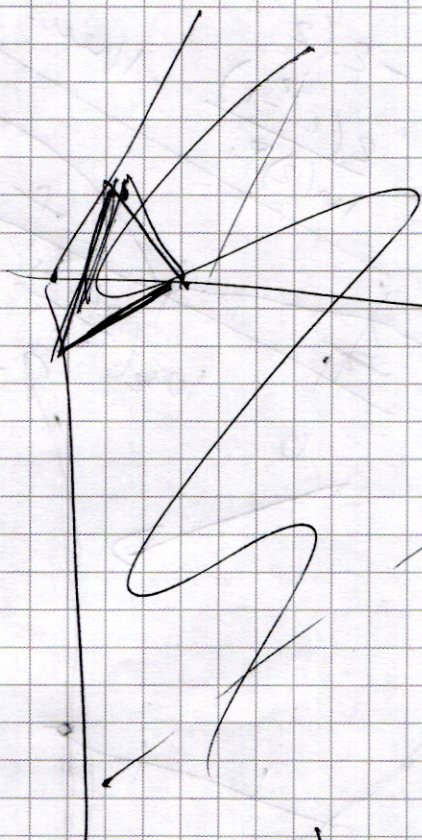
$$a(a+b) = x(x+d).$$

$$(\sqrt{400 - b^2})(y = \sqrt{400 - b^2}) = d \cdot (d+x).$$

$$(a+b)^2 + y^2 = 400.$$

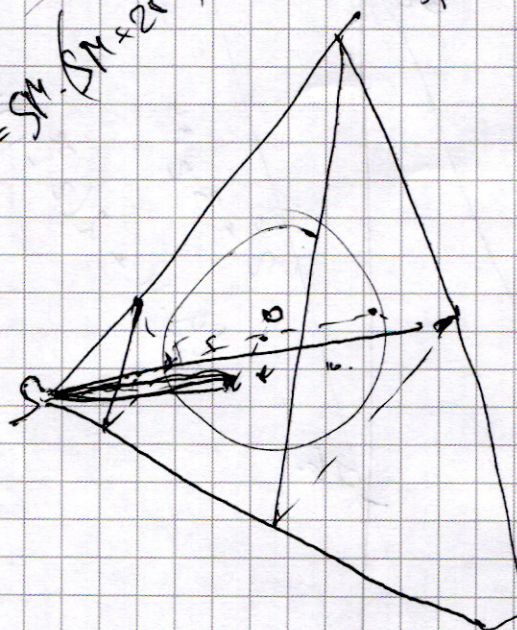
$$(d+x)^2 + b^2 = 400.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_2 = S_1 \cdot (S_1 + 2r)$$

$$S_2 = r^2 + S_1 + r$$



$$V = \frac{1}{3}b(S_1 + S_2 - \sqrt{S_1 S_2})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2r(1 + 16 - 4) \cdot \left(\frac{26}{3}r\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 \cdot 8}{(S_1 + 2r) \cdot 16}$$

$$y > 2^b + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + (2^{33} - 2)b$$

$$2^b + 3 \cdot 2^{34} = 76 - 2(2^{32} - 1)b = 0$$

$$2^b / \ln 2 - 2 \cdot (2^{32} - 1) = 0$$

$$2^b = \frac{2(2^{32} - 1)}{\ln(2)}$$

$$\frac{76 \cdot 4}{\frac{4}{36}}$$

$$2^b + 3 \cdot 2^{34}$$

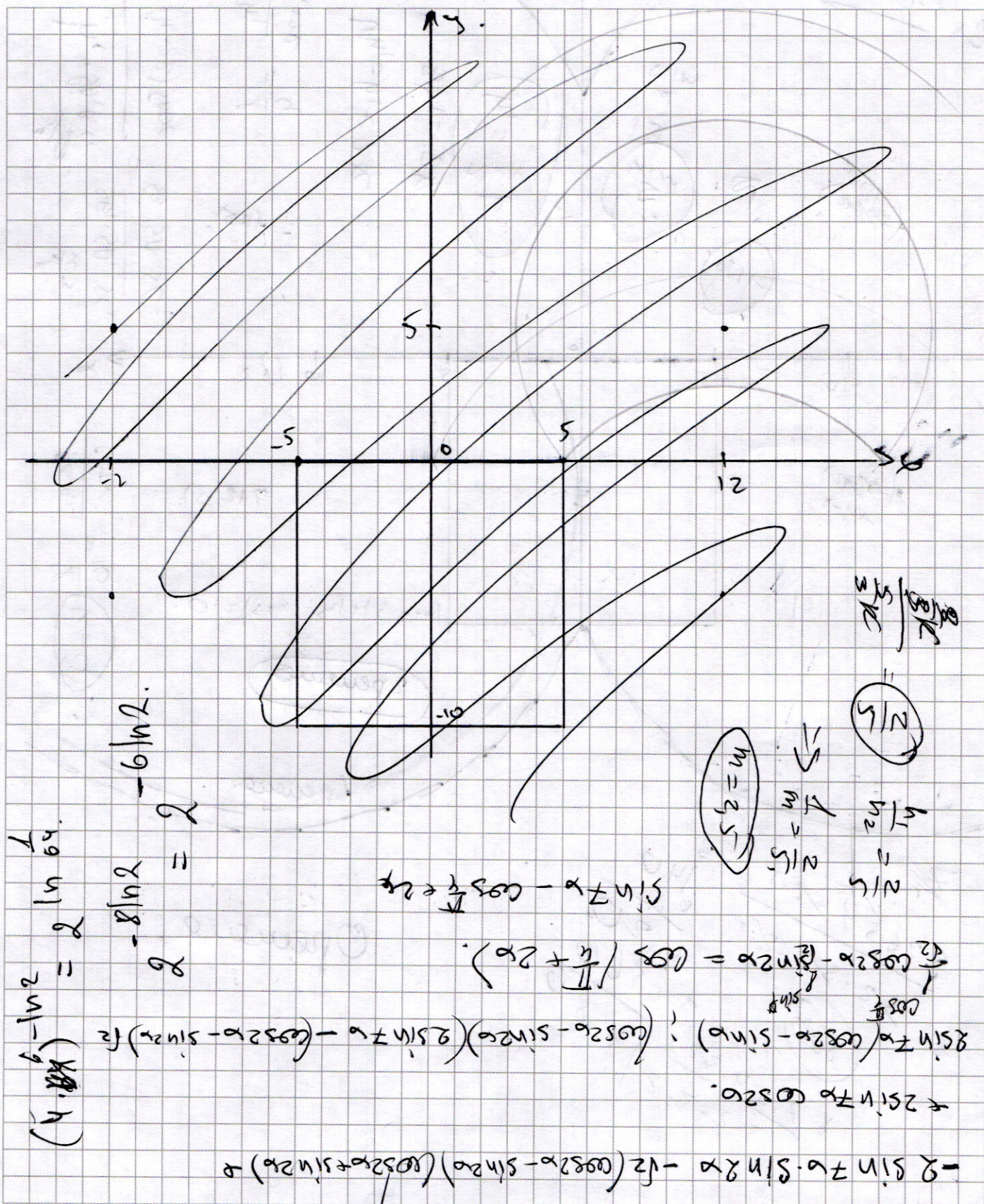
$$19.4 + 2(2^{32} - 1)b$$

$$3 \cdot 2^{34}$$

$$76$$

$$\frac{76}{2^{33} - 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\sin 70^\circ - \sqrt{2} \left(\underset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos 20^\circ} + \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 20^\circ} \right) = 0.$$

$$\sin \frac{x_0 - 2x_0 - \frac{\pi}{4}}{2} \quad \cos \frac{x_0 + 2x_0 + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$4x^2 - 2x^2 - 2x^2 + 8x - 8x = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 4x + 4x + 4 - 4 = (x-2)^2$$

~~$$x^2 - 8x + 16 + x^2$$~~

$$y = x \quad y = -x + 4$$

$$(x^6)^{\ln x} = x^{6 \ln x} = x^{\ln \frac{1}{x^6}} = x^{-6 \ln x} = x^{\ln \frac{1}{x^6}}$$

$$4\sqrt{2} \cdot (16x^6)^{-\ln 6} = (2x)^{\ln \frac{2}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{9\sqrt{x}}$$

$$-\ln 6 \cdot (4 \ln 2 + 6 \ln 6) = (\ln 2 + \ln 6)(\ln 2 - 6 \ln 6).$$

$$-4 \ln 2 \ln 2 = \ln^2 2 - 2 \ln 2 \ln 2 + \ln 2 \ln 2 = -\ln^2 2$$

$$\ln \sqrt{b} \ln 2 = \ln^2 2 \quad \ln b = \ln 2 \quad \begin{matrix} b = 2 \\ y = u \end{matrix}$$



$$\sin(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot 20$$

$$y = -x + 4.$$

$$(x^2(-x+4))^{-\ln b} = (-x+4)^{\ln\left(\frac{-x+4}{x^2}\right)}$$

$$-\ln x (2\ln x + \ln(-x+4)) = \ln(-x+4) \cdot (\ln(-x+4) - 2\ln x)$$

$$-2\ln^2 x - \ln x \cdot \ln(-x+4) = \ln^2(-x+4) - 2\ln x \ln(-x+4)$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln(-x+4) + \ln^2(-x+4) = 0.$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0.$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2 \quad b = \frac{3a + a}{2} = 2a$$

$$b = \frac{3a - a}{2} = a.$$

$$\ln(-x+4) = 2\ln x. \quad \begin{cases} x^2 = -x+4 & x^2+x-4=0 \\ b^2 = -b+4 & 2b=4 \end{cases}$$

$$\ln(-b+4) = \ln x. \quad \begin{cases} b^2 = -b+4 & 2b=4 \end{cases} \quad x=2.$$

$$D = 1 + 16 = 17; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$-\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right) + 4 =$$

$$= \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} > 0.$$

$$y^2 - 2y + 8 + 16 - 4y$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$D = 36 - 32 = 4$$

$$y = \frac{6 \pm 2}{2} = 4$$

$$y = \frac{6 - 2}{2} = 2.$$